大学院ミクロ経済学 攻略マニュアル

第3巻　一般均衡と厚生経済学

均衡の存在・厚生経済学の基本定理・コア

目次

序　一般均衡理論の全体地図　2

序.1 部分均衡から一般均衡へ 2

序.2 この巻の流れ 3

1　交換経済とエッジワース・ボックス　4

1.1　交換経済とワルラス均衡 4

1.2　エッジワース・ボックス 5

1.3　オファー曲線と均衡 5

1.4　コブ＝ダグラス型の経済 6

2　超過需要関数　10

2.1　超過需要関数 10

2.2　超過需要関数の性質 11

3　均衡の存在　16

3.1　なぜ存在証明が必要なのか 16

3.2　2財の場合 16

3.3　一般の場合：角谷の不動点定理による証明 17

4　厚生経済学の第一基本定理　22

4.1 パレート効率性 22
4.2 第一基本定理（交換経済） 24
4.3 生産のある経済 25
4.4 第一基本定理が成り立たない場合 26

5 厚生経済学の第二基本定理 28
5.1 効率性と公平性 28
5.2 第二基本定理 29

6 コア 33
6.1 提携とコア 33
6.2 ワルラス均衡はコアに属する 35
6.3 コアの極限定理 35

序章

一般均衡理論の全体地図

> **この章の問い**　一般均衡理論は、どのような問いに答えようとしているのでしょうか。
> **この章で分かること**　この巻で学ぶ3つの問い（存在・効率性・分権化）と、それぞれで使う数学の道具。

序.1　部分均衡から一般均衡へ

学部のミクロ経済学では、主に一つの市場だけを取り出して、需要曲線と供給曲線の交点で価格が決まると考えました（部分均衡分析）。しかし現実には、ある財の価格が変わると、代替財や補完財の需要が変わり、所得も変わり、それがまた最初の財の需要に跳ね返ってきます。

一般均衡理論は、**すべての市場を同時に**考えます。第1巻の消費者と第2巻の企業が、すべての財の市場で出会い、すべての市場で需要と供給が一致する価格の体系を考えるのです。そして、次の3つの問いに答えます。

問い	内容	主な道具
存在	すべての市場を同時に清算する価格は存在するか	連続性、ブラウワー・角谷の不動点定理
効率性	市場均衡の配分は無駄がないか（第一基本定理）	局所非飽和性、背理法
分権化	望ましい効率的配分を市場で実現できるか（第二基本定理）	凸性、分離超平面定理

序.2　この巻の流れ

章	内容	答える問い
第1章	交換経済とエッジワース・ボックス	一般均衡とは何か、どう計算するか
第2章	超過需要関数	均衡を「方程式の解」としてどう表すか
第3章	均衡の存在	なぜ均衡価格は必ず存在するのか
第4章	厚生経済学の第一基本定理	均衡はなぜ効率的なのか
第5章	厚生経済学の第二基本定理	効率的な配分はなぜ市場で実現できるのか
第6章	コア	市場がなくても、交渉で同じ配分にたどりつくか

補足：この巻で使う前提

第1巻の消費者理論（需要の性質、ワルラス法則、局所非飽和性）、第2巻の生産者理論（利潤最大化）、そして『経済数学 攻略マニュアル』の不動点定理と分離超平面定理を使います。

要点

- 一般均衡理論は、すべての市場を同時に考え、すべての市場を清算する価格体系を分析します。
- 中心となる問いは、均衡の存在、均衡の効率性（第一基本定理）、効率的配分の分権化（第二基本定理）の3つです。

次の章へ　生産のない、最も単純な経済（交換経済）から始めます。

第1章

交換経済とエッジワース・ボックス

ここまでの流れ　序章で、一般均衡理論の3つの問い（存在・効率性・分権化）を見渡しました。
この章の問い　消費者どうしが財を交換するだけの経済で、すべての市場を清算する価格はどう決まるのでしょうか。
この章で分かること　交換経済とワルラス均衡の定義、エッジワース・ボックスの読み方、オファー曲線、コブ＝ダグラス型の経済での均衡の計算。

1.1　交換経済とワルラス均衡

生産がなく、消費者が初めに持っている財（初期保有）を市場で交換するだけの経済を考えます。

定義 1.1（交換経済）
交換経済は、消費者 $i = 1, \dots, I$ のそれぞれについて、消費集合 $\mathbb{R}^L_+$ 上の選好 $\succsim_i$ と初期保有 $\omega_i \in \mathbb{R}^L_+$ を定めたものである。総初期保有を $\bar{\omega} = \sum_i \omega_i$ と書く。

定義 1.2（配分・実行可能性）
各消費者の消費の組 $x = (x_1, \dots, x_I)$（$x_i \in \mathbb{R}^L_+$）を配分という。$\sum_i x_i \le \bar{\omega}$ を満たす配分を実行可能な配分という。

交換経済では、消費者の所得は「初期保有を市場価格で売った額」$p \cdot \omega_i$ です。価格が変わると所得も変わる点が、第1巻の消費者理論（所得 w は一定）との大きな違いです。

定義 1.3（ワルラス均衡）
価格 $p^* \ge 0$（$p^* \neq 0$）と配分 x^* の組が次の2条件を満たすとき、ワルラス均衡（競争均衡）という。

1. （効用最大化）各 i について、x_i^* は予算集合 $B_i(p^*) = \{x_i \in \mathbb{R}^L_+ : p^* \cdot x_i \le p^* \cdot \omega_i\}$ の中で $\succsim_i$ について最も好ましい。
2. （市場清算）$\sum_i x_i^* = \bar{\omega}$。

数式の読み方

- 条件1は、各消費者が価格を与えられたものとして、自分の所得の範囲で最適な組を選んでいることです。
- 条件2は、すべての財 ℓ について「全員の需要の合計＝全員の初期保有の合計」が成り立つことで、L 本の方程式です。
- 予算集合 $B_i(p)$ は、すべての価格を t 倍しても変わらないので、均衡価格は比（相対価格）だけが決まります。$p_2 = 1$ や $\sum_\ell p_\ell = 1$ のように基準化してかまいません。

補足：ここが大事　均衡は「予想と結果の整合性」

ワルラス均衡の2つの条件は、役割がはっきり分かれています。条件1は「各人が価格を与えられたものとして最適に行動する」という個人の合理性、条件2は「その結果が互いに矛盾しない（全員の計画が同時に実現できる）」という整合性です。均衡価格とは、各人が価格を見てばらばらに決めた計画を、ちょうど両立させる価格のことです。第4巻のナッシュ均衡も「各人が相手の戦略を予想して最適に行動し、その予想が当たっている」という同じ構造をもっています。

1.2　エッジワース・ボックス

2人（A、B）・2財の交換経済は、縦横の長さが財の総量 $\bar\omega_1$、$\bar\omega_2$ に等しい箱の中に描けます。左下の原点 O_A から消費者 A の消費を、右上の原点 O_B から逆向きに消費者 B の消費を測ります。

数式の読み方：箱の中の1点の意味

- 箱の中の1点 (x_{A1}, x_{A2}) を決めると、B の消費は $(\bar\omega_1 - x_{A1},\ \bar\omega_2 - x_{A2})$ と自動的に決まります。したがって、箱の中の点は「財をちょうど使い切る実行可能な配分」と1対1に対応します。
- 初期保有も箱の中の1点 ω で表せます。
- 価格 p のもとで、2人の予算線はどちらも点 ω を通り、傾き $-p_1/p_2$ の同じ直線になります。A はその左下側、B は右上側を買うことができます。

1.3　オファー曲線と均衡

価格をいろいろに変えたとき、消費者の需要が描く軌跡を考えます。

定義 1.4（オファー曲線）

価格 p を動かしたときの、消費者 i の需要 $x_i(p, p\cdot\omega_i)$ の軌跡を、消費者 i のオファー曲線という。

エッジワース・ボックスでは、ワルラス均衡は2人のオファー曲線の（ω 以外の）交点です。交点では、同じ価格のもとで A と B が箱の中の同じ点を需要しているので、市場が清算しています。

1.4 コブ＝ダグラス型の経済

消費者 i の効用関数を $u_i = x_{i1}^{\alpha_i} x_{i2}^{1-\alpha_i}$ とし、$p_2 = 1$、$p_1 = p$ と基準化します。

計算例：均衡価格の一般式

消費者 i の所得は $w_i = p\omega_{i1} + \omega_{i2}$ で、財1の需要は $x_{i1} = \alpha_i w_i / p$ です（第1巻第3章）。財1の市場清算条件は

$$\sum_i \frac{\alpha_i(p\,\omega_{i1} + \omega_{i2})}{p} = \sum_i \omega_{i1} \qquad \text{（需要の合計＝初期保有の合計）}$$

$$\sum_i \alpha_i(p\,\omega_{i1} + \omega_{i2}) = p\sum_i \omega_{i1} \qquad \text{（両辺に } p \text{ をかける）}$$

$$p\sum_i (1-\alpha_i)\,\omega_{i1} = \sum_i \alpha_i\,\omega_{i2} \qquad \text{（} p \text{ を含む項を右辺にまとめる）}$$

なので、均衡価格は

$$p^* = \frac{\sum_i \alpha_i\,\omega_{i2}}{\sum_i (1-\alpha_i)\,\omega_{i1}} \tag{1.1}$$

です。財2の市場は、ワルラス法則（第2章）により自動的に清算します。

数式の読み方：均衡価格の読み方

- 分子は「財2の保有者が財1に向ける支出」、分母は「財1の保有者が財2に向ける支出（を財1の量で測ったもの）」です。財1を欲しがる人が財2を多く持っているほど、財1は高くなります。

補足：ここが大事　初期保有があるときのスルツキー方程式

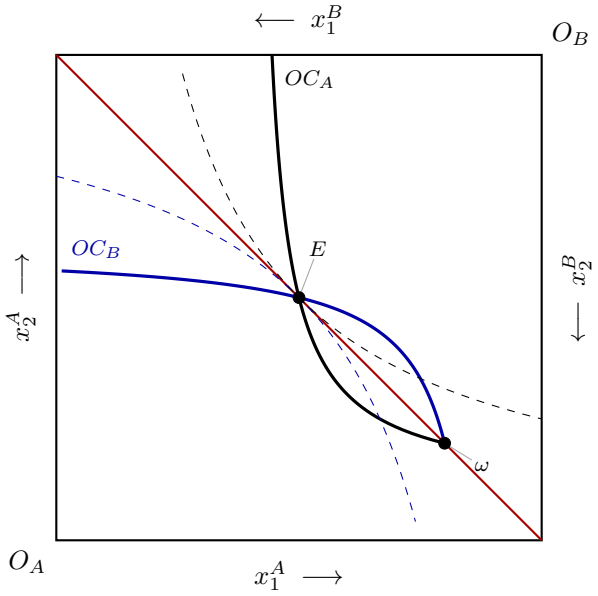
交換経済では所得 $w_i = p \cdot \omega_i$ が価格に依存するので、第1巻のスルツキー方程式に「初期保有の価値が変わる効果」が加わります。所得を通じた効果を含めた需要 $x_\ell(p, p\cdot\omega)$ を p_k で微分すると

$$\frac{dx_\ell}{dp_k} = \frac{\partial h_\ell}{\partial p_k} - (x_k - \omega_k)\frac{\partial x_\ell}{\partial w}$$

となります（第1巻の式に $\omega_k\,\partial x_\ell/\partial w$ が加わる）。財 k の売り手（$x_k < \omega_k$）にとっては、財 k の値上がりは所得の増加なので、所得効果の符号が逆になります。労働供給（労働時間を売る）や貯蓄の分析で、賃金や利子率の上昇が供給を減らしうるのは、この効果のためです。

以下、この巻の数値例では $\alpha_A = \alpha_B = \frac{1}{2}$、$\omega_A = (8,2)$、$\omega_B = (2,8)$ を使います。式 (1.1) から $p^* = (\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 8)/(\frac{1}{2}\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 2) = 1$ で、均衡配分は $x_A^* = x_B^* = (5,5)$ です。

図 1.1　エッジワース・ボックスとオファー曲線



$u_i = x_{i1}^{1/2}x_{i2}^{1/2}$、$\omega_A = (8,2)$、$\omega_B = (2,8)$。$A$ のオファー曲線は $(4 + 1/p,\ 4p + 1)$、B のオファー曲線は（A の座標で）$(9 - 4/p,\ 6 - p)$。赤い直線は均衡価格 $p^* = 1$ の予算線、破線は $E = (5,5)$ を通る無差別曲線。

図の読み方

1. 黒い曲線は A のオファー曲線（OC_A）、青い曲線は B のオファー曲線（OC_B）です。どちらも、価格が初期保有での限界代替率に等しいとき ω を通ります。

2. 2本のオファー曲線は点 $E = (5, 5)$ で交わります。このとき価格は $p^* = 1$ で、赤い予算線は ω と E を通ります。

3. 点 E では、2人の無差別曲線（破線）がどちらも予算線に接しているので、2人とも効用を最大化しています。しかも同じ点なので、市場が清算しています。

4. 価格が p^* より高いと、A が売りたい財1の量が B が買いたい量を上回り、財1は売れ残ります。逆も同様です。

発展：生産のある経済

生産を含む経済では、企業 $j = 1, \ldots, J$ の生産集合 Y_j と、消費者 i が企業 j の利潤から受け取る割合（株式保有比率）θ_{ij}（$\sum_i \theta_{ij} = 1$）を加えます。消費者 i の所得は $p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij}\, p \cdot y_j$ となり、ワルラス均衡では各企業が利潤を最大化し、市場清算条件は $\sum_i x_i = \bar{\omega} + \sum_j y_j$ になります（私有経済）。この巻の主な結果は、生産のある経済にも拡張できます。

補足：この章の知識が生きる場面

- エッジワース・ボックス → 第4〜6章の効率性・第二基本定理・コアの図による理解。
- 初期保有つきの需要 → 労働供給、異時点間の消費と貯蓄、国際貿易（交易条件の変化の効果）。
- 均衡価格の計算 → 計算可能一般均衡（CGE）モデル、マクロ経済学の動学的一般均衡モデル。

要点

- 交換経済のワルラス均衡は、全員の効用最大化と全市場の清算という2条件で定義されます。
- 交換経済では所得が初期保有の価値 $p \cdot \omega_i$ なので、価格が所得を通じても需要に影響します。
- エッジワース・ボックスでは、均衡は2人のオファー曲線の交点で、2人の無差別曲線が同じ予算線に接する点です。
- コブ＝ダグラス型の経済では、均衡価格は式 (1.1) で求められます。

次の章へ　次の章では、均衡の条件を「超過需要がゼロ」という方程式にまとめ、その性質を調べます。

大学院とのつながり　計算可能一般均衡（CGE）モデルは、この章の方法を多部門・多国に広げ、政策の効果を数値で分析する手法です。

第2章

超過需要関数

ここまでの流れ　前の章で、交換経済のワルラス均衡を定義し、エッジワース・ボックスで均衡を見ました。
この章の問い　均衡の条件を一つの方程式にまとめると、その方程式はどのような性質をもつのでしょうか。
この章で分かること　超過需要関数の定義と5つの性質（連続性・0次同次性・ワルラス法則・下に有界・境界条件）、価格の基準化、超過需要関数の形についての限界（SMD定理）。

2.1　超過需要関数

この章から第3章までは、各消費者の選好について次を仮定します。

定義 2.1（標準的な仮定）
各 $\succsim_i$ は合理的、連続、狭義凸、強単調であり、総初期保有は $\bar{\omega} \gg 0$、各消費者の初期保有は $\omega_i \geq 0$、$\omega_i \neq 0$ とする。

狭義凸性から需要は一つに決まるので、価格 $p \gg 0$ のもとでの消費者 i の需要を $x_i(p) = x_i(p, p\cdot\omega_i)$ と書きます。

定義 2.2（超過需要関数）

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} \bigl(x_i(p) - \omega_i\bigr) \qquad (p \gg 0) \tag{2.1}$$

を（総）超過需要関数という。

数式の読み方

- $z_\ell(p) > 0$ なら財 ℓ は品不足、$z_\ell(p) < 0$ なら売れ残りです。
- 強単調な選好のもとでは、すべての財に正の価格がつく均衡だけを考えればよいので、ワルラス均衡価格は $z(p^*) = 0$ を満たす $p^* \gg 0$ と同じです（均衡配分は $x_i(p^*)$）。
- こうして、均衡を求める問題は「L 本の方程式 $z(p) = 0$ を解く」問題に置き換わります。

2.2 超過需要関数の性質

定理 2.3（超過需要関数の性質）

標準的な仮定のもとで、超過需要関数 $z : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}^L$ は次の性質をもつ。

1. （連続性）z は連続である。
2. （0次同次性）任意の $t > 0$ について $z(tp) = z(p)$。
3. （ワルラス法則）任意の $p \gg 0$ について $p \cdot z(p) = 0$。
4. （下に有界）ある $s > 0$ が存在して、すべての p と ℓ について $z_\ell(p) > -s$。
5. （境界条件）$p^n \gg 0$ が、ある成分が 0 である $p \neq 0$ に収束するならば、$\max_\ell z_\ell(p^n) \to \infty$。

証明

ステップ1　連続性

各消費者の需要 $x_i(p, w)$ はベルジュの最大値定理（と需要の一意性）から連続で、所得 $p \cdot \omega_i$ も p の連続関数なので、その合成と和である z も連続です。

ステップ2　0次同次性

予算集合 $B_i(tp) = \{x : (tp) \cdot x \leq (tp) \cdot \omega_i\} = B_i(p)$ なので、需要は変わりません。

ステップ3　ワルラス法則

強単調性から局所非飽和性が従うので、各消費者は予算を使い切ります（第1巻第3

章）。

$$
\begin{aligned}
p \cdot z(p) &= \sum_i \bigl(p \cdot x_i(p) - p \cdot \omega_i\bigr) && \text{（定義）} \\
&= 0 && \text{（各項で } p \cdot x_i(p) = p \cdot \omega_i\text{）}
\end{aligned}
$$

ステップ4　下に有界

需要は非負なので $z_\ell(p) \geq -\sum_i \omega_{i\ell} = -\bar{\omega}_\ell$ です。$s > \max_\ell \bar{\omega}_\ell$ とすればよいでしょう。

ステップ5　境界条件（考え方）

$p^n \to p$ で $p_\ell = 0$ とします。$p \neq 0$ で $\bar{\omega} \gg 0$ なので、ある消費者 i の所得 $p \cdot \omega_i$ は正の値に近づきます。その消費者にとって財 ℓ はほとんど無料になるので、強単調性から財 ℓ（または価格が 0 に近い財のどれか）の需要は限りなく大きくなります。厳密には、仮に $x_i(p^n)$ が有界なら収束する部分列がとれ、その極限が極限価格での最適な組になるはずですが、価格 0 の財をさらに増やせば強単調性からより良くなるので矛盾する、という背理法で示します。　□

数式の読み方：各性質の役割

- 0次同次性から、価格は基準化できます。よく使うのは、$p_L = 1$ とする方法（第 L 財を価値尺度財にする）と、価格単体 $\Delta = \{p \geq 0 : \sum_\ell p_\ell = 1\}$ に制限する方法です。
- ワルラス法則から、$L-1$ 個の市場が清算すれば残りの1つも清算します。基準化で未知数が $L-1$ 個に減り、独立な方程式も $L-1$ 本になるので、方程式と未知数の数がつりあいます。
- 境界条件は、どの財も無料にはなりえない（価格が 0 に近づくと超過需要が爆発する）ことを表し、第3章の存在証明で均衡価格が境界に行かないことを保証します。

補足：ここが大事　5つの性質は、どの仮定から来ているか

超過需要関数の性質	根拠となる仮定・定理
連続性	選好の連続性と狭義凸性、ベルジュの最大値定理
0次同次性	予算集合が価格の定数倍で変わらないこと
ワルラス法則	局所非飽和性（予算を使い切る）
下に有界	消費は非負
境界条件	強単調性と総初期保有 $\bar{\omega} \gg 0$

第3章の存在証明はこの5つの性質だけを使うので、個々の消費者の選好の仮定は、すべてこの表を通じて存在定理に効いてきます。どれか一つの仮定を外すとどの性質が崩れ、存在証明のどこが成り立たなくなるかを考えると、仮定の意味がよく分かります。

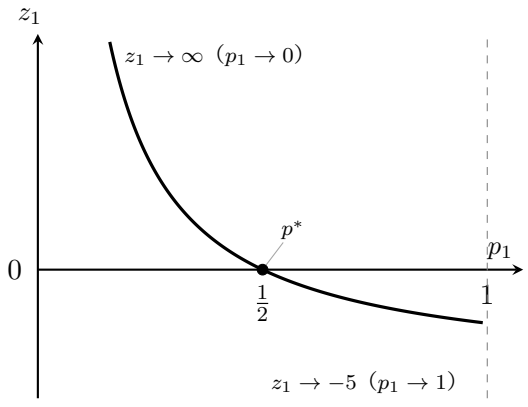
計算例：コブ＝ダグラス型の超過需要関数

前の章の例（$\alpha_A = \alpha_B = \frac{1}{2}$、$\omega_A = (8,2)$、$\omega_B = (2,8)$）で、$p = (p_1, p_2)$ のまま計算すると

$$z_1(p) = \frac{\frac{1}{2}(8p_1 + 2p_2) + \frac{1}{2}(2p_1 + 8p_2)}{p_1} - 10 = \frac{5(p_2 - p_1)}{p_1}$$
$$z_2(p) = \frac{\frac{1}{2}(8p_1 + 2p_2) + \frac{1}{2}(2p_1 + 8p_2)}{p_2} - 10 = \frac{5(p_1 - p_2)}{p_2}$$

です。$p_1 z_1 + p_2 z_2 = 5(p_2 - p_1) + 5(p_1 - p_2) = 0$ でワルラス法則が成り立ち、$p_1 \to 0$ で $z_1 \to \infty$ と境界条件も成り立ちます。均衡は $p_1 = p_2$ です。

図 2.1　超過需要関数と均衡価格



価格単体上で $p_2 = 1 - p_1$ とおき、$z_1 = 5(1 - 2p_1)/p_1$ を描いた。

図の読み方

1. 横軸は価格単体上の財1の価格 p_1（財2の価格は $1 - p_1$）です。
2. p_1 が 0 に近づくと財1の超過需要は限りなく大きくなり（境界条件）、p_1 が 1 に近づくと（財2がほぼ無料になり、財2の超過需要が爆発するので）ワルラス法則により財1の超過需要は負になります。
3. 連続な曲線が正から負へ移るので、途中で必ず 0 を横切ります。その点 $p_1^* = \frac{1}{2}$（つまり $p_1 = p_2$）が均衡価格です。2財の場合の存在証明は、この中間値の定理の議論そのものです（第3章）。

発展：ゾンネンシャイン＝マンテル＝ドブリューの定理

超過需要関数について、上の5つの性質以外に一般に言えることはほとんどありません。実際、L 財の経済で、連続・0次同次・ワルラス法則を満たす任意の関数は、（価格がすべて一定以上の範囲では）ある交換経済（少なくとも L 人の消費者）の超過需要関数として実現できることが知られています。このため、個々の消費者がどれほど「行儀よく」ても、均衡が一つとは限らず、価格調整過程が安定であるとも限りません。均衡の一意性や比較静学を示すには、粗代替性などの追加の仮定が必要になります。

補足：この章の知識が生きる場面

- 超過需要関数の性質 → 均衡の存在証明（第3章）。
- SMD定理（発展）→ 均衡の一意性や安定性には追加の仮定が必要であること。マクロ経済学で代表的消費者を仮定することの意味を考える手がかり。
- 価格の基準化（価値尺度財）→ 実物モデルでは相対価格しか決まらないこと、貨幣の導入の問題。

要点

- 均衡価格は、超過需要関数 $z(p) = \sum_i (x_i(p) - \omega_i)$ の零点 $z(p^*) = 0$ です。
- 超過需要関数は、連続・0次同次・ワルラス法則・下に有界・境界条件を満たします。
- 0次同次性で価格を基準化し、ワルラス法則で方程式を1本減らせるので、未知数と方程式の数がつりあいます。
- この5つの性質以外の制約はほとんどないので、一意性や安定性は一般には保証されません。

次の章へ　次の章では、この5つの性質だけを使って、均衡価格が必ず存在することを、角谷の不動点定理で証明します。

大学院とのつながり　一般均衡の数値計算では、超過需要関数の零点を求める問題として均衡を解きます。

第3章

均衡の存在

ここまでの流れ　前の章で、均衡価格は超過需要関数の零点 $z(p^*)=0$ であり、z は5つの性質を満たすことを学びました。
この章の問い　超過需要関数の5つの性質だけから、均衡価格が必ず存在することを示せるでしょうか。
この章で分かること　2財の場合の存在証明（中間値の定理）、一般の場合の存在証明（角谷の不動点定理）、証明の各ステップでどの性質を使うか。

3.1　なぜ存在証明が必要なのか

均衡は $L-1$ 本の（独立な）方程式と $L-1$ 個の未知数の問題でした。しかし「方程式と未知数の数が等しい」ことは、解の存在を保証しません。たとえば $x^2+1=0$ は1本の方程式と1個の未知数ですが、実数の解はありません。また、価格は非負でなければならないので、解が負の価格になってしまっては意味がありません。

均衡が存在しないなら、均衡の効率性を論じても意味がありません。存在定理は、一般均衡理論全体の土台なのです。

3.2　2財の場合

まず、図 2.1 で見た議論を正確に述べます。

命題 3.1（2財の経済での存在）
$L=2$ で、超過需要関数が第2章の5つの性質を満たすならば、$z(p^*)=0$ となる $p^*\gg 0$ が存在する。

証明

方針　価格を $p=(t,1-t)$（$0<t<1$）と基準化し、$g(t)=z_1(t,1-t)$ に中間値の定理を使います。

ステップ1　t が 0 に近いとき

$t\to 0$ のとき価格は $(0,1)$ に近づくので、境界条件から $\max\{z_1,z_2\}\to\infty$ です。z_2 は財2の価格が 1 に近く、需要が有界なので大きくなれず、$z_1\to\infty$ です。したがって、t が十分小さいと $g(t)>0$ です。

ステップ2　t が 1 に近いとき

同様に $t \to 1$ では $z_2 \to \infty$ です。ワルラス法則 $tz_1 + (1-t)z_2 = 0$ から $z_1 = -(1-t)z_2/t$ で、$z_2 > 0$ なら $z_1 < 0$ です。したがって、t が 1 に十分近いと $g(t) < 0$ です。

ステップ3　中間値の定理

g は連続なので、$g(t^*) = 0$ となる $t^* \in (0,1)$ があります。$z_1(p^*) = 0$ とワルラス法則から $(1-t^*)z_2(p^*) = 0$ で、$1 - t^* > 0$ なので $z_2(p^*) = 0$ です。　□

3.3　一般の場合：角谷の不動点定理による証明

財が3種類以上になると、中間値の定理は使えません。そこで不動点定理を使います。

定理 3.2（ワルラス均衡の存在）

超過需要関数 $z : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}^L$ が第2章の5つの性質を満たすならば、$z(p^*) = 0$ となる $p^* \gg 0$ が存在する。

証明のアイデア

価格単体 $\Delta = \{p \geq 0 : \sum_\ell p_\ell = 1\}$ からそれ自身への対応 f を、「超過需要が最も大きい財に価格の重みを集中させる」ように作ります（境界上では「価格が 0 の財に重みを集中させる」）。f の不動点 $p^* \in f(p^*)$ では、p^* が重みを置いているすべての財で超過需要が最大になっています。境界条件から p^* は内点（すべての財に重みがある）で、すべての財の超過需要が等しく、ワルラス法則からそれは 0 です。

証明　Δ の内部を $\Delta^\circ = \{p \in \Delta : p \gg 0\}$、境界を $\partial\Delta = \Delta \setminus \Delta^\circ$ と書きます。0次同次性から、z を Δ° 上だけで考えれば十分です。

ステップ1　対応 f を定める

$f : \Delta \rightrightarrows \Delta$ を次のように定めます。

$$f(p) = \{q \in \Delta : z(p) \cdot q \geq z(p) \cdot q' \text{ がすべての } q' \in \Delta \text{ で成り立つ}\} \qquad (p \in \Delta^\circ)$$

$$f(p) = \{q \in \Delta : p \cdot q = 0\} \qquad (p \in \partial\Delta)$$

内点では、$f(p)$ は「超過需要が最大の財だけに重みを置く価格」の集合です（$z(p) \cdot q$ は q による $z_\ell(p)$ の加重平均で、最大の z_ℓ にだけ重みを置くと最大になるから）。境界では、$f(p)$ は「$p_\ell = 0$ の財だけに重みを置く価格」の集合です。

ステップ2　値は空でない凸集合

内点では、$f(p)$ はコンパクト集合 Δ 上の連続（線形）関数の最大化の解なので空でな

く、線形関数の最大点の集合なので凸です。境界では、$p_\ell = 0$ となる ℓ があるので、その財だけに重み 1 を置く q が $f(p)$ に入り空でなく、条件 $p \cdot q = 0$ は線形なので凸です。

ステップ3　グラフは閉集合

$p^n \to p$、$q^n \in f(p^n)$、$q^n \to q$ として、$q \in f(p)$ を示します。

(a) $p \in \Delta^\circ$ の場合：十分大きな n で $p^n \in \Delta^\circ$ です。$z(p^n) \cdot q^n \geq z(p^n) \cdot q'$ で $n \to \infty$ とすると、z の連続性から $z(p) \cdot q \geq z(p) \cdot q'$ なので $q \in f(p)$ です。

(b) $p \in \partial\Delta$ の場合：$p \cdot q = 0$、つまり「$p_\ell > 0$ ならば $q_\ell = 0$」を示します。$p_\ell > 0$ とします。$p^n \in \partial\Delta$ なら、十分大きな n で $p^n_\ell > 0$ なので、f の定義から $q^n_\ell = 0$ です。$p^n \in \Delta^\circ$ なら、財 ℓ の価格は $p_\ell > 0$ に近く、各消費者の所得は $p^n \cdot \omega_i \leq \sum_k \bar{\omega}_k$ なので、$z_\ell(p^n) \leq \sum_k \bar{\omega}_k / p^n_\ell$ は上に有界です。一方、境界条件から $\max_k z_k(p^n) \to \infty$ なので、十分大きな n で財 ℓ は超過需要が最大の財ではなく、$q^n_\ell = 0$ です。どちらの場合も $q_\ell = \lim q^n_\ell = 0$ です。

ステップ4　角谷の不動点定理を使う

Δ は空でないコンパクト凸集合で、f はステップ2と3の条件を満たすので、不動点 $p^* \in f(p^*)$ があります。

ステップ5　不動点は内点

$p^* \in \partial\Delta$ だとすると、f の定義から $p^* \cdot p^* = \sum_\ell (p^*_\ell)^2 = 0$ となりますが、$p^* \in \Delta$ は 0 でないので矛盾です。よって $p^* \in \Delta^\circ$ です。

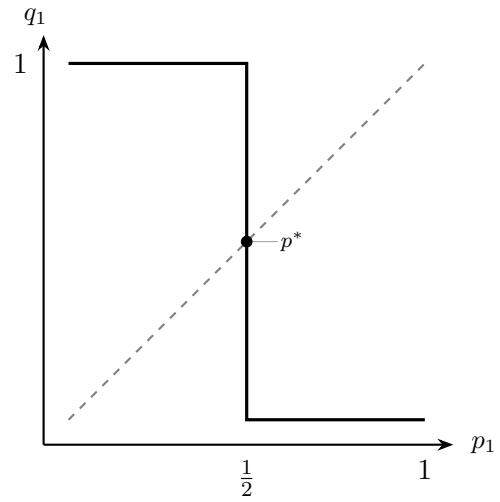
ステップ6　超過需要は 0

$p^* \in \Delta^\circ$ なので、すべての ℓ で $p^*_\ell > 0$ です。$p^* \in f(p^*)$ は、p^* が重みを置く財（すべての財）で $z_\ell(p^*)$ が最大であることを意味するので、ある数 m について $z_\ell(p^*) = m$（すべての ℓ）です。ワルラス法則から

$$
\begin{aligned}
0 &= p^* \cdot z(p^*) && \text{（ワルラス法則）} \\
&= m \sum_\ell p^*_\ell = m && \left(z_\ell = m、\ \sum_\ell p^*_\ell = 1\right)
\end{aligned}
$$

なので $m = 0$、つまり $z(p^*) = 0$ です。 □

図 3.1　2財の場合の対応 f と不動点



第2章の例。価格単体を $p=(p_1,1-p_1)$、f の値を $q=(q_1,1-q_1)$ で表した。$p_1<\frac{1}{2}$ では $z_1>0>z_2$ なので $q_1=1$、$p_1>\frac{1}{2}$ では $q_1=0$、$p_1=\frac{1}{2}$ では $z=0$ なので $q_1\in[0,1]$。

図の読み方

1. 黒い太線が対応 f のグラフです。財1の価格が安すぎる（$p_1<\frac{1}{2}$）と財1が品不足なので、f は「財1にすべての重みを置く」価格 $q_1=1$ を返します。高すぎると逆になります。

2. 均衡価格 $p_1=\frac{1}{2}$ では超過需要がすべて 0 なので、どの q も同じく「最大」で、f の値は区間 $[0,1]$ 全体になります。値が凸集合なので、グラフは途切れずにつながっています。

3. 45度線との交点が不動点で、それが均衡価格 p^* です。境界の $p_1=0$、$p_1=1$ では f は「価格 0 の財に重みを置く」ので、境界に不動点はありません。

数式の読み方：証明で使った性質の一覧

- 連続性：ステップ3(a)で、グラフが閉じていることを示すのに使いました。
- 0次同次性：価格を単体 Δ に制限するのに使いました。
- ワルラス法則：ステップ6で、超過需要が等しいことから 0 であることを導くのに使いました。
- 下に有界と境界条件：ステップ3(b)で、境界での振る舞いを制御し、不動点が境界に来ないようにするのに使いました。
- 角谷の不動点定理の仮定（コンパクト凸集合、空でない凸な値、閉グラフ）は、ステップ2〜4で確かめました。

補足：ここが大事　存在証明から持ち帰るべきもの

この証明は、大学院ミクロの存在証明の典型的な型をすべて含んでいます。

1. コンパクトな凸集合を選ぶ（価格単体 Δ）。
2. 不動点が均衡になるような対応を作る（超過需要が最大の財に重みを置く）。
3. 不動点定理の仮定を確かめる（凸な値、閉グラフ）。境界でのふるまいは、経済学の仮定（境界条件）で制御する。
4. 不動点を経済学の言葉に戻す（ワルラス法則で超過需要が 0）。

新しいモデル（生産のある経済、不完備市場、外部性のある経済など）で均衡の存在を示すときも、この4つのステップのどこを修正すればよいかを考えるのが出発点になります。

補足：凸性の役割

この証明には個々の消費者の選好の凸性が直接は出てきませんが、超過需要関数の連続性（ステップ1の前提）に必要でした。選好が凸でないと需要が「飛ぶ」ことがあり、超過需要関数が連続でなくなって、均衡が存在しない場合があります。ただし消費者の数が非常に多いと、個々の非凸性の影響は小さくなり、「近似的な均衡」が存在することが知られています（シャプリー＝フォークマンの補題）。

発展：生産のある経済での存在

生産のある経済でも、生産集合が閉凸集合で、無活動の可能性などを満たせば、均衡が存在します。供給は対応になりうるので、超過需要も対応 $z(p)$ になり、角谷の不動点定理を使って、$z(p^*) \leq 0$ となる p^*（自由処分を仮定）の存在を示します。これがアロー＝ドブリューの存在定理です。

補足：この章の知識が生きる場面

- 存在証明の構造 → ナッシュ均衡の存在証明（第4巻第3章）とまったく同じ型。
- 凸性と存在 → 非凸な経済（収穫逓増、離散的な財）で均衡が存在しない問題と、多数の消費者による近似（シャプリー＝フォークマン）。
- 不動点の計算 → 計算可能一般均衡モデルの数値解法（スカーフのアルゴリズム）。

要点

- 方程式と未知数の数が等しくても解が存在するとは限らないので、存在定理が必要です。
- 2財の場合は、境界条件・ワルラス法則・連続性から中間値の定理で示せます。
- 一般の場合は、「超過需要が最大の財に重みを置く」対応を作り、角谷の不動点定理を使います。
- 境界条件は不動点が境界に来ないことを、ワルラス法則は不動点で超過需要が 0 になることを保証します。

次の章へ　均衡が存在することが分かったので、次の章では、その均衡配分が効率的であること（厚生経済学の第一基本定理）を示します。

大学院とのつながり　この章の証明の構造（最適反応を表す対応を作り、角谷の不動点定理を使う）は、第4巻のナッシュ均衡の存在証明とまったく同じです。

第4章

厚生経済学の第一基本定理

ここまでの流れ　前の章で、標準的な仮定のもとでワルラス均衡が存在することを示しました。
この章の問い　市場均衡の配分は、社会的に見て「無駄のない」配分になっているのでしょうか。
この章で分かること　パレート効率性と契約曲線、厚生経済学の第一基本定理とその証明（交換経済・生産のある経済）、定理が成り立たない場合。

4.1　パレート効率性

「無駄がない」ことを、次のように定義します。

定義 4.1（パレート改善・パレート効率性）
実行可能な配分 x' が配分 x をパレート改善するとは、すべての i について $x'_i \succsim_i x_i$ であり、ある i について $x'_i \succ_i x_i$ であることをいう。実行可能な配分 x をパレート改善する実行可能な配分が存在しないとき、x はパレート効率的であるという。

数式の読み方

- パレート効率的な配分では、誰かの状況を良くするには、必ず他の誰かの状況を悪くしなければなりません。
- パレート効率性は「公平さ」とは関係がありません。一人がすべての財を持つ配分も（選好が単調なら）パレート効率的です。

定義 4.2（契約曲線）
エッジワース・ボックスの中のパレート効率的な配分の集まりを、契約曲線（パレート集合）という。

内点では、パレート効率的な配分で2人の無差別曲線が接します。接していなければ、2本の無差別曲線の間に「レンズ形」の領域ができ、その中の配分は2人ともにとって良くなるからです。

計算例：例の契約曲線

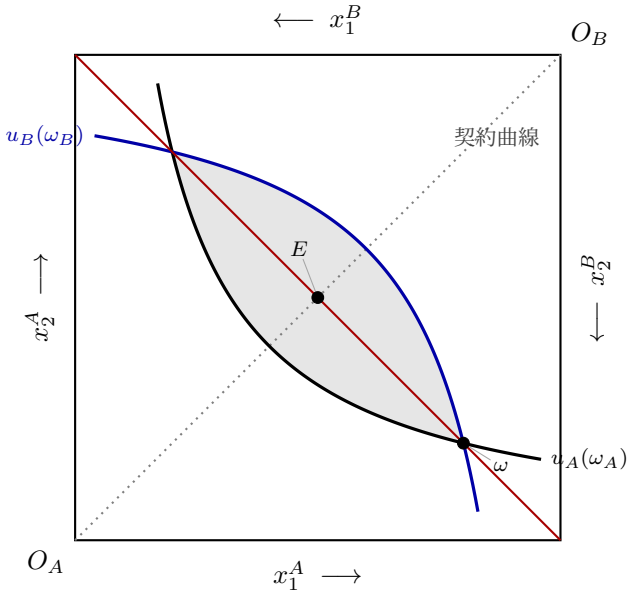
$u_A = u_B = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、総量 $(10, 10)$ の例では、A の限界代替率は x_{A2}/x_{A1}、B の限界代替率は $(10 - x_{A2})/(10 - x_{A1})$ です。2つが等しい条件は

$$x_{A2}(10 - x_{A1}) = x_{A1}(10 - x_{A2}) \qquad \text{（限界代替率を等しくし、分母を払う）}$$

$$x_{A2} = x_{A1} \qquad (10x_{A2} = 10x_{A1})$$

なので、契約曲線は箱の対角線です。

図 4.1　レンズ形の領域と契約曲線



第1章の例。黒は ω を通る A の無差別曲線 $x_{A1}x_{A2} = 16$、青は ω を通る B の無差別曲線 $(10 - x_{A1})(10 - x_{A2}) = 16$。灰色の点線は契約曲線（対角線）、赤い直線は均衡価格の予算線。

図の読み方

1. 初期保有 ω では2人の無差別曲線が交わっていて、間に灰色のレンズ形の領域があります。この領域の配分は、2人ともにとって ω より好ましいので、ω はパレート効率的ではありません。

2. 契約曲線（対角線）上の点では、2人の無差別曲線が接していて、レンズができません。

3. 均衡点 E はレンズの中にあり、しかも契約曲線上にあります。市場での交換は、2人ともを良くし、しかも無駄のない配分にたどりついています。これが第一基本定理の内容です。

4.2 第一基本定理（交換経済）

定理 4.3（厚生経済学の第一基本定理）

すべての消費者の選好が局所非飽和ならば、任意のワルラス均衡配分はパレート効率的である。

証明のアイデア

均衡配分より全員が少なくとも同じだけ好ましい配分は、均衡価格で評価すると、全員にとって予算以上の費用がかかります（そうでなければ均衡で選んでいたはず）。全員の費用を足すと、経済全体の財の価値以上になってしまうので、その配分は実行可能ではありえません。

証明

方針　均衡 (p^*, x^*) をパレート改善する実行可能な配分 x' があると仮定して、矛盾を導きます。

ステップ1　より好ましい組は予算より高い

$x_i' \succ_i x_i^*$ である消費者 i については、$p^* \cdot x_i' > p^* \cdot \omega_i$ です。そうでなければ x_i' は予算内で、x_i^* より好ましい組を選べたことになり、効用最大化に反するからです。

ステップ2　同じくらい好ましい組は予算以上

$x_i' \succsim_i x_i^*$ である消費者 i については、$p^* \cdot x_i' \geq p^* \cdot \omega_i$ です。仮に $p^* \cdot x_i' < p^* \cdot \omega_i$ なら、局所非飽和性から x_i' のすぐ近くに、まだ予算内で x_i' より（したがって x_i^* より）好ましい組があり、効用最大化に反するからです。

ステップ3　足し合わせる

x' はパレート改善なので、全員がステップ2を、少なくとも一人がステップ1を満たします。足し合わせると

$$\sum_i p^* \cdot x_i' > \sum_i p^* \cdot \omega_i \qquad \text{（ステップ1と2の和）}$$

$$p^* \cdot \left(\sum_i x_i' \right) > p^* \cdot \bar{\omega} \qquad \text{（内積の線形性）}$$

です。

ステップ4　実行可能性に矛盾

一方、x' は実行可能なので $\sum_i x_i' \leq \bar{\omega}$ で、$p^* \geq 0$ より $p^* \cdot \sum_i x_i' \leq p^* \cdot \bar{\omega}$ です。これはステップ3に矛盾します。　□

数式の読み方：証明のポイント

- 証明で使った仮定は局所非飽和性だけです。凸性や連続性、微分可能性は一切使っていません。図で「接している」ことを確かめる学部の議論よりも、はるかに一般的です。
- 価格が「より良いものは高い」という情報をすべての消費者に共通の尺度で伝えていることが、効率性の源泉です。

補足：ここが大事　「見えざる手」の正確な意味

第一基本定理は、アダム・スミスの「見えざる手」を正確に述べたものです。各消費者は自分の選好と価格だけを知っていればよく、他人の選好を知る必要はありません。それでも、価格が「どの財がどれだけ貴重か」という情報を全員に伝えるので、結果は無駄のない配分になります。ただし、定理が言っていないことにも注意してください。

- 均衡配分が公平であるとは言っていません（初期保有しだい）。
- 均衡が存在することや、市場がそこにたどり着くことは言っていません（第3章と、安定性の問題）。
- 外部性・公共財・情報の非対称性・価格支配力があるときには成り立ちません（この章の補足）。

4.3　生産のある経済

第1章の発展で述べた私有経済でも、同じ議論が成り立ちます。

定理 4.4（第一基本定理（生産のある経済））

私有経済で、すべての消費者の選好が局所非飽和ならば、ワルラス均衡の配分 (x^*, y^*) はパレート効率的である。すなわち、$\sum_i x'_i \leq \bar{\omega} + \sum_j y'_j$（$y'_j \in Y_j$）を満たす (x', y') で、x^* をパレート改善するものは存在しない。

証明　消費者 i の所得を $w_i = p^* \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij}\, p^* \cdot y^*_j$ とします。交換経済のステップ1〜3と

同じ議論で、x' がパレート改善なら

$$\begin{aligned}
\sum_i p^* \cdot x'_i > \sum_i w_i & \qquad \text{（ステップ1〜3と同じ）} \\
= p^* \cdot \bar{\omega} + \sum_j p^* \cdot y^*_j & \qquad \Big(\sum_i \theta_{ij} = 1\Big) \\
\geq p^* \cdot \bar{\omega} + \sum_j p^* \cdot y'_j & \qquad \text{（各企業の利潤最大化）}
\end{aligned}$$

です。一方、実行可能性から $\sum_i p^* \cdot x'_i \leq p^* \cdot \bar{\omega} + \sum_j p^* \cdot y'_j$ で、矛盾します。 □

4.4 第一基本定理が成り立たない場合

定理の結論は強力ですが、その前提が崩れると成り立ちません。

補足：市場の失敗

- **外部性**：ある人の消費や生産が、価格を通さずに他人の効用や生産に影響する場合（公害など）、各人の選好が自分の消費だけで決まるという前提が崩れます。
- **公共財**：多くの人が同時に消費できる財では、各人の支払意思を合計した価格がつかず、市場は過少供給になります。
- **市場の欠如・不完全情報**：取引すべき財（将来の財や保険など）の市場がないと、均衡は効率的でなくなりえます。
- **価格支配力**：独占などで価格受容の前提が崩れると、効率性は失われます。

発展：局所非飽和性が必要な例

ある消費者が「厚い」無差別曲線（ある範囲の組はすべて無差別）をもち、均衡でその範囲の中の組を予算より安く選んでいると、余った予算分の財を他人に回せば、その人を良くしながら誰も悪くしないことができます。この場合、均衡配分は効率的ではありません。ステップ2は、まさにこの状況を排除するために局所非飽和性を使っています。

補足：この章の知識が生きる場面

- 第一基本定理の前提が崩れる状況 → 公共経済学（外部性、公共財）、情報の経済学（逆選択、モラルハザード）、産業組織論（独占、寡占）。
- パレート効率性の概念 → メカニズムデザイン、交渉理論、契約理論での効率性の基準。
- 証明の論法（より良い配分は均衡価格で高すぎる）→ コアの議論（第6章）、マッチング理論での安定性。

要点

- パレート効率的な配分とは、誰かを良くするには誰かを悪くしなければならない配分です。
- 第一基本定理：局所非飽和性のもとで、ワルラス均衡配分はパレート効率的です。
- 証明は「より好ましい配分は均衡価格で予算より高い」ことを足し合わせて、実行可能性に矛盾させるものです。
- 外部性・公共財・不完全市場・価格支配力があると、定理は成り立ちません。

次の章へ　第一基本定理は「均衡→効率」の方向でした。次の章では逆向き、つまり「どんな効率的配分も、適切な所得の再分配をすれば均衡として実現できるか」を考えます。

大学院とのつながり　公共経済学や情報の経済学の多くは、第一基本定理の前提が崩れる状況を分析する分野だと言えます。

第5章

厚生経済学の第二基本定理

ここまでの流れ　前の章で、ワルラス均衡配分はパレート効率的であること（第一基本定理）を示しました。
この章の問い　社会が望ましいと考える効率的な配分（たとえば、より平等な配分）を、市場の仕組みを使って実現できるでしょうか。
この章で分かること　移転つきの均衡、厚生経済学の第二基本定理とその証明（分離超平面定理）、凸性の役割。

5.1　効率性と公平性

第一基本定理は、市場均衡が効率的であることを保証しますが、どの効率的配分にたどりつくかは初期保有で決まります。初期保有が極端に不平等なら、均衡配分も不平等になりえます。

第二基本定理は、「効率性」と「公平性（分配）」の問題を切り離せることを示します。政府は、望ましい効率的配分を選び、初期保有（所得）を再分配するだけでよく、あとは市場に任せればその配分が実現する、という主張です。

定義 5.1（移転つきの均衡）

価格 p^*、配分 x^*、所得 $(w_1, \dots, w_I)$（$\sum_i w_i = p^* \cdot \bar{\omega}$）の組が次を満たすとき、移転つきのワルラス均衡という。

1. 各 i について、x_i^* は予算集合 $\{x_i \in \mathbb{R}^L_+ : p^* \cdot x_i \le w_i\}$ の中で $\succsim_i$ について最も好ましい。
2. $\sum_i x_i^* = \bar{\omega}$。

数式の読み方

- 所得 w_i は、初期保有の価値 $p^* \cdot \omega_i$ に、政府による移転（一括の税や補助金）$w_i - p^* \cdot \omega_i$ を加えたものと解釈します。移転の合計は 0 です。
- 「一括」とは、移転額が本人の行動によって変わらないことです。消費量に応じた税と違い、相対価格をゆがめません。

5.2　第二基本定理

定理 5.2（厚生経済学の第二基本定理（交換経済））

各消費者の選好が連続・凸・強単調であるとし、x^* を $x_i^* \gg 0$（すべての i）を満たすパレート効率的な配分とする。このとき、ある価格 $p^* \gg 0$ が存在して、(p^*, x^*) と所得 $w_i = p^* \cdot x_i^*$ は移転つきのワルラス均衡である。

証明のアイデア

「x^* より全員が良くなるような配分を作るのに必要な財の総量」の集合 V を考えます。x^* が効率的なので、経済にある総量 $\bar{\omega}$ は V に入りません。選好が凸なら V は凸集合なので、分離超平面定理によって、$\bar{\omega}$ と V を分ける超平面が引けます。その法線ベクトル p^* が求める価格です。V の点は $\bar{\omega}$ より「高い」ので、各消費者にとって x_i^* より良い組は予算より高くなり、x_i^* が最適になります。

証明　各 i について $V_i = \{x_i \in \mathbb{R}^L_+ : x_i \succ_i x_i^*\}$、$V = V_1 + \cdots + V_I = \{\sum_i x_i : x_i \in V_i\}$ とおきます。強単調性とパレート効率性から $\sum_i x_i^* = \bar{\omega}$ です（余りがあれば誰かに配って改善できる）。

ステップ1　V は凸集合

$y, y' \in V_i$ とし、一般性を失わずに $y \succsim_i y'$ とします。選好は凸なので、上方集合 $U(y')$ に入る y, y' の凸結合も $U(y')$ に入り、$\lambda y + (1-\lambda)y' \succsim_i y' \succ_i x_i^*$ です。よって V_i は凸で、凸集合の和 V も凸です。

ステップ2　$\bar{\omega} \notin V$

$\bar{\omega} \in V$ なら、$\sum_i x_i = \bar{\omega}$ で全員が $x_i \succ_i x_i^*$ となる配分があり、x^* のパレート効率性に反します。

ステップ3　分離超平面定理を使う

凸集合 V と1点の集合 $\{\bar{\omega}\}$ は交わらないので、分離超平面定理から、ある $p^* \neq 0$ が存在して

$$p^* \cdot z \geq p^* \cdot \bar{\omega} \qquad (\text{すべての } z \in V) \tag{5.1}$$

です。

ステップ4　$p^* \geq 0$

仮に $p_\ell^* < 0$ とします。$e = (1, \ldots, 1)$、e_ℓ を第 ℓ 単位ベクトル、$\varepsilon > 0$、$t > 0$ として、$z = \bar{\omega} + \varepsilon I e + t e_\ell$ を考えます。$z = \sum_i (x_i^* + \varepsilon e) + t e_\ell$ で、強単調性から各項（te_ℓ は誰か一人に加える）は V_i に入るので $z \in V$ です。しかし $p^* \cdot z = p^* \cdot \bar{\omega} + \varepsilon I\, p^* \cdot e + t p_\ell^*$ は、t を大きくすると式 (5.1) に反します。

ステップ5　より良い組は x_i^* 以上の価値をもつ

消費者 i と $x_i \succ_i x_i^*$ をとります。他の $j \neq i$ については、強単調性から $x_j^* + \varepsilon e \in V_j$ です。その和は V に入るので、式 (5.1) より

$$p^* \cdot x_i + \sum_{j \neq i} p^* \cdot x_j^* + (I-1)\varepsilon\, p^* \cdot e \geq \sum_j p^* \cdot x_j^* \qquad \text{（式 (5.1)、} \bar{\omega} = \sum_j x_j^*\text{）}$$

$$p^* \cdot x_i \geq p^* \cdot x_i^* - (I-1)\varepsilon\, p^* \cdot e \qquad \text{（共通の項を消去）}$$

で、$\varepsilon \to 0$ とすると $p^* \cdot x_i \geq p^* \cdot x_i^* = w_i$ です。

ステップ6　より良い組は予算より高い

実は強い不等号 $p^* \cdot x_i > w_i$ が成り立ちます。$p^* \geq 0$、$p^* \neq 0$、$x_i^* \gg 0$ なので $w_i = p^* \cdot x_i^* > 0$ です。仮に $x_i \succ_i x_i^*$ かつ $p^* \cdot x_i = w_i$ だとすると、$t < 1$ を 1 に十分近くとれば、連続性から $tx_i \succ_i x_i^*$ のままで、$p^* \cdot (tx_i) = t\, w_i < w_i$ となり、ステップ5に反します。したがって、予算集合の中に x_i^* より好ましい組はなく、x_i^* は所得 w_i のもとでの最適な組です。

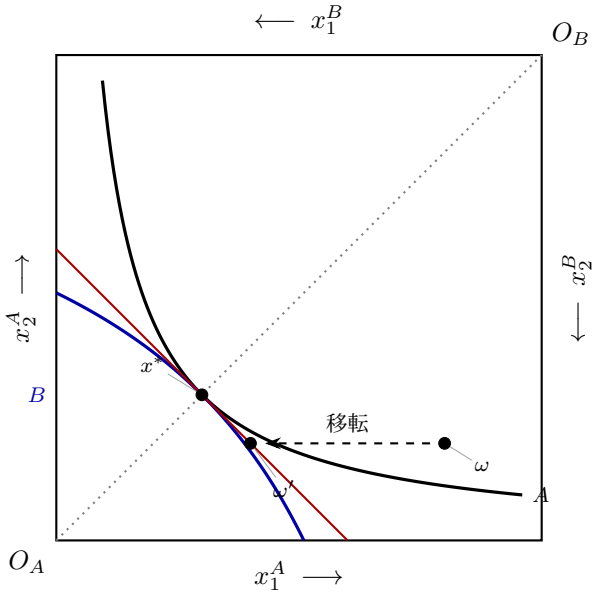
ステップ7　$p^* \gg 0$

ある $p_\ell^* = 0$ なら、強単調性から $x_i^* + e_\ell \succ_i x_i^*$ で、その費用は $p^* \cdot x_i^* = w_i$ のままなので、ステップ6に反します。よって $p^* \gg 0$ です。市場清算 $\sum_i x_i^* = \bar{\omega}$ は最初に確かめたので、(p^*, x^*, w) は移転つきのワルラス均衡です。　□

数式の読み方：各ステップで使った仮定

- 凸性：ステップ1。分離超平面定理を使うための、最も本質的な仮定です。
- 強単調性：ステップ4と5（ベクトルを少し足しても「より良い」まま）と、ステップ7（価格が正）。
- 連続性と $x_i^* \gg 0$：ステップ6。「予算ちょうど」の組から少し減らしても、より良いままにするのに使いました。
- パレート効率性：ステップ2。$\bar{\omega}$ が V の外にあることを保証します。

図 5.1　第二基本定理：移転による効率的配分の実現



第1章の例で、契約曲線上の $x^* = (3,3)$ を目標とする。A の無差別曲線 $x_{A1}x_{A2} = 9$ と B の無差別曲線 $(10 - x_{A1})(10 - x_{A2}) = 49$ は x^* で接し、共通の接線（赤）の傾きから $p^* = (1,1)$。財1を4単位 A から B へ移転して初期保有を $\omega' = (4,2)$ にすると、予算線 $x_{A1} + x_{A2} = 6$ が x^* を通る。

図の読み方

1. 初期保有 ω のまま市場に任せると、均衡は第1章の $E = (5,5)$ になり、$x^* = (3,3)$ には到達しません。

2. x^* では2人の無差別曲線が接しており（パレート効率的）、共通の接線が2人の上方集合を分ける直線です。その傾きが価格 p^* を与えます。これが分離超平面定理の役割です。

3. 財1を4単位 A から B に移転すると、新しい初期保有 ω' は接線上に来ます。このとき価格 p^* のもとで2人とも x^* を選び、市場は清算します。

補足：ここが大事　分離超平面が「価格」を生み出す

第二基本定理の証明で最も大切なのは、価格が「外から与えられる」のではなく、効率的な配分から「作り出される」ことです。効率的な配分では「全員がより良くなる配分に必要な総量」と「経済にある総量」が重ならず、凸性のおかげでその間に超平面を引けます。その超平面の傾きこそが、効率的な配分を支える価格です。第2巻第5章の「効率的な生産を支える価格」や、第1巻第6章の「支出関数から選好を復元する」議論も、同じ発想に基づいています。

補足：凸性がないと

選好が凸でないと、効率的な配分で2人の無差別曲線が接していても、一方の消費者が同じ予算線上の別の点をより好むことがあります。その場合、どんな価格と移転でもその配分を均衡として実現できません。第一基本定理が凸性を必要としなかったのと対照的に、第二基本定理では凸性が本質的です。

発展：生産のある経済と実際の政策

生産のある経済では、生産集合も凸であることを仮定し、総生産集合と「より良い配分に必要な総量」の集合を分離します。第2巻第5章の「効率的な生産は利潤最大化で実現できる」はその生産部分です。なお、現実の政府は一括移転に必要な情報（各人の選好や能力）を持たないので、所得税のような行動に依存する税を使わざるをえず、効率性と公平性のトレードオフが生じます。これは最適課税論の出発点です。

補足：この章の知識が生きる場面

- 効率性と分配の分離 → 公共経済学の最適課税論（一括移転が使えないときのトレードオフ）。
- 分離超平面による価格の構成 → 双対性の理論、線形計画法のシャドー・プライス、資産価格理論（無裁定と状態価格の存在）。
- 凸性の役割 → 非凸な経済での価格メカニズムの限界、規模の経済と価格規制。

要点

- 第二基本定理：選好が連続・凸・強単調なら、どの（内点の）パレート効率的配分も、一括移転と市場の組み合わせで均衡として実現できます。
- 証明では、「より良い配分に必要な総量」の凸集合と総初期保有を、分離超平面定理で分け、その法線ベクトルを価格とします。
- 凸性は第二基本定理に本質的で、効率性と分配の問題を切り離すことを可能にします。

次の章へ　最後の章では、価格を使わずに、人々が自由に交渉して到達する配分（コア）を考え、それがワルラス均衡とどう関係するかを学びます。

大学院とのつながり　第二基本定理の考え方は、メカニズムデザインで「望ましい配分を、どんな仕組みなら実現できるか」を考えるときの出発点にもなります。

第6章

コア

ここまでの流れ　第4章と第5章で、ワルラス均衡とパレート効率性の関係（2つの基本定理）を学びました。
この章の問い　市場や価格がなくても、人々が自由にグループを作って交渉すれば、どのような配分に落ち着くのでしょうか。それはワルラス均衡と関係があるでしょうか。
この章で分かること　提携による阻止とコアの定義、コアと契約曲線、ワルラス均衡配分がコアに属すること、コアの極限定理。

6.1　提携とコア

価格を使わない交渉を考えます。消費者の任意のグループ（提携）$S \subseteq \{1, \dots, I\}$ は、メンバーの初期保有だけを使って、メンバーの間で自由に財を分け合えるとします。

定義 6.1（阻止とコア）
提携 S（空でない）が配分 x を阻止するとは、$\sum_{i \in S} x_i' = \sum_{i \in S} \omega_i$ を満たす S のメンバーへの配分 $(x_i')_{i \in S}$ で、すべての $i \in S$ について $x_i' \succsim_i x_i$、ある $i \in S$ について $x_i' \succ_i x_i$ となるものが存在することをいう。どの提携にも阻止されない実行可能な配分の集合をコアという。

数式の読み方

- 提携が配分を阻止するとは、「自分たちだけで初期保有を分け合えば、全員が今の配分以上に満足できる」ことです。そのような提携があれば、メンバーは提案された配分を拒否するでしょう。
- 1人の提携 $S = \{i\}$ に阻止されないことは、$x_i \succsim_i \omega_i$（個人合理性）です。
- 全員の提携に阻止されないことは、パレート効率性です。

命題 6.2（コアはパレート効率的かつ個人合理的）
コアに属する配分は、パレート効率的で、かつ各 i について $x_i \succsim_i \omega_i$ を満たす。

証明　上の解説のとおり、全員の提携と1人の提携に阻止されないことから直ちに従います（実行可能な配分のうち、総量を使い切る配分について考えればよい）。　□

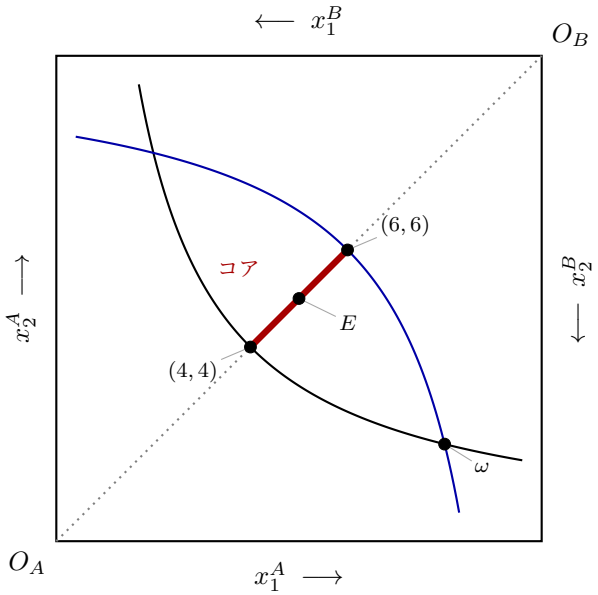
計算例：エッジワース・ボックスのコア

2人の経済では、提携は $\{A\}$、$\{B\}$、$\{A,B\}$ の3つだけなので、コアは「契約曲線のうち、2人とも初期保有以上に満足する部分」です。第1章の例では、契約曲線は対角線 $x_{A1}=x_{A2}=t$ で、個人合理性の条件は

$$t\cdot t \geq 8\cdot 2 = 16 \qquad (A:u_A(t,t)\geq u_A(\omega_A))$$
$$(10-t)^2 \geq 2\cdot 8 = 16 \qquad (B:u_B\geq u_B(\omega_B))$$

なので、$4\leq t\leq 6$ です。コアは対角線上の $(4,4)$ から $(6,6)$ までの線分です。

図 6.1　エッジワース・ボックスのコア



第1章の例。黒と青は ω を通る2人の無差別曲線、灰色の点線は契約曲線。赤い太線がコア $\{(t,t):4\leq t\leq 6\}$、$E=(5,5)$ はワルラス均衡配分。

図の読み方

1. コアは、契約曲線のうち、ω を通る2本の無差別曲線ではさまれた部分（レンズの中）です。両端 $(4,4)$ と $(6,6)$ では、それぞれ A、B の効用が初期保有と同じになります。
2. ワルラス均衡配分 E はコアに属しています（次の定理）。
3. 2人だけの経済では、コアは広い範囲に広がり、どこに落ち着くかは交渉力しだいです。価格は一つの点 E を選び出しています。

6.2 ワルラス均衡はコアに属する

定理 6.3（ワルラス均衡配分はコアに属する）

すべての消費者の選好が局所非飽和ならば、任意のワルラス均衡配分はコアに属する。

証明

方針　第一基本定理の証明を、全員の代わりに提携 S のメンバーだけで行います。

均衡 (p^*, x^*) を提携 S が $(x_i')_{i\in S}$ で阻止すると仮定します。第一基本定理の証明のステップ1と2と同じく、$x_i' \succ_i x_i^*$ なら $p^* \cdot x_i' > p^* \cdot \omega_i$、$x_i' \succsim_i x_i^*$ なら $p^* \cdot x_i' \geq p^* \cdot \omega_i$ です。S のメンバーについて足すと

$$p^* \cdot \sum_{i\in S} x_i' > p^* \cdot \sum_{i\in S} \omega_i \qquad \text{（少なくとも一人は強い不等号）}$$

ですが、阻止の条件 $\sum_{i\in S} x_i' = \sum_{i\in S} \omega_i$ から両辺は等しいはずで、矛盾します。 □

補足：ここが大事　3つの集合の包含関係

この章までの結果をまとめると、局所非飽和性のもとで

$$\text{ワルラス均衡配分} \subseteq \text{コア} \subseteq \text{パレート効率的かつ個人合理的な配分}$$

が成り立ちます。左の包含は第一基本定理の論法を提携ごとに使ったもの、右の包含はコアの定義から直ちに従うものです。そして極限定理（次の発展）は、人数が多いと左の包含がほぼ等号になることを示します。価格を使わない交渉の結果が、多数の参加者のもとでは市場均衡と一致するのです。

6.3 コアの極限定理

コアは一般にワルラス均衡配分よりずっと大きな集合です。ところが、経済の人数が増えると、コアは縮んでいきます。

発展：ドブリュー＝スカーフの極限定理

2人の経済を n 回複製し、A のタイプと B のタイプがそれぞれ n 人ずついる経済（複製経済）を考えます。コアに属する配分では、同じタイプの人は同じ組を受け取ることが示せます（同等待遇）。そして n を大きくすると、コアに残る配分はワルラス均衡配分にどこまでも近づきます。

直観的には、たとえば図 6.1 のコアの端 $(4,4)$ に近い配分は A のタイプに不利です。人数が多いと、A のタイプの何人かと B のタイプの何人かが、比率を工夫した提携を作って、その配分を阻止できるようになります。最終的に、どの提携にも阻止されないのは、すべての人が共通の価格で取引しているかのような配分、つまりワルラス均衡配分だけになります。

この定理は、「多数の参加者がいれば、価格受容者の仮定は、交渉の結果として正当化される」ことを示しており、完全競争の理論的な基礎の一つになっています。

補足：この章の知識が生きる場面

- コアと提携 → 協力ゲーム理論（シャプレー値、交渉集合）。
- 阻止の考え方 → マッチング理論の安定マッチング（どのペアも「阻止」しない配分）、研修医マッチングや学校選択制度の設計。
- 極限定理 → 完全競争の理論的な正当化、第4巻のクールノー競争の企業数を増やした極限との対比。

要点

- コアは、どの提携にも阻止されない配分の集合で、パレート効率性と個人合理性を満たします。
- エッジワース・ボックスでは、コアは契約曲線のうちレンズの中の部分です。
- 局所非飽和性のもとで、ワルラス均衡配分はコアに属します（第一基本定理の一般化）。
- 経済の人数が増えると、コアはワルラス均衡配分に縮んでいきます（極限定理）。

この巻のまとめ　交換経済のワルラス均衡から出発し、超過需要関数、均衡の存在（角谷の不動点定理）、第一基本定理（局所非飽和性）、第二基本定理（凸性と分離超平面定理）、コアを学びました。存在・効率性・分権化という3つの問いに、それぞれ異なる数学の道具が対応していたことを振り返ってみてください。

次の巻へ　第4巻では、価格を受け取るだけでなく、互いの行動を読み合う戦略的な状況を分析するゲーム理論を学びます。ナッシュ均衡の存在証明は、この巻の均衡の存在証明と同じ構造をもっています。