大学院ミクロ経済学 攻略マニュアル

第2巻　生産者理論

生産集合から利潤関数・費用関数・供給まで

目次

序 生産者理論の全体地図 **2**

序.1 消費者理論との対応 2

序.2 消費者理論との違い 2

序.3 この巻の流れ 3

1　生産集合と生産関数 **5**

1.1　生産ベクトルと生産集合 5

1.2　生産集合の性質 6

1.3　生産関数 7

1.4　規模に関する収穫と技術的限界代替率 9

2　利潤最大化 **11**

2.1　利潤最大化問題 11

2.2　利潤関数の性質 12

2.3　供給の法則 13

2.4　1種類の産出物の場合 15

3　費用最小化と費用関数 **18**

3.1　費用最小化問題 18

3.2　一階条件と限界費用 20

3.3 コブ＝ダグラス型の費用関数 22

4 費用関数と供給：短期と長期 24

4.1 利潤最大化の2段階法 24

4.2 平均費用と限界費用 25

4.3 短期費用と長期費用 25

4.4 短期の供給曲線 27

4.5 長期の供給曲線 28

5 集計と効率性 30

5.1 供給の集計 30

5.2 生産の効率性 32

序章

生産者理論の全体地図

> **この章の問い**　生産者理論は、第1巻の消費者理論とどこが同じで、どこが違うのでしょうか。
> **この章で分かること**　この巻の全体像。2つの最適化問題（利潤最大化と費用最小化）と、そこから生まれる関数の関係。

序.1　消費者理論との対応

企業の行動も、消費者と同じく最適化問題として表します。そして、生産者理論には消費者理論とよく似た構造があります。第1巻で学んだことの多くを、名前を読みかえるだけで使えるのです。

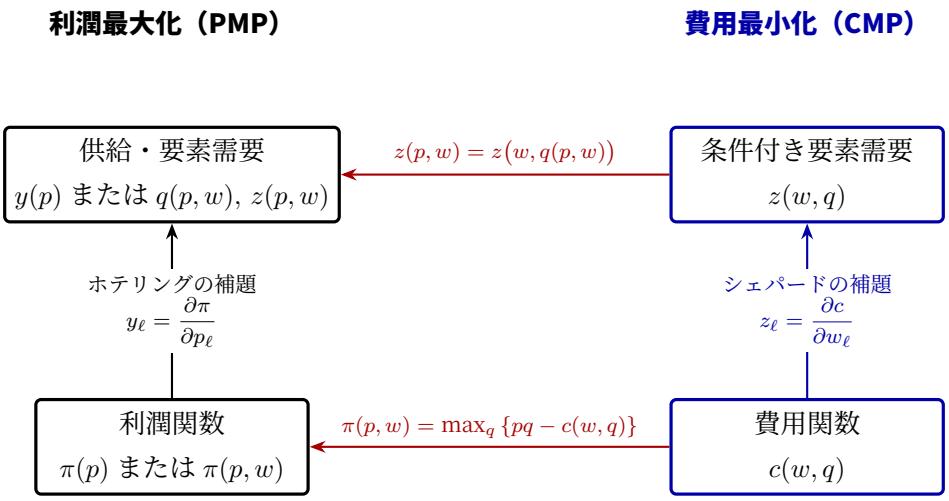
	消費者理論（第1巻）	生産者理論（この巻）
選択の集合	予算集合 $B(p,w)$	生産集合 Y
制約の表し方	選好・効用関数 $u(x)$	生産関数 $f(z)$
最小化問題	支出最小化（EMP）	費用最小化（CMP）
最小化の値	支出関数 $e(p,u)$	費用関数 $c(w,q)$
最小化の解	ヒックス需要 $h(p,u)$	条件付き要素需要 $z(w,q)$
最小値の微分	シェパードの補題	シェパードの補題
最大化問題	効用最大化（UMP）	利潤最大化（PMP）
最大化の値	間接効用関数 $v(p,w)$	利潤関数 $\pi(p)$
最大値の微分	ロイの恒等式	ホテリングの補題

序.2　消費者理論との違い

大きな違いが2つあります。

- **利潤は観察できる**。効用は序数的で値に意味がありませんでしたが、利潤は金額なので、その値そのものに意味があります。このため、利潤関数は消費者の間接効用関数よりずっと扱いやすい関数です。
- **所得効果がない**。企業は予算制約に縛られていないので、利潤最大化には「所得効果」にあたるものがありません。その結果、供給の法則は（ギッフェン財のような例外なしに）必ず成り立ちます。スルツキー方程式のような分解も必要ありません。

図 序.1　生産者理論の関数の地図



黒は利潤最大化、青は費用最小化から生まれる関数。赤い矢印は2つの問題をつなぐ関係。

図の読み方

1. 左の列（黒）が利潤最大化問題（PMP）、右の列（青）が費用最小化問題（CMP）から生まれる関数で、上の段が「最適な選択」、下の段が「最適な値」です。
2. 縦の矢印は、値の関数を価格で微分すると最適な選択が得られるという関係で、左がホテリングの補題（第2章）、右がシェパードの補題（第3章）です。
3. 赤い矢印は、利潤最大化を「まず費用を最小化し、次に生産量を選ぶ」という2段階に分けられることを表しています（第4章）。

序.3　この巻の流れ

章	内容	答える問い
第1章	生産集合と生産関数	技術を数学でどう表すか
第2章	利潤最大化	企業は何をどれだけ作り、何をどれだけ使うか
第3章	費用最小化と費用関数	ある量を作る最小費用はいくらか
第4章	費用関数と供給	費用から供給曲線をどう導くか（短期と長期）
第5章	集計と効率性	多くの企業を一つにまとめられるか、利潤最大化は効率的か

要点

- 生産者理論は、利潤最大化（PMP）と費用最小化（CMP）の2つの問題からなります。
- 費用最小化は支出最小化と同じ構造をもち、費用関数・条件付き要素需要・シェパードの補題が対応します。
- 利潤は観察可能で、所得効果がないので、供給の法則は必ず成り立ちます。

次の章へ　まず、企業が何をできるか、つまり技術を集合として表すことから始めます。

第1章

生産集合と生産関数

ここまでの流れ　序章で、生産者理論が消費者理論とよく似た構造をもつことを見ました。
この章の問い　企業が「何を使って何を作れるか」という技術を、数学でどう表せばよいでしょうか。
この章で分かること　生産ベクトルと生産集合、生産集合の基本的な性質（自由処分・規模に関する収穫・凸性など）、生産関数と技術的限界代替率。

1.1　生産ベクトルと生産集合

企業はいくつかの財を投入し、いくつかの財を産出します。大学院のミクロでは、投入と産出を区別せずに1本のベクトルで表す方法を使います。

定義 1.1（生産ベクトル・生産集合）
L 種類の財について、企業の活動を $y = (y_1, \dots, y_L) \in \mathbb{R}^L$ で表し、生産ベクトルという。$y_\ell > 0$ は財 ℓ の産出量、$y_\ell < 0$ は財 ℓ の投入量（の符号を変えたもの）を表す。技術的に実行可能な生産ベクトルの集合 $Y \subseteq \mathbb{R}^L$ を生産集合という。

数式の読み方

- たとえば $y = (-2, -1, 3)$ は、「財1を2単位と財2を1単位投入して、財3を3単位産出する」活動です。
- この表し方では、価格 p のもとでの利潤が $p \cdot y = \sum_\ell p_\ell y_\ell$ と、内積一つで書けます。産出からの収入はプラス、投入の費用はマイナスで自動的に計算されるからです。
- 同じ財が、ある企業では産出物、別の企業では投入物になってもかまいません（中間財）。

補足：ここが大事　なぜ投入を「負の数」で書くのか

投入と産出を符号で区別する書き方は、最初は奇妙に見えますが、大学院ミクロでは大きな利点があります。

- 利潤が内積 $p \cdot y$ 一つで書けるので、利潤最大化が「線形関数を集合の上で最大化する」問題になり、支出最小化とまったく同じ数学（凸性・分離超平面・包絡線定理）が使えます。
- 一般均衡（第3巻）では、経済全体の実行可能性が $\sum_i x_i \leq \bar{\omega} + \sum_j y_j$ と簡潔に書けます。中間財（ある企業の産出物が別の企業の投入物）も自動的に処理されます。

1.2　生産集合の性質

生産集合に課される代表的な性質をまとめます。どれを仮定するかは分析の目的によって変わります。

定義 1.2（生産集合の性質）

1. （閉集合）Y は空でない閉集合である。
2. （無からの生産の不可能性）$Y \cap \mathbb{R}^L_+ \subseteq \{0\}$。何も投入せずに正の産出をすることはできない。
3. （無活動の可能性）$0 \in Y$。何もしないことができる。
4. （自由処分）$y \in Y$ かつ $y' \leq y$ ならば $y' \in Y$。余分な投入をしたり、産出を捨てたりできる。
5. （非可逆性）$y \in Y$ かつ $y \neq 0$ ならば $-y \notin Y$。生産を逆向きに行うことはできない。
6. （凸性）Y は凸集合である。

数式の読み方：各性質の意味

- 無活動の可能性は、長期的に企業がいつでも撤退できることを表します。短期には、すでに契約した固定費用があるので成り立たないことがあります。
- 凸性は、「2つの生産計画を混ぜ合わせた計画も実行できる」ことです。後で見るように、規模に関して収穫逓増（大量生産の利益）があると成り立ちません。

定義 1.3（規模に関する収穫）

- 任意の $y \in Y$ と $\alpha \in [0,1]$ について $\alpha y \in Y$ のとき、規模に関して収穫非逓増という。
- 任意の $y \in Y$ と $\alpha \geq 1$ について $\alpha y \in Y$ のとき、規模に関して収穫非逓減という。
- 任意の $y \in Y$ と $\alpha \geq 0$ について $\alpha y \in Y$ のとき、規模に関して収穫一定という。

命題 1.4（凸性と収穫非逓増）

Y が凸集合で $0 \in Y$ ならば、Y は規模に関して収穫非逓増である。

証明　$y \in Y$、$\alpha \in [0,1]$ とすると、$\alpha y = \alpha y + (1-\alpha)\cdot 0$ は Y の2点 y と 0 の凸結合なので、凸性から $\alpha y \in Y$ です。 □

補足：凸性と収穫一定

収穫一定の生産集合は、原点からの半直線をすべて含む集合（錐）です。凸で収穫一定の生産集合は、加法性（$y, y' \in Y$ ならば $y + y' \in Y$）も満たします。実際、$y + y' = 2\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y'\right)$ で、括弧の中は凸性から Y に入り、それを2倍しても収穫一定から Y に入るからです。加法性は「同じ工場をもう一つ建てられる」ことを表します。

補足：ここが大事　凸性の仮定はどこで効くか

生産集合の凸性は、生産者理論と一般均衡で次のように使われます。

- 供給対応の値が凸集合になる（第2章）→ 生産のある経済での均衡の存在（角谷の不動点定理の「値の凸性」、第3巻第3章）。
- 効率的な生産を価格で実現できる（第5章）→ 第二基本定理の生産版（支持超平面定理）。

逆に、固定費用や規模の経済（収穫逓増）があると凸性が崩れ、限界費用で価格をつけると赤字になる、競争均衡が存在しない、といった問題が生じます。自然独占や規模の経済を扱う産業組織論は、この仮定が崩れる世界の分析です。

1.3　生産関数

産出物が1種類だけの場合には、なじみのある生産関数を使えます。投入物を $z = (z_1, \ldots, z_{L-1}) \geq 0$、産出量を q とします。

定義 1.5（生産関数）

投入 z で作れる最大の産出量を $f(z)$ とする関数 $f:\mathbb{R}_+^{L-1}\to\mathbb{R}_+$ を生産関数という。このとき生産集合は

$$Y=\{(-z,q):q\le f(z),\ z\ge 0\} \tag{1.1}$$

である。

命題 1.6（生産集合の凸性と生産関数の凹性）

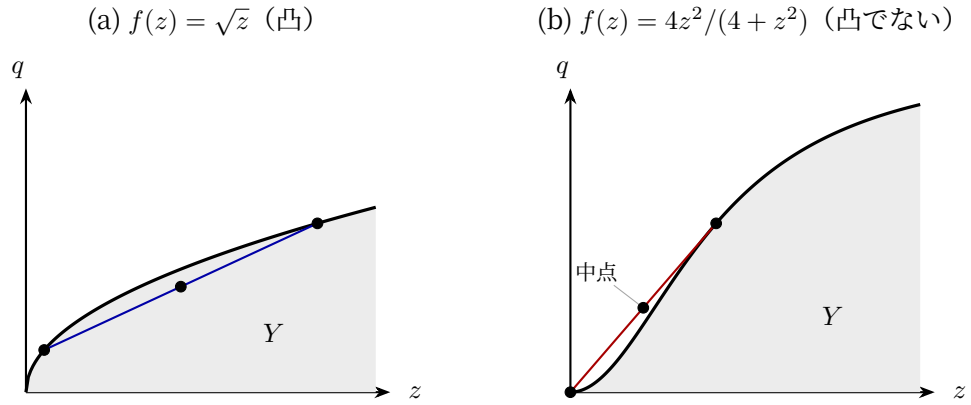
式 (1.1) の生産集合 Y が凸集合であることと、f が凹関数であることは同値である。

証明（f が凹ならば Y は凸）　$(-z,q),(-z',q')\in Y$ とすると $q\le f(z)$、$q'\le f(z')$ です。$\lambda\in[0,1]$ について

$$\begin{aligned}\lambda q+(1-\lambda)q' &\le \lambda f(z)+(1-\lambda)f(z') && (q\le f(z)、\ q'\le f(z'))\\ &\le f\big(\lambda z+(1-\lambda)z'\big) && (f\text{ の凹性})\end{aligned}$$

なので、凸結合 $\big(-(\lambda z+(1-\lambda)z'),\ \lambda q+(1-\lambda)q'\big)$ も Y に入ります。逆向きは、Y の境界上の点 $(-z,f(z))$ と $(-z',f(z'))$ の凸結合が Y に入ることから従います。　□

図 1.1　凸な生産集合と凸でない生産集合



横軸は投入量 z（生産ベクトルでは $-z$）、縦軸は産出量 q。(b) では $(0,0)$ と $(2,2)$ の中点 $(1,1)$ で $f(1)=0.8<1$。

図の読み方

1. 灰色の領域が生産集合（の投入と産出の部分）で、黒い曲線がその上の境界、つまり生産関数のグラフです。図では投入量を正の数で横軸にとっています。
2. (a) では、境界上の2点を結ぶ線分（青）が生産集合に入っています。限界生産力が逓減するので生産集合は凸です。
3. (b) では、生産量が少ないうちは限界生産力が逓増します（規模の利益）。原点と $(2,2)$ を結ぶ線分の中点 $(1,1)$ は生産集合の外にあり、凸ではありません。

1.4 規模に関する収穫と技術的限界代替率

定義 1.7（生産関数の規模に関する収穫）

任意の z と $t>1$ について、$f(tz)>tf(z)$ のとき収穫逓増、$f(tz)=tf(z)$ のとき収穫一定、$f(tz)<tf(z)$ のとき収穫逓減という。

定義 1.8（技術的限界代替率）

2つの投入物 ℓ,k について、$\mathrm{MRTS}_{\ell k}(z)=\dfrac{\partial f(z)/\partial z_\ell}{\partial f(z)/\partial z_k}$ を技術的限界代替率という。

数式の読み方

- 生産量 q を一定に保つ投入の組の集まり $\{z:f(z)=q\}$ を等量曲線といいます。無差別曲線にあたるものです。
- 陰関数定理より、等量曲線の傾きは $dz_k/dz_\ell=-\mathrm{MRTS}_{\ell k}$ です。投入 ℓ を1単位増やしたとき、同じ生産量を保ちながら減らせる投入 k の量を表します。
- 消費者の限界代替率と違い、生産関数は単調増加変換すると別の技術になるので、生産関数の値（産出量）そのものに意味があります。

計算例：コブ＝ダグラス型生産関数

$f(z_1,z_2)=z_1^a z_2^b$（$a,b>0$）では

$$f(tz)=(tz_1)^a(tz_2)^b=t^{a+b}f(z) \qquad \text{（指数法則）}$$

$$\mathrm{MRTS}_{12}=\frac{az_1^{a-1}z_2^b}{bz_1^a z_2^{b-1}}=\frac{a}{b}\frac{z_2}{z_1} \qquad \text{（偏微分の比）}$$

です。f は $a+b$ 次同次で、$a+b>1$ なら収穫逓増、$=1$ なら収穫一定、<1 なら収穫逓減です。$a+b\le 1$ のとき f は凹関数で、生産集合は凸になります。

補足：この章の知識が生きる場面

- 生産集合の表現 → 一般均衡の私有経済（第3巻第1章）、国際貿易のリカード・モデルやヘクシャー＝オリーン・モデル。
- 規模に関する収穫 → 長期のゼロ利潤（第4章）、産業組織論の参入と市場構造。
- 技術的限界代替率 → 費用最小化の条件（第3章）、成長会計や生産関数の推定。

要点

- 生産ベクトルは産出を正、投入を負で表し、利潤は内積 $p \cdot y$ で書けます。
- 生産集合には、閉集合・無からの生産の不可能性・自由処分・凸性などの性質を仮定します。
- 産出物が1種類なら生産関数 f で表せ、生産集合が凸であることと f が凹であることは同値です。
- 凸性と無活動の可能性から、収穫非逓増が従います。

次の章へ　次の章では、価格が与えられたとき、企業が生産集合の中から利潤を最大にする生産ベクトルを選ぶ問題を考えます。

大学院とのつながり　一般均衡の存在定理では、生産集合が凸であることが重要な仮定になります。収穫逓増があると、競争均衡が存在しないことがあります。

第2章

利潤最大化

ここまでの流れ　前の章で、企業の技術を生産集合 Y や生産関数 f で表しました。
この章の問い　価格が与えられたとき、企業はどの生産ベクトルを選ぶのでしょうか。その選択と最大利潤は、価格にどう反応するのでしょうか。
この章で分かること　利潤最大化問題、利潤関数の性質（1次同次性と凸性）、ホテリングの補題、供給の法則。

2.1　利潤最大化問題

企業は価格を与えられたものとして受け取り（価格受容者）、利潤を最大にする生産ベクトルを選ぶとします。

定義 2.1（利潤最大化問題・利潤関数・供給対応）
価格 $p \gg 0$ のもとでの利潤最大化問題（PMP）とは

$$\max_{y \in Y} \; p \cdot y \tag{2.1}$$

である。最大値 $\pi(p)$ を利潤関数、解の集合 $y(p)$ を供給対応という。

数式の読み方

- $y(p)$ の正の成分は産出物の供給、負の成分は投入物の需要（の符号を変えたもの）です。供給と要素需要を1本のベクトルでまとめて表しています。
- $\pi(p)$ はEMPの支出関数と同じく、「線形の目的関数を集合の上で最適化した値」です。ただし最小化ではなく最大化なので、性質が「凹」から「凸」へと入れ替わります。

補足：収穫一定と利潤
Y が収穫一定なら、$p \cdot y > 0$ となる $y \in Y$ が一つでもあれば、それを何倍にもすることで利潤をいくらでも大きくできます。このとき最大値は存在せず、$\pi(p) = +\infty$ と考えます。そうでなければ $\pi(p) = 0$ です。収穫一定の企業は、均衡ではゼロ利潤になることを意味しています。

2.2 利潤関数の性質

定理 2.2（利潤関数と供給対応の性質）

Y が閉集合で自由処分を満たし、$\pi(p) < \infty$ とする。このとき次が成り立つ。

1. π は1次同次、$y(p)$ は0次同次である。
2. π は凸関数である。
3. Y が凸集合ならば、$y(p)$ は凸集合である。
4. （ホテリングの補題）$y(\bar{p})$ がただ一つの点からなり、π が $\bar{p}$ で微分可能ならば、$\nabla\pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$。
5. $y(p)$ が微分可能な関数ならば、$Dy(p) = D^2\pi(p)$ は対称な正半定値行列であり、$Dy(p)\,p = 0$ を満たす。

証明

ステップ1　同次性

$t > 0$ について、$(tp) \cdot y = t\,p \cdot y$ なので、どの y が最大になるかは p と tp で同じで（$y(tp) = y(p)$）、最大値は t 倍になります（$\pi(tp) = t\pi(p)$）。

ステップ2　凸性

$p'' = \lambda p + (1-\lambda)p'$ とし、$y'' \in y(p'')$ をとります。y'' は価格 p や p' のもとでも候補の一つなので、$p \cdot y'' \le \pi(p)$、$p' \cdot y'' \le \pi(p')$ です。よって

$$\begin{aligned} \pi(p'') &= \lambda\, p \cdot y'' + (1-\lambda)\, p' \cdot y'' && (p'' \text{ を代入}) \\ &\le \lambda\,\pi(p) + (1-\lambda)\,\pi(p') && (\text{上の2つの不等式}) \end{aligned}$$

です。支出関数の凹性の証明とまったく同じ形で、不等号の向きだけが逆です。

ステップ3　$y(p)$ の凸性

$y, y' \in y(p)$ ならば $p \cdot y = p \cdot y' = \pi(p)$ です。Y は凸なので $\lambda y + (1-\lambda)y' \in Y$ で、その利潤も $\pi(p)$ なので最適です。

ステップ4　ホテリングの補題

$\bar{y} = y(\bar{p})$ とし、$g(p) = \pi(p) - p \cdot \bar{y}$ とおきます。$\bar{y}$ はどの価格でも候補の一つなので

$g(p) \geq 0$、また $g(\bar{p}) = 0$ です。g は $\bar{p}$ で最小値をとるので

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial g}{\partial p_\ell}(\bar{p}) && \text{（最小点の一階条件）} \\
&= \frac{\partial \pi}{\partial p_\ell}(\bar{p}) - \bar{y}_\ell && \text{（}p \cdot \bar{y} \text{ の微分は } \bar{y}_\ell\text{）}
\end{aligned}
$$

です。

ステップ5　Dy の性質

ホテリングの補題を微分すると $Dy(p) = D^2\pi(p)$ です。凸関数のヘッセ行列は正半定値で、ヤングの定理から対称です。$y(p)$ は0次同次なので、オイラーの定理より $Dy(p)\,p = 0$ です。　□

数式の読み方：凸性の直観

- ある価格 $\bar{p}$ での最適な計画 $\bar{y}$ を、価格が変わっても**そのまま続ける**と、利潤は $p \cdot \bar{y}$ で、p の一次関数（直線）です。
- 実際には、価格が変わると企業は計画を変えて利潤を増やせるので、$\pi(p) \geq p \cdot \bar{y}$ です。利潤関数はすべての直線の上側にあり、それぞれと接する凸関数になります（図 2.2）。

補足：ここが大事　「最大化の値は凸、最小化の値は凹」

価格について、最大化問題の値の関数は凸関数、最小化問題の値の関数は凹関数になります。どちらも「価格が変われば選択を変えて得をできる」ことの表れで、直線（選択を変えない場合）より有利な側に曲がるからです。

値の関数	問題	価格についての形	微分すると
利潤関数 $\pi(p)$	最大化	凸	供給（ホテリング）
費用関数 $c(w,q)$	最小化	凹	条件付き要素需要（シェパード）
支出関数 $e(p,u)$	最小化	凹	ヒックス需要（シェパード）
間接効用関数 $v(p,w)$	最大化	準凸	需要（ロイ）

間接効用関数だけが「準」凸なのは、効用が序数的で、値そのものに意味がないからです。

2.3　供給の法則

消費者のマーシャル需要では需要法則が破れることがありました（ギッフェン財）。企業の供給では、そのようなことは起こりません。

定理 2.3（供給の法則）

任意の p, p' と $y \in y(p)$、$y' \in y(p')$ について

$$(p' - p) \cdot (y' - y) \geq 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ。

証明　y' は価格 p' のもとで最適なので $p' \cdot y' \geq p' \cdot y$、$y$ は価格 p のもとで最適なので $p \cdot y \geq p \cdot y'$ です。それぞれを移項して足すと

$$p' \cdot (y' - y) - p \cdot (y' - y) \geq 0 \qquad \text{（2つの不等式の和）}$$

となり、式 (2.2) が得られます。 □

数式の読み方：供給の法則の読み方

- 財 ℓ の価格だけが上がるとき、式は $(p'_\ell - p_\ell)(y'_\ell - y_\ell) \geq 0$ となり、$y'_\ell \geq y_\ell$ です。
- 財 ℓ が産出物なら「価格が上がると供給は増える（減らない）」、投入物なら（$y_\ell < 0$ なので）「価格が上がると投入量 $|y_\ell|$ は減る（増えない）」という意味です。
- 消費者と違って予算制約がないので、価格変化による「所得効果」が生じず、代替効果だけが働きます。補償需要の法則と同じ形の不等式が、補償なしでそのまま成り立つのです。

補足：ここが大事　データで確かめられる予測

利潤最大化の仮説からは、次の予測が導かれます。

- 産出物の価格が上がると供給は増え、投入物の価格が上がるとその需要は減る（供給の法則）。
- 交差効果の対称性：$\partial y_\ell / \partial p_k = \partial y_k / \partial p_\ell$（$D^2\pi$ の対称性）。たとえば産出物 q と投入物 z では、$y_z = -z$ なので「要素価格 w が上がったときの産出の減少」と「産出価格 p が上がったときの要素需要の増加」が等しくなります（$\partial q / \partial w = -\partial z / \partial p$）。

$f(z) = \sqrt{z}$ の例では $q = p/(2w)$、$z = (p/2w)^2$ で、$\partial q / \partial w = -p/(2w^2)$、$\partial z / \partial p = p/(2w^2)$ となり、対称性が確かめられます。消費者と違い所得効果がないので、これらの予測は補償なしでそのまま成り立ちます。

2.4　1種類の産出物の場合

産出物が1種類（価格 p）、投入物が z（価格ベクトル w）のとき、利潤最大化は

$$\max_{z\ge 0}\; p f(z) - w\cdot z \tag{2.3}$$

となり、内点解の一階条件は、各投入物について

$$p\,\frac{\partial f}{\partial z_\ell}(z^*) = w_\ell \tag{2.4}$$

です。左辺は「投入物を1単位増やしたときの収入の増加」（限界生産物価値）で、それが投入物の価格に等しくなるまで投入します。

計算例：$f(z)=z^a$（$0<a<1$）の利潤最大化

一階条件 $p\,a\,z^{a-1}=w$ を解くと

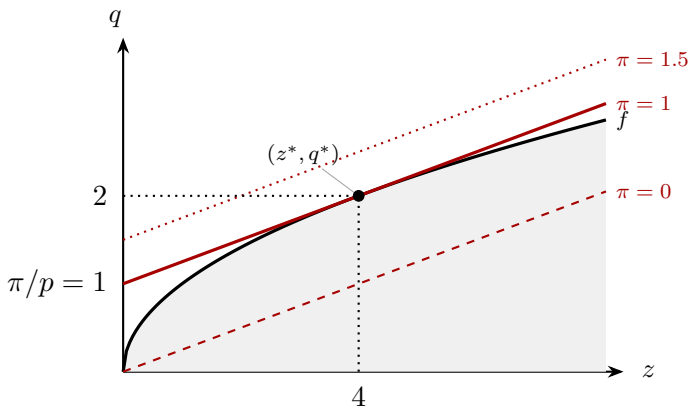
$$z(p,w)=\Big(\frac{ap}{w}\Big)^{\frac{1}{1-a}},\qquad q(p,w)=f\big(z(p,w)\big)=\Big(\frac{ap}{w}\Big)^{\frac{a}{1-a}}$$
$$\pi(p,w)=pq-wz=(1-a)\,pq=(1-a)\,p^{\frac{1}{1-a}}\Big(\frac{a}{w}\Big)^{\frac{a}{1-a}}$$

です（$wz=a\,pq$ を使いました）。ホテリングの補題を確かめると

$$\frac{\partial\pi}{\partial p}=p^{\frac{a}{1-a}}\Big(\frac{a}{w}\Big)^{\frac{a}{1-a}}=q(p,w)\qquad (p^{1/(1-a)}\text{ を微分})$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial w}=-a\,p^{\frac{1}{1-a}}a^{\frac{a}{1-a}}w^{-\frac{1}{1-a}}=-\Big(\frac{ap}{w}\Big)^{\frac{1}{1-a}}=-z(p,w)\qquad (w^{-a/(1-a)}\text{ を微分})$$

で、生産ベクトル $(-z,q)$ と一致します。$a=\frac12$ なら $z=(p/2w)^2$、$q=p/(2w)$、$\pi=p^2/(4w)$ です。

図 2.1　利潤最大化と等利潤線



$f(z)=\sqrt{z}$、$p=1$、$w=\frac14$。等利潤線は $q=\pi/p+(w/p)z$。最適点は $(z^*,q^*)=(4,2)$、最大利潤は $\pi=1$。

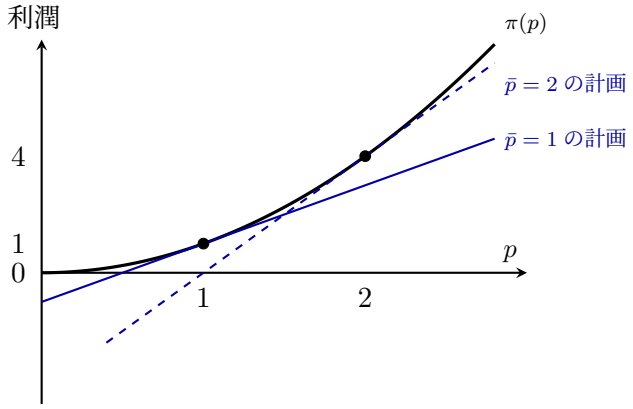
図の読み方

1. 赤い直線は等利潤線で、同じ利潤 $\pi = pq - wz$ を与える (z, q) の組です。傾きは要素価格と産出価格の比 w/p で、上にあるほど利潤が大きくなります。

2. 企業は生産集合（灰色）の中で最も上の等利潤線を目指します。$\pi = 1.5$ の点線は生産集合に届かず、$\pi = 0$ の破線はまだ改善できます。

3. 最適点では等利潤線が生産関数に接し、傾きが等しいので $f'(z^*) = w/p$、つまり式 (2.4) が成り立ちます。

図 2.2　利潤関数の凸性とホテリングの補題



$f(z) = \sqrt{z}$、$w = \frac{1}{4}$ のとき $\pi(p) = p^2$。実線は $\bar{p} = 1$ での計画 $(z, q) = (4, 2)$ を続けたときの利潤 $2p - 1$、破線は $\bar{p} = 2$ での計画 $(16, 4)$ を続けたときの利潤 $4p - 4$。

図の読み方

1. 黒い曲線が利潤関数 $\pi(p)$ で、下に凸（凸関数）です。

2. 青い直線は、ある価格での最適な計画を変えずに続けたときの利潤で、利潤関数はつねにその上にあり、$\bar{p}$（黒い点）で接しています。

3. 接点の傾きは計画の産出量 q に等しく（$\bar{p} = 1$ では 2、$\bar{p} = 2$ では 4）、これがホテリングの補題 $\partial\pi/\partial p = q$ です。図 5.2（第1巻）の支出関数と、上下が逆になった関係です。

補足：この章の知識が生きる場面

- 利潤関数とホテリングの補題 → 農業経済学などで、利潤関数を推定して供給と要素需要を同時に導く実証分析。
- 収穫一定と利潤 → 一般均衡で、収穫一定の企業は均衡でゼロ利潤になること（第3巻）。
- 価格受容的な利潤最大化 → 第4巻のゲーム理論との対比（寡占企業は価格を所与としない）。

要点

- 利潤最大化問題の最大値が利潤関数 $\pi(p)$、解が供給対応 $y(p)$ です。
- 利潤関数は1次同次で凸関数です。凸性は「価格が変われば計画を変えて利潤を増やせる」ことの表れです。
- ホテリングの補題 $\nabla\pi = y(p)$ により、利潤関数から供給と要素需要が得られます。
- 所得効果がないので、供給の法則 $(p' - p) \cdot (y' - y) \geq 0$ が必ず成り立ちます。

次の章へ　次の章では、利潤最大化の「前半」にあたる費用最小化を学びます。これは第1巻の支出最小化とまったく同じ構造の問題です。

大学院とのつながり　一般均衡理論では、各企業は利潤を最大化し、その利潤は株主である消費者に分配されると考えます。

第3章

費用最小化と費用関数

ここまでの流れ　前の章で、利潤最大化問題と利潤関数、ホテリングの補題を学びました。
この章の問い　ある量 q を生産すると決めたとき、それを最も安く作るにはどの投入物をどれだけ使えばよいでしょうか。その最小費用はどのような性質をもつのでしょうか。
この章で分かること　費用最小化問題、条件付き要素需要と費用関数の性質、シェパードの補題、限界費用とラグランジュ乗数、規模に関する収穫と費用の関係。

3.1　費用最小化問題

利潤最大化は「何をどれだけ作るか」と「それをどう作るか」を同時に決める問題でした。このうち後者だけを取り出したのが費用最小化です。産出物は1種類とし、投入物の価格を $w \gg 0$ とします。

定義 3.1（費用最小化問題・費用関数・条件付き要素需要）

$$\min_{z \geq 0} \; w \cdot z \quad \text{s.t.} \quad f(z) \geq q \tag{3.1}$$

を費用最小化問題（CMP）という。最小値 $c(w,q)$ を費用関数、解の集合 $z(w,q)$ を条件付き要素需要という。

数式の読み方：支出最小化との対応

- 第1巻の支出最小化 $\min p \cdot x$ s.t. $u(x) \geq u$ で、価格 p を要素価格 w に、財の組 x を投入 z に、効用関数 $u(\cdot)$ を生産関数 $f(\cdot)$ に、効用水準 u を生産量 q に読みかえると、CMPになります。
- したがって、支出関数とヒックス需要について示した性質は、証明もそのままに、費用関数と条件付き要素需要について成り立ちます。
- 「条件付き」とは、生産量 q を固定した条件のもとでの要素需要、という意味です。利潤最大化から得られる（生産量も選んだ）要素需要と区別します。

定理 3.2（費用関数と条件付き要素需要の性質）

f が連続で、生産集合が自由処分を満たすとする。このとき次が成り立つ。

1. $c(w,q)$ は w について1次同次で、q について非減少である。$z(w,q)$ は w について0次同次である。
2. $c(w,q)$ は w について凹関数である。
3. （シェパードの補題）$z(\bar{w},q)$ がただ一つで、c が $\bar{w}$ で微分可能ならば、$\nabla_w c(\bar{w},q) = z(\bar{w},q)$。
4. $z(w,q)$ が微分可能ならば、$D_w z(w,q) = D_w^2 c(w,q)$ は対称な負半定値行列で、$D_w z(w,q)\, w = 0$ を満たす。
5. f が1次同次（収穫一定）ならば、$c(w,q) = q\, c(w,1)$、$z(w,q) = q\, z(w,1)$。
6. f が凹関数ならば、$c(w,q)$ は q について凸関数である。

証明

ステップ1　性質1〜4

第1巻の支出関数の性質（第5章）とシェパードの補題の証明を、記号を読みかえてそのまま使えます。凹性については、$w'' = \lambda w + (1-\lambda)w'$ での最適な投入 z'' が価格 w、w' のもとでも候補の一つであることから、$c(w'',q) = \lambda\, w \cdot z'' + (1-\lambda)\, w' \cdot z'' \geq \lambda c(w,q) + (1-\lambda)c(w',q)$ です。

ステップ2　性質5（収穫一定）

$f(z) \geq q$ と $f(z/q) \geq 1$ は（1次同次性より）同値なので、z が生産量 q の候補であることと、z/q が生産量 1 の候補であることは同じです。よって最小費用も $c(w,q) = q\, c(w,1)$ で、解も q 倍になります。

ステップ3　性質6（q についての凸性）

$z \in z(w,q)$、$z' \in z(w,q')$ とし、$q'' = \lambda q + (1-\lambda)q'$ とします。f の凹性から

$$
\begin{aligned}
f\big(\lambda z + (1-\lambda)z'\big) &\geq \lambda f(z) + (1-\lambda) f(z') && (f \text{ の凹性}) \\
&\geq \lambda q + (1-\lambda)q' = q'' && (f(z) \geq q,\ f(z') \geq q')
\end{aligned}
$$

なので、$\lambda z + (1-\lambda)z'$ は生産量 q'' の候補です。よって

$$
\begin{aligned}
c(w,q'') &\leq w \cdot \big(\lambda z + (1-\lambda)z'\big) && (\text{候補の費用は最小費用以上}) \\
&= \lambda c(w,q) + (1-\lambda)c(w,q') && (z, z' \text{ は最適})
\end{aligned}
$$

です。 □

補足：ここが大事　第1巻の結果を「翻訳」して使う

費用最小化の性質は、第1巻の支出最小化の性質を、記号を読みかえるだけで得られます。大学院ミクロでは、このように「同じ数学的構造を別の経済問題に移す」ことがよくあります。新しい問題に出会ったら、「これは何かの最大化か最小化か」「目的関数は線形か」「制約は何か」を確かめ、既に知っている問題と同じ構造かどうかを考えてみてください。また、費用関数は産業組織論で企業の技術を表す基本的な道具で、生産関数を直接扱うより、費用関数を出発点にすることの方が多いくらいです。

3.2　一階条件と限界費用

f が微分可能なとき、CMPのラグランジュ関数は $\mathcal{L} = w \cdot z - \mu\big(f(z) - q\big)$ で、内点解の一階条件は

$$w_\ell = \mu \, \frac{\partial f}{\partial z_\ell}(z^*) \qquad (\ell = 1, \dots, L-1) \tag{3.2}$$

です。2つの投入物について割り算すると、$\mathrm{MRTS}_{\ell k} = w_\ell / w_k$（技術的限界代替率＝要素価格比）となります。

命題 3.3（乗数は限界費用）

c と $z(w,q)$ が微分可能で、$z(w,q) \gg 0$ ならば、$\mu = \frac{\partial c}{\partial q}(w,q)$ である。

証明　$c(w,q) = w \cdot z(w,q)$ を q で微分すると

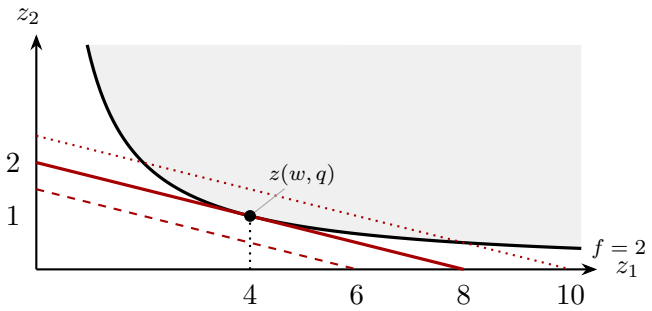
$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial q} &= \sum_{\ell} w_\ell \frac{\partial z_\ell}{\partial q} && (c \text{ の定義を微分}) \\
&= \mu \sum_{\ell} \frac{\partial f}{\partial z_\ell} \frac{\partial z_\ell}{\partial q} && (\text{一階条件 (3.2)}) \\
&= \mu && (\text{恒等式 } f(z(w,q)) = q \text{ を } q \text{ で微分すると和は } 1)
\end{aligned}$$

です。 □

数式の読み方

- μ は「生産量を1単位増やすのに必要な追加費用」、つまり限界費用です。一般に、乗数は制約を1単位厳しくしたときの目的関数の変化を表します。
- 一階条件 (3.2) を $w_\ell / f_\ell = \mu$ と書くと、「どの投入物を増やしても、生産量1単位あたりの追加費用は等しい」という意味になります。

図 3.1　費用最小化と等費用線



$f(z) = z_1^{1/2} z_2^{1/2}$、$q = 2$、$w = (1, 4)$。赤い線は費用 $6, 8, 10$ の等費用線 $z_1 + 4z_2 = C$（横軸との交点が費用額）。最適な投入は $z = (4, 1)$、最小費用は $c = 8$。

図の読み方

1. 黒い曲線は生産量 $q = 2$ の等量曲線、灰色の領域は 2 以上を生産できる投入の組です。
2. 赤い直線は等費用線で、傾きは $-w_1/w_2 = -\frac{1}{4}$ です。原点に近いほど費用が小さくなります。
3. 費用 8 の等費用線が等量曲線に接する点 $z = (4, 1)$ が条件付き要素需要です。投入物2が割高なので、投入物1を多く使っています。第1巻の図 5.1（支出最小化）と同じ構造の図です。

3.3 コブ＝ダグラス型の費用関数

計算例：$f(z)=z_1^a z_2^b$ の費用関数

$r=a+b$ とおきます。$\mathrm{MRTS}_{12}=w_1/w_2$ は $\dfrac{a}{b}\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{w_1}{w_2}$、つまり $\dfrac{w_1 z_1}{w_2 z_2}=\dfrac{a}{b}$ です。これを $f(z)=q$ に代入して解くと

$$z_1(w,q)=q^{1/r}\Big(\frac{a\,w_2}{b\,w_1}\Big)^{b/r},\qquad z_2(w,q)=q^{1/r}\Big(\frac{b\,w_1}{a\,w_2}\Big)^{a/r}$$

です。費用のうち投入物1に使う割合は a/r なので、$c=\dfrac{r}{a}\,w_1 z_1$ から

$$c(w,q)=r\,q^{1/r}\Big(\frac{w_1}{a}\Big)^{a/r}\Big(\frac{w_2}{b}\Big)^{b/r} \tag{3.3}$$

となります。

数式の読み方：費用関数の読み方

- w については $a/r+b/r=1$ 次の同次関数です（性質1）。
- q については $q^{1/r}$ に比例します。収穫逓減（$r<1$）なら $1/r>1$ で費用は q について凸（限界費用が逓増）、収穫一定（$r=1$）なら比例（限界費用が一定）、収穫逓増（$r>1$）なら凹（限界費用が逓減）です。
- $a=b=\frac{1}{2}$ なら $r=1$ で、$c(w,q)=q\,(w_1/a)^{1/2}(w_2/b)^{1/2}=2q\sqrt{w_1 w_2}$ です。$w=(1,4)$、$q=2$ を代入すると $c=2\cdot 2\cdot\sqrt{4}=8$ で、図 3.1 の値と一致します。

補足：この章の知識が生きる場面

- 費用関数 → 寡占のモデル（第4巻第3章のクールノー競争）、規制や独占の分析。
- 限界費用と乗数 → 価格＝限界費用の効率性条件、第二基本定理の生産版。
- 規模の経済と費用 → 自然独占、参入障壁、国際貿易の新貿易理論。

要点

- 費用最小化は支出最小化と同じ構造で、費用関数は要素価格について1次同次・凹関数です。
- シェパードの補題 $\partial c/\partial w_\ell = z_\ell$ により、費用関数から条件付き要素需要が得られます。
- 費用最小化の乗数は限界費用 $\partial c/\partial q$ に等しくなります。
- 収穫一定なら費用は生産量に比例し、生産関数が凹なら費用は生産量について凸になります。

次の章へ　次の章では、費用関数を使って利潤最大化を「生産量の選択」に帰着させ、供給曲線を導きます。短期と長期の違いも扱います。

大学院とのつながり　費用関数の推定（トランスログ費用関数など）は、産業組織論の実証分析で規模の経済を測る標準的な方法です。

第4章

費用関数と供給：短期と長期

ここまでの流れ　前の章で、費用関数 $c(w,q)$ とその性質を学びました。
この章の問い　費用関数が分かれば、企業の供給曲線はどう求められるのでしょうか。一部の投入物を変えられない短期と、すべてを変えられる長期では、何が違うのでしょうか。
この章で分かること　利潤最大化の2段階法、限界費用と平均費用の関係、短期費用と長期費用（包絡線としての長期費用曲線）、短期と長期の供給曲線。

4.1　利潤最大化の2段階法

産出物が1種類のとき、利潤最大化は次の2段階に分けられます。

1. 各生産量 q について、それを最も安く作る方法を求める（費用最小化、費用 $c(w,q)$）。
2. 収入と費用の差が最大になる生産量を選ぶ。

命題 4.1（2段階法）

利潤関数は

$$\pi(p,w) = \max_{q \geq 0} \left\{ p\,q - c(w,q) \right\} \tag{4.1}$$

と表せる。最適な生産量を $q(p,w)$ とすると、利潤最大化の要素需要は $z(w, q(p,w))$ である。

証明　任意の z について、$q = f(z)$ とおくと $w \cdot z \geq c(w,q)$ なので、$pf(z) - w \cdot z \leq pq - c(w,q) \leq$ 式 (4.1) の右辺です。逆に、右辺を達成する q と、それを最小費用で作る $z(w,q)$ を選べば、左辺の利潤として右辺の値が実現します。　□

補足：ここが大事　多次元の問題を1次元に落とす

2段階法は、多くの投入物を選ぶ問題を「生産量 q だけを選ぶ1次元の問題」に変えてくれます。費用関数 $c(w,q)$ さえ分かれば、技術の細かい中身を知らなくても、供給は「価格＝限界費用」から求められます。産業組織論や国際貿易のモデルで、企業を費用関数だけで表すことが多いのはこのためです。

内点解では、2段階目の一階条件と二階条件は

$$p = \frac{\partial c}{\partial q}(w, q^*), \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial q^2}(w, q^*) \geq 0 \tag{4.2}$$

です。「価格＝限界費用」となる生産量を選び、そこで限界費用が増加している必要があります。

4.2 平均費用と限界費用

定義 4.2（平均費用・限界費用）

$AC(q) = c(w,q)/q$ を平均費用、$MC(q) = \frac{\partial c}{\partial q}(w,q)$ を限界費用という。

命題 4.3（限界費用は平均費用の最小点を通る）

AC が微分可能ならば、$AC'(q) = \dfrac{MC(q) - AC(q)}{q}$ である。したがって、AC が最小となる内点では $MC = AC$ である。

証明　商の微分法から

$$\begin{aligned} AC'(q) &= \frac{q\,MC(q) - c(w,q)}{q^2} && \left((c/q)' = (qc' - c)/q^2\right) \\ &= \frac{MC(q) - AC(q)}{q} && \text{（分子と分母を } q \text{ で割る）} \end{aligned}$$

です。最小点では $AC' = 0$ なので $MC = AC$ です。 □

数式の読み方

- 限界費用が平均費用より低い間は、追加の1単位が平均を引き下げるので平均費用は下がり、高くなると平均費用は上がります。テストの平均点と、次に受ける1回の点数の関係と同じです。

4.3 短期費用と長期費用

短期には、工場の規模（資本）のように変えられない投入物があります。投入物2を $\bar{z}_2$ に固定した短期の費用関数を

$$c_s(w, q; \bar{z}_2) = \min_{z_1 \geq 0} \left\{ w_1 z_1 + w_2 \bar{z}_2 \right\} \quad \text{s.t.} \quad f(z_1, \bar{z}_2) \geq q \tag{4.3}$$

とします。$w_2\bar{z}_2$ は生産量によらない固定費用です。

命題 4.4（長期費用は短期費用の包絡線）

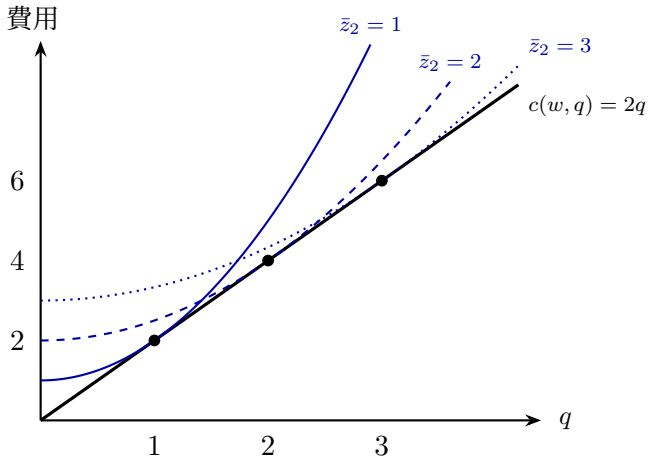
1. 任意の q と $\bar{z}_2$ について $c_s(w,q;\bar{z}_2) \geq c(w,q)$ であり、$\bar{z}_2 = z_2(w,q)$ のとき等号が成り立つ。

2. $\bar{q}$ で長期に最適な規模 $\bar{z}_2 = z_2(w,\bar{q})$ をとり、費用関数が微分可能ならば、$\bar{q}$ で $\frac{\partial c_s}{\partial q}(w,\bar{q};\bar{z}_2) = \frac{\partial c}{\partial q}(w,\bar{q})$ である。

証明　1：短期の問題は、長期の問題に「$z_2 = \bar{z}_2$」という制約を加えたものなので、最小値は長期以上です。$\bar{z}_2$ が長期の最適値なら、その制約は効いていないので最小値は等しくなります。

2：関数 $g(q) = c_s(w,q;\bar{z}_2) - c(w,q)$ は1より $g \geq 0$、$g(\bar{q}) = 0$ なので $\bar{q}$ で最小値をとり、$g'(\bar{q}) = 0$ です。 □

図 4.1　短期費用曲線と長期費用曲線（包絡線）



$f(z) = z_1^{1/2} z_2^{1/2}$、$w = (1,1)$。短期費用は $c_s = q^2/\bar{z}_2 + \bar{z}_2$（$\bar{z}_2 = 1,2,3$）、長期費用は $c = 2q$。接点は $q = \bar{z}_2$。

図の読み方

1. 黒い直線が長期費用曲線、青い曲線が工場の規模 $\bar{z}_2$ を固定した短期費用曲線です。短期費用曲線の縦軸切片 $\bar{z}_2$ は固定費用です。

2. どの短期費用曲線も長期費用曲線の上にあり、その規模が最適になる生産量（$q = \bar{z}_2$、黒い点）で長期費用曲線に接しています。長期費用曲線は短期費用曲線の「下側の包絡線」です。

3. 接点では傾き（限界費用）も等しくなっています。これは包絡線定理の一例です。この例は収穫一定なので、長期費用曲線は直線になります。

補足：ここが大事　ル・シャトリエの原理

長期は短期より選べる変数が多いので、価格の変化に対する反応は長期の方が大きく（少なくとも同じに）なります。たとえば産出価格が上がったとき、長期の供給の増加は短期の供給の増加以上です。これをル・シャトリエの原理といい、「制約が少ないほど、最適化する主体はより大きく反応する」という一般的な性質です。この章の包絡線の図（短期費用曲線が長期費用曲線に接し、その外側では高い）は、この原理の費用面での表れです。

4.4　短期の供給曲線

短期には固定費用 $F = w_2\bar{z}_2$ は生産しなくてもかかるので、短期費用を $c_s(q) = c_v(q) + F$ と、可変費用 c_v と固定費用に分けます。

命題 4.5（短期の供給）

短期において、企業は価格 p が平均可変費用 $AVC(q) = c_v(q)/q$ の最小値以上なら $p = MC(q)$（かつ MC が増加している部分）となる q を生産し、それ未満なら生産をやめる（$q = 0$）。

証明　生産をやめると利潤は $-F$ です。$q > 0$ を生産すると利潤は $pq - c_v(q) - F$ で、これが $-F$ 以上であるための条件は $pq \geq c_v(q)$、つまり $p \geq AVC(q)$ です。したがって、p が AVC の最小値を下回るなら、どの $q > 0$ でも生産しない方が良くなります。そうでなければ、式 (4.2) から $p = MC$ となる量を選びます。　□

図 4.2　短期の費用曲線と供給曲線

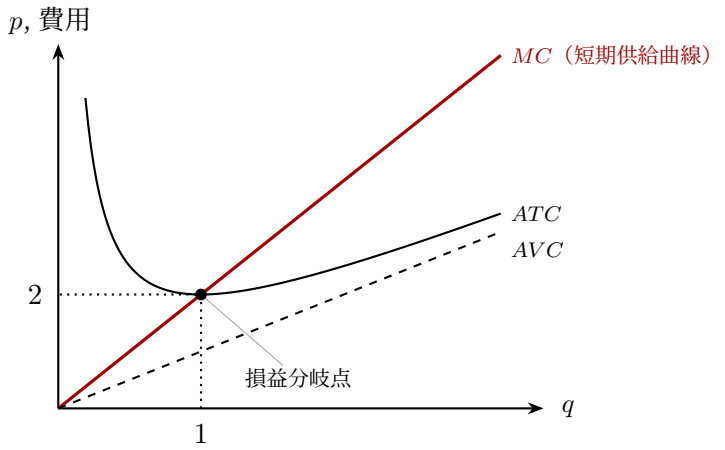


図 4.1 の $\bar{z}_2 = 1$ の場合：$c_s = q^2 + 1$。$MC = 2q$、$AVC = q$、平均総費用 $ATC = q + 1/q$。

図の読み方

1. 赤い直線が限界費用 MC、実線が平均総費用 ATC、破線が平均可変費用 AVC です。MC は ATC の最小点 $(1, 2)$ を通ります。
2. この例では AVC の最小値は 0 なので、どんな正の価格でも生産し、短期供給曲線は MC そのもの、つまり $q = p/2$ です。
3. 価格が 2（ATC の最小値、損益分岐点）を下回ると利潤は負になりますが、固定費用はどうせかかるので、短期には生産を続けた方が損失が小さくなります。

4.5 長期の供給曲線

長期にはすべての投入物を調整でき、固定費用はありません。この例は収穫一定で長期費用が $c = 2q$ なので、長期の平均費用も限界費用も 2 で一定です。

計算例：収穫一定の長期供給

利潤は $pq - 2q = (p-2)q$ なので、長期の供給は

$$q(p) = \begin{cases} 0 & (p < 2) \\ [0, \infty) & (p = 2) \\ \text{存在しない（利潤が無限大）} & (p > 2) \end{cases}$$

となります。長期供給曲線は価格 2 の水平線で、均衡では利潤がゼロになります。第2章の補足で述べた「収穫一定なら利潤は 0 か無限大」の具体例です。

補足：この章の知識が生きる場面

- 価格＝限界費用と操業停止条件 → 完全競争市場の短期・長期均衡、参入と退出。
- 包絡線としての長期費用 → 包絡線定理（『経済数学』第6章）の具体例、投資と資本調整費用のモデル。
- 収穫一定の長期供給 → 一般均衡でのゼロ利潤条件。

要点

- 利潤最大化は、費用最小化と生産量の選択の2段階に分けられ、内点解では「価格＝限界費用」となります。
- 限界費用は平均費用の最小点を通ります。
- 長期費用曲線は短期費用曲線の下側の包絡線で、接点では限界費用も等しくなります。
- 短期には価格が平均可変費用の最小値以上なら生産を続け、限界費用曲線が供給曲線になります。

次の章へ　最後の章では、多くの企業の供給をまとめた市場全体の供給と、利潤最大化と効率性の関係を学びます。

大学院とのつながり　短期と長期の区別は、産業組織論の参入・退出や、マクロ経済学の資本調整費用のモデルの基礎になります。

第5章

集計と効率性

ここまでの流れ　ここまでは一つの企業の行動を学びました。
この章の問い　多くの企業の供給を足し合わせた市場全体の供給は、一つの大きな企業の供給とみなせるでしょうか。また、利潤最大化は社会的に無駄のない生産をもたらすでしょうか。
この章で分かること　供給の集計定理、生産の効率性、利潤最大化と効率性の関係（両方向）。

5.1　供給の集計

J 個の企業があり、企業 j の生産集合を Y_j、利潤関数を $\pi_j(p)$、供給対応を $y_j(p)$ とします。経済全体の生産集合を、各企業の生産ベクトルの和の集合

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_J = \left\{ \sum_{j=1}^{J} y_j : y_j \in Y_j \ (j = 1, \ldots, J) \right\} \tag{5.1}$$

と定めます。

定理 5.1（集計定理）

任意の価格 $p \gg 0$ について、

$$\pi(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p), \qquad y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p) \tag{5.2}$$

が成り立つ。ここで $\pi(p)$、$y(p)$ は、集計された生産集合 Y についての利潤関数と供給対応であり、右辺の和は集合の和を表す。

証明

ステップ1　利潤関数

Y の任意の点は $y = \sum_j y_j$（$y_j \in Y_j$）と書けるので、

$$\begin{aligned} p \cdot y &= \sum_j p \cdot y_j && \text{（内積の線形性）} \\ &\leq \sum_j \pi_j(p) && \text{（各企業の最大利潤以下）} \end{aligned}$$

です。各企業が最適な $y_j \in y_j(p)$ を選べば等号が成り立つので、$\pi(p) = \sum_j \pi_j(p)$ です。

ステップ2　供給対応

$y_j \in y_j(p)$ の和は利潤 $\sum_j \pi_j(p) = \pi(p)$ を達成するので $y(p)$ に入ります。逆に、$y = \sum_j y_j \in y(p)$ なら、ある企業 j で $p \cdot y_j < \pi_j(p)$ だとすると、ステップ1の不等式が厳密になり $p \cdot y < \pi(p)$ となって矛盾します。よって各 $y_j \in y_j(p)$ です。　□

数式の読み方：集計定理の意味

- 価格受容的な企業の集まりは、全員の技術をまとめた「一つの代表的な企業」と同じように行動します。各企業がばらばらに利潤を最大化した結果は、全体の利潤を最大化した結果に等しいのです。
- このため、市場全体の供給も、利潤関数の凸性・ホテリングの補題・供給の法則をすべて満たします。

発展：消費者の集計との違い

消費者の需要の集計はずっと難しい問題です。総需要が価格と「総所得」だけの関数として書け、一人の代表的消費者の需要とみなせるのは、すべての消費者の間接効用関数が特別な形（ゴーマン形 $v_i(p, w_i) = a_i(p) + b(p)w_i$）をしているときに限られます。所得の再分配が総需要を変えてしまうからです。企業には予算制約（所得効果）がないので、この問題が生じません。

補足：ここが大事　「代表的企業」を使ってよい理由

マクロ経済学や一般均衡の応用では、多くの企業を一つの「代表的企業」で置きかえることがよくあります。集計定理は、価格受容的な企業についてはこの置きかえが正確に成り立つことを保証します。消費者については同じことが一般には成り立たない（発展を参照）ので、「代表的消費者」を使うときには、選好についての特別な仮定が暗に置かれていることに注意が必要です。

5.2　生産の効率性

次に、利潤最大化が社会的に「無駄のない」生産をもたらすかを考えます。

定義 5.2（効率的な生産ベクトル）

$y \in Y$ が効率的であるとは、$y' \geq y$ かつ $y' \neq y$ となる $y' \in Y$ が存在しないことをいう。

数式の読み方

- 効率的な生産ベクトルでは、他の財の産出を減らしたり投入を増やしたりせずに、ある財の産出を増やす（または投入を減らす）ことができません。
- 2つの産出物の場合、効率的な点の集まりが生産可能性フロンティアです。

定理 5.3（利潤最大化は効率的）

$p \gg 0$ のもとで $y \in y(p)$ ならば、y は効率的である。

証明　$y' \in Y$ で $y' \geq y$、$y' \neq y$ だとすると、$y' - y \geq 0$ でどこかの成分が正なので、$p \gg 0$ より

$$p \cdot y' - p \cdot y = p \cdot (y' - y) > 0 \qquad \text{（正の価格と、非負で 0 でないベクトルの内積）}$$

です。これは y が利潤最大であることに矛盾します。　□

逆向きの主張には凸性が必要です。これは、第3巻で学ぶ厚生経済学の第二基本定理の「生産版」です。

定理 5.4（効率的な生産は利潤最大化で実現できる）

Y が凸集合で自由処分を満たし、$y \in Y$ が効率的ならば、ある $p \geq 0$（$p \neq 0$）が存在して、$y \in y(p)$、つまりすべての $y' \in Y$ で $p \cdot y' \leq p \cdot y$ が成り立つ。

証明のアイデア

効率的な点 y は生産集合の境界上にあります。凸集合の境界上の点では、支持超平面定理によって、集合全体を片側に含む超平面を引けます。その法線ベクトルが、y を利潤最大にする価格です。

証明

ステップ1　y は内点ではない

y が Y の内点なら、$e = (1, \ldots, 1)$ と小さな $\varepsilon > 0$ について $y + \varepsilon e \in Y$ です。これは $y + \varepsilon e \geq y$、$\neq y$ なので効率性に反します。

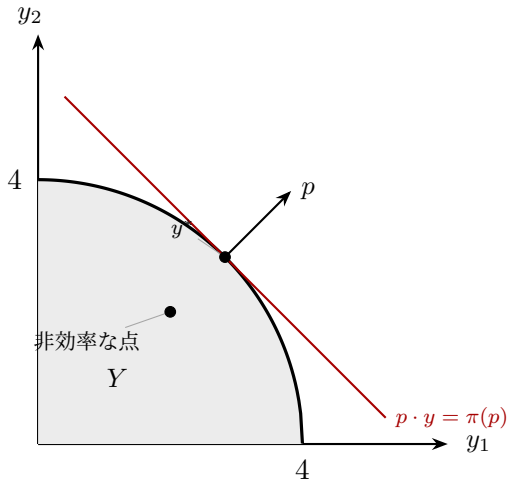
ステップ2　支持超平面定理を使う

Y は凸集合で、y はその内点ではないので、支持超平面定理より、ある $p \neq 0$ が存在して、すべての $y' \in Y$ で $p \cdot y' \leq p \cdot y$ です。

ステップ3　$p \geq 0$

ある $p_\ell < 0$ だとします。自由処分より、$y' = y - te_\ell$（e_ℓ は第 ℓ 成分だけ 1 の単位ベクトル、$t > 0$）は Y に入ります。しかし $p \cdot y' = p \cdot y - tp_\ell > p \cdot y$ となり、ステップ2に反します。よって $p \geq 0$ です。　□

図 5.1　生産可能性フロンティアと価格



2つの産出物の生産可能性集合（投入は一定）$\{y \geq 0 : y_1^2 + y_2^2 \leq 16\}$。$p = (1, 1)$ のとき利潤を最大にする点は $y^* = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$、最大利潤は $4\sqrt{2} \approx 5.66$。

図の読み方

1. 灰色の領域が生産可能な産出の組、黒い曲線が効率的な点の集まり（生産可能性フロンティア）です。$(2, 2)$ のような内側の点は、両方の産出を同時に増やせるので非効率です。

2. 赤い直線は価格 p のもとでの等収入線で、フロンティアに y^* で接しています。y^* は利潤を最大にし、効率的です（前者の定理）。

3. 生産可能性集合が凸なので、フロンティア上のどの点についても、そこで接する直線（価格）を見つけられます（後者の定理）。フロンティアが内側にへこんでいると、へこんだ部分の点はどんな価格でも利潤最大にならず、この定理は成り立ちません。

補足：ここが大事　厚生経済学の基本定理の「生産版」

この章の2つの定理は、第3巻の厚生経済学の基本定理の生産部分です。

- 「利潤最大化は効率的」→ 第一基本定理（市場均衡は効率的）。証明に凸性を使わないことも共通しています。
- 「効率的な生産は利潤最大化で実現できる」→ 第二基本定理（効率的配分は市場で実現できる）。証明に凸性と支持超平面定理を使うことも共通しています。

「一方向には凸性がいらず、逆方向には凸性が必要」という非対称性を覚えておくと、第3巻の議論がずっと見通しよくなります。

補足：この章の知識が生きる場面

- 集計定理 → 一般均衡の生産部分、マクロ経済学の代表的企業。
- 生産の効率性と価格 → 第3巻の第一・第二基本定理、国際貿易の比較優位（生産可能性フロンティアと相対価格）。
- 支持超平面定理 → 『経済数学』第4章で学んだ定理の、最も直接的な経済学への応用。

要点

- 価格受容的な企業の総供給は、全企業の技術をまとめた一つの企業の供給と同じです（集計定理）。
- 正の価格のもとで利潤を最大化する生産は、必ず効率的です。
- 生産集合が凸なら、どの効率的な生産も、ある価格のもとでの利潤最大化として実現できます。証明には支持超平面定理を使います。

この巻のまとめ　生産集合から出発し、利潤関数とホテリングの補題、費用関数とシェパードの補題、短期と長期の供給、集計と効率性を学びました。序章の地図（図 序.1）の矢印をすべて自分で説明できるか確かめてください。

次の巻へ　第3巻では、消費者と企業を市場でつなぐ一般均衡理論を学びます。この章の2つの定理は、厚生経済学の第一・第二基本定理の生産版になっています。