大学院ミクロ経済学 攻略マニュアル

第1巻　選好・効用と消費者理論

選好関係からスルツキー方程式・厚生測度まで

目次

序　消費者理論の全体地図　4

序.1 なぜ混乱しやすいのか 4

序.2 4つの関数の地図 4

序.3 この巻の流れ 6

1　選好関係　7

1.1　選好関係とは 7

1.2　合理性：完備性と推移性 8

1.3　単調性と局所非飽和性 9

1.4　無差別集合と上方集合 11

1.5　凸性 11

1.6　連続性 13

2　効用関数　16

2.1　効用関数による表現 16

2.2　効用の序数性 17

2.3　効用関数の存在 18

2.4　選好の性質と効用関数の性質 21

2.5　代表的な効用関数 22

3 効用最大化とマーシャル需要 23

3.1 効用最大化問題 23

3.2 マーシャル需要の基本性質 24

3.3 一階条件による需要の求め方 26

3.4 コブ＝ダグラス型の需要 28

3.5 需要の微分が満たす関係式 28

4 間接効用関数とロイの恒等式 32

4.1 間接効用関数 32

4.2 ラグランジュ乗数の意味 35

4.3 ロイの恒等式 36

4.4 コブ＝ダグラス型の場合 38

5 支出最小化・ヒックス需要・支出関数 40

5.1 支出最小化問題 40

5.2 ヒックス需要の性質 42

5.3 支出関数の性質 42

5.4 シェパードの補題 45

5.5 補償需要の法則 46

5.6 コブ＝ダグラス型の場合 48

6 双対性：2つの問題を結ぶ 50

6.1 同じ接点を2つの方向から見る 50

6.2 双対性によるロイの恒等式 53

6.3 1つの関数から残りを求める 54

7 スルツキー方程式 56

7.1 代替効果と所得効果 56

7.2 スルツキー方程式 57

7.3 スルツキー行列とその性質 59

7.4 ギッフェン財 62

7.5 コブ＝ダグラス型での確認 63

8 顕示選好と厚生測度 **65**

8.1 顕示選好の弱公理 65

8.2 補償変分と等価変分 68

8.3 ヒックス需要曲線の左側の面積 68

序章

消費者理論の全体地図

> **この章の問い**　大学院の消費者理論では、マーシャル需要・ヒックス需要・間接効用関数・支出関数・スルツキー方程式と、似た名前の概念が次々に現れます。これらはどのような関係にあるのでしょうか。
> **この章で分かること**　この巻の全体像。2つの最適化問題（効用最大化と支出最小化）と、そこから生まれる4つの関数の関係。

序.1　なぜ混乱しやすいのか

学部のミクロ経済学では、消費者の行動を「予算制約のもとで効用を最大にする」という一つの問題として学びました。大学院の消費者理論が難しく感じられるのは、これに加えて「ある効用水準を、できるだけ安く達成する」という**もう一つの問題**を同時に扱い、2つの問題を行き来しながら議論を進めるからです。

2つの問題は、それぞれ「最適な消費（需要）」と「最適な値」の2種類の答えを生みます。したがって、全部で $2 \times 2 = 4$ つの関数が現れます。

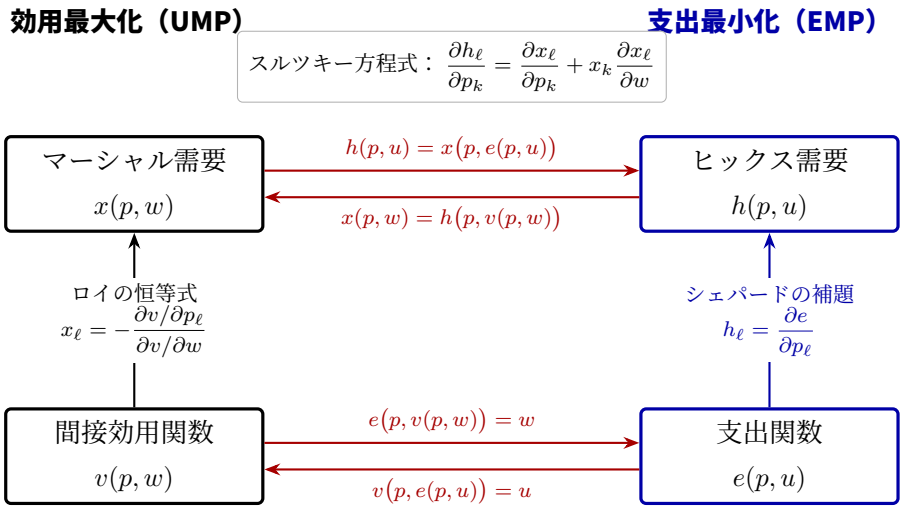
問題	与えられるもの	最適な消費	最適な値
効用最大化（UMP）	価格 p、所得 w	マーシャル需要 $x(p, w)$	間接効用関数 $v(p, w)$
支出最小化（EMP）	価格 p、効用水準 u	ヒックス需要 $h(p, u)$	支出関数 $e(p, u)$

混乱を防ぐ一番のコツは、新しい概念が出てきたときに「これは表のどこにあるのか」「何を与えられて、何を答えているのか」を確かめることです。

序.2　4つの関数の地図

この巻の後半（第3章〜第7章）で学ぶ内容を、1枚の図にまとめておきます。今はすべてを理解できなくてかまいません。各章を読み終えるたびにこの図に戻り、どの矢印を学んだのかを確認してください。

図 序.1　消費者理論の4つの関数の地図



黒は効用最大化、青は支出最小化から生まれる関数。赤い矢印は2つの問題をつなぐ双対性の関係式。

図の読み方

1. 左の列（黒）が効用最大化問題、右の列（青）が支出最小化問題から生まれる関数です。上の段が「最適な消費」、下の段が「最適な値」です。

2. 縦の矢印は、下の段の関数（値）を微分すると上の段の関数（需要）が得られる、という関係です。左がロイの恒等式（第4章）、右がシェパードの補題（第5章）です。

3. 横の赤い矢印は、2つの問題が「表と裏」の関係にあることを表す双対性の関係式です（第6章）。たとえば $e(p, v(p,w)) = w$ は「所得 w で達成できる最大の効用を、最も安く達成する費用はちょうど w」という意味です。

4. 上の段の2つの需要をつなぐのがスルツキー方程式（第7章）です。これは、価格変化の効果を「代替効果」と「所得効果」に分ける式です。

序.3　この巻の流れ

章	内容	答える問い
第1章	選好関係	「好み」を数学でどう表すか
第2章	効用関数	好みを数値で表せるのはいつか
第3章	効用最大化とマーシャル需要	消費者は何をどれだけ買うか
第4章	間接効用関数とロイの恒等式	価格と所得で達成できる効用はどれだけか
第5章	支出最小化・ヒックス需要・支出関数	ある効用を達成する最小費用はいくらか
第6章	双対性	2つの問題はどう結びついているか
第7章	スルツキー方程式	価格変化の効果はどう分解できるか
第8章	顕示選好と厚生測度	観察された選択から何が言えるか、価格変化で人はどれだけ得をするか

補足：この巻で使う数学

この巻では、集合と量化子、コンパクト性と連続性（最大値定理）、準凹性、陰関数定理、ラグランジュ法とKKT条件、包絡線定理を使います。いずれも『大学院ミクロのための経済数学 攻略マニュアル』で扱った道具です。必要になったところで、どの道具を使っているかを明記します。

補足：計算例で使う関数

この巻では、抽象的な議論を確かめるために、コブ＝ダグラス型効用関数 $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$（$0 < \alpha < 1$）を繰り返し使います。各章でこの関数の需要・間接効用・支出関数を順に求め、最後にすべての関係式が成り立つことを確かめます。

要点

- 消費者理論は、効用最大化（UMP）と支出最小化（EMP）の2つの問題からなります。
- それぞれの問題が「最適な消費」と「最適な値」を生むので、4つの関数 $x(p, w)$、$v(p, w)$、$h(p, u)$、$e(p, u)$ が現れます。
- 4つの関数は、ロイの恒等式・シェパードの補題・双対性の関係式・スルツキー方程式で結ばれています。

次の章へ　2つの最適化問題に入る前に、その出発点である「消費者の好み」を、数学的に正確に表すことから始めます。

第1章

選好関係

ここまでの流れ　序章で、消費者理論の全体像（2つの最適化問題と4つの関数）を見渡しました。
この章の問い　「消費者の好み」を数学的に表すには、どのような道具と仮定が必要でしょうか。また、それぞれの仮定は経済学的に何を意味するのでしょうか。
この章で分かること　選好関係の定義と合理性（完備性・推移性）、単調性と局所非飽和性、凸性、連続性。

1.1　選好関係とは

学部では、消費者の好みを最初から効用関数 $u(x)$ で表していました。しかし、人が頭の中に数値を持っていると考えるのは不自然です。人ができるのは、2つの選択肢を比べて「どちらが好ましいか」を答えることでしょう。大学院のミクロ経済学では、この「比べる」という行為そのものを出発点にします。

財が L 種類あり、消費者は消費集合 $X = \mathbb{R}^L_+$ の中から財の組（消費ベクトル）を選ぶとします。

定義 1.1（選好関係）
X 上の選好関係 $\succsim$ とは、X の2つの要素 x, y の組について「$x \succsim y$ が成り立つかどうか」を定める二項関係である。$x \succsim y$ は「x は y と少なくとも同じくらい好ましい」と読む。

$\succsim$ から、さらに2つの関係を定義します。

定義 1.2（強い選好と無差別）

- $x \succ y$（x は y より好ましい）とは、$x \succsim y$ であり、かつ $y \succsim x$ でないことをいう。
- $x \sim y$（x と y は無差別）とは、$x \succsim y$ かつ $y \succsim x$ であることをいう。

数式の読み方

- $\succsim$ は「$\geq$」、$\succ$ は「$>$」、$\sim$ は「$=$」に似た記号です。ただし数の大小とは違い、何と何が比べられるかは仮定次第です。
- 消費者について私たちが知っているのは、「どの組とどの組を比べてどう答えるか」の全体、つまり関係 $\succsim$ だけです。

1.2 合理性：完備性と推移性

どんな比べ方でも選好関係と呼べるわけではありません。経済学で「合理的」な消費者というとき、次の2つを仮定します。

定義 1.3（合理的な選好）

選好関係 $\succsim$ が次の2つを満たすとき、合理的であるという。

1. （完備性）任意の $x, y \in X$ について、$x \succsim y$ または $y \succsim x$（両方でもよい）。
2. （推移性）任意の $x, y, z \in X$ について、$x \succsim y$ かつ $y \succsim z$ ならば $x \succsim z$。

数式の読み方：2つの仮定の意味

- 完備性は「どの2つの組についても、比べて答えを出せる」という仮定です。迷って答えられない組はない、ということです。完備性で $x = y$ とおくと $x \succsim x$ が得られます（反射性）。
- 推移性は「好みに循環がない」という仮定です。$x \succsim y$、$y \succsim z$ なのに $z \succ x$ だと、消費者は z から y、y から x、x から z へと、際限なく交換を続けたくなってしまいます。

補足：ここが大事　なぜ「合理性」を最初に仮定するのか

完備性と推移性は、「最も好ましいもの」という言葉に意味を与えるための仮定です。選択肢が有限個なら、合理的な選好のもとでは必ず最も好ましい選択肢が存在します（比べて勝ち残ったものを次々に比べていけばよい）。推移性がないと、$x \succ y \succ z \succ x$ のように循環し、「最も好ましいもの」が存在しないことがあります。大学院ミクロのすべての最適化問題（効用最大化、支出最小化、最適反応）は、この合理性を前提にしています。

命題 1.4（強い選好と無差別の性質）

$\succsim$ が合理的ならば、次が成り立つ。

1. $\succ$ は推移的で、$x \succ x$ となる x はない。
2. $\sim$ は反射的（$x \sim x$）、対称的（$x \sim y$ ならば $y \sim x$）、推移的である。
3. $x \succ y$ かつ $y \succsim z$ ならば $x \succ z$。

証明（3の証明）

方針　結論 $x \succ z$ は「$x \succsim z$」と「$z \succsim x$ でない」の2つからなるので、それぞれを示します。

ステップ1　$x \succsim z$

$x \succ y$ から $x \succsim y$ です。これと $y \succsim z$ に推移性を使うと $x \succsim z$ です。

ステップ2　$z \succsim x$ でない

仮に $z \succsim x$ とします。$y \succsim z$ と $z \succsim x$ に推移性を使うと $y \succsim x$ となります。これは $x \succ y$（$y \succsim x$ でない）に矛盾します。

1と2も、同じように定義と推移性から示せます。　□

補足：推移性が成り立たない例

3人 A, B, C が3つの選択肢 x, y, z について、A は $x \succ y \succ z$、B は $y \succ z \succ x$、C は $z \succ x \succ y$ という好みを持つとします。多数決で「グループの好み」を決めると、x は y に2対1で、y は z に2対1で、z は x に2対1で勝ち、循環が生じます（コンドルセのパラドックス）。個人の好みが合理的でも、集団の好みは合理的になるとは限りません。

1.3　単調性と局所非飽和性

次に、「財は多いほどよい」という性質を表す仮定を考えます。ベクトルの大小について、$x \geq y$ はすべての成分で $x_\ell \geq y_\ell$、$x \gg y$ はすべての成分で $x_\ell > y_\ell$ を表すのでした。

定義 1.5（単調性・強単調性）

- $x \gg y$ ならば $x \succ y$ となるとき、$\succsim$ は単調であるという。
- $x \geq y$ かつ $x \neq y$ ならば $x \succ y$ となるとき、$\succsim$ は強単調であるという。

数式の読み方

- 単調性は「すべての財が増えれば、より好ましい」、強単調性は「どれか一つの財でも増えれば（他が減らなければ）、より好ましい」という仮定です。強単調性の方が強い仮定です。
- 完全補完財の選好（$u = \min\{x_1, x_2\}$）は単調ですが、強単調ではありません。x_1 だけを増やしても満足が増えないからです。

実は、消費者理論の多くの結果に必要なのは、単調性よりずっと弱い次の性質だけです。

定義 1.6（局所非飽和性）

任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ について、$\|y - x\| < \varepsilon$ かつ $y \succ x$ となる $y \in X$ が存在するとき、$\succsim$ は局所非飽和であるという。

数式の読み方

- 「どんな組 x のすぐ近くにも、x より好ましい組がある」という意味です。「どの方向に動けばよいか」は指定していないので、ある財が嫌いな財（ごみなど）であってもかまいません。
- 局所非飽和性が成り立たないのは、「これ以上何も変えたくない」という飽和点があるときです。
- この性質は、第3章で「予算を使い切る」こと（ワルラス法則）を示すときに中心的な役割を果たします。

命題 1.7（単調ならば局所非飽和）

$\succsim$ が単調ならば、局所非飽和である。

証明　任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとり、$e = (1, \ldots, 1)$、$y = x + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{L}} e$ とおきます。y はすべての成分で x より大きいので $y \gg x$ であり、単調性から $y \succ x$ です。また

$$\begin{aligned} \|y - x\| &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{L}} \|e\| && (y - x \text{ を代入}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{L}} \sqrt{L} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon && (\|e\| = \sqrt{L}) \end{aligned}$$

です。$y \in X$ でもあるので、局所非飽和性が成り立ちます。 □

補足：ここが大事　局所非飽和性は「予算を使い切る」と読む

局所非飽和性は、大学院ミクロで最も頻繁に使われる仮定の一つですが、使われ方はほぼ一つです。「予算（や資源）に余りがあれば、そのすぐ近くにもっと好ましい組があるので、余りを残すことは最適でない」。局所非飽和性が出てきたら「予算を使い切る」と読み替えてください。この仮定は次の結果で使われます。

- ワルラス法則（第3章）と、双対性 $e(p, v(p, w)) = w$（第6章）。
- 厚生経済学の第一基本定理と、ワルラス均衡がコアに属すること（第3巻第4章・第6章）。

1.4　無差別集合と上方集合

選好の形を目で見るために、次の3つの集合を使います。

定義 1.8（無差別集合・上方集合・下方集合）

$x \in X$ について、

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \{y \in X : y \sim x\} && \text{（無差別集合）} \\
U(x) &= \{y \in X : y \succsim x\} && \text{（上方集合）} \\
D(x) &= \{y \in X : x \succsim y\} && \text{（下方集合）}
\end{aligned}
$$

と定める。

数式の読み方

- 2財の場合、無差別集合 $I(x)$ は、x を通る無差別曲線です。
- 上方集合 $U(x)$ は「x と同じかそれ以上に好ましい組」の集まりで、無差別曲線とその右上の領域です。

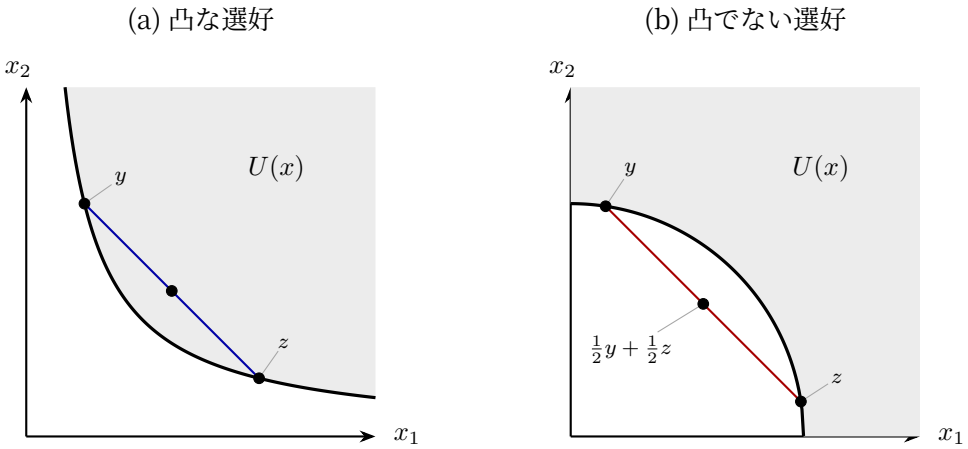
1.5　凸性

学部では「無差別曲線は原点に対して凸」と学びました。大学院では、これを上方集合の凸性として表します。

定義 1.9（凸な選好・狭義凸な選好）

- すべての $x \in X$ について上方集合 $U(x)$ が凸集合であるとき、$\succsim$ は凸であるという。言い換えると、$y \succsim x$ かつ $z \succsim x$ ならば、任意の $\lambda \in [0,1]$ について $\lambda y + (1-\lambda) z \succsim x$。
- $y \succsim x$、$z \succsim x$、$y \neq z$ ならば、任意の $\lambda \in (0,1)$ について $\lambda y + (1-\lambda) z \succ x$ となるとき、$\succsim$ は狭義凸であるという。

図 1.1　凸な選好と凸でない選好



(a) $u = x_1 x_2$ の無差別曲線 $x_1 x_2 = 4$。(b) $u = x_1^2 + x_2^2$ の無差別曲線 $x_1^2 + x_2^2 = 16$。どちらも灰色の領域が上方集合。

図の読み方

1. (a) では、無差別曲線上の2点 y, z を結ぶ線分（青）が、灰色の上方集合の中に入っています。上方集合は凸集合なので、選好は凸です。
2. (b) では、無差別曲線が原点に対して凹（外側にふくらむ形）です。y, z を結ぶ線分（赤）は上方集合の外にはみ出し、中点は y, z より好ましくありません。この選好は凸ではありません。
3. (b) のような選好をもつ消費者は、混ぜ合わせた組より極端な組を好むので、予算の中で片方の財だけを買う端点解を選びます。

数式の読み方：凸性の経済学的意味

- 凸性は「極端な組よりも、混ぜ合わせた組の方が少なくとも同じくらい好ましい」という、多様性を好む性質です。
- 凸性は、限界代替率逓減（x_1 が増えるほど、x_1 を1単位得るために手放してもよい x_2 が減る）の一般化になっています。
- 第3章で見るように、凸性は需要の集合が凸になること、狭義凸性は需要が一つに決まることを保証します。

1.6 連続性

最後の仮定は、好みが「急に変わらない」ことです。

定義 1.10（連続な選好）

すべての $x \in X$ について、上方集合 $U(x)$ と下方集合 $D(x)$ がともに閉集合であるとき、$\succsim$ は連続であるという。

数式の読み方：点列による言い換え

- 閉集合は「収束する点列の極限を逃さない」集合でした。したがって連続性は、「$y^n \succsim x$ がすべての n で成り立ち、$y^n \to y$ ならば $y \succsim x$」（下方集合についても同様）と言い換えられます。
- 「少し好ましい」状態が続く点列の行き先で、急に「好ましくない」に変わることはない、という意味です。

計算例：辞書式選好は連続でない

2財の辞書式選好を、「$x_1 > y_1$、または $x_1 = y_1$ かつ $x_2 \geq y_2$ のとき $x \succsim y$」と定めます。辞書の単語の並び順と同じく、まず第1財で比べ、同じときだけ第2財で比べる好みです。

$y = (1, 1)$ と点列 $x^n = (1 + \frac{1}{n}, 0)$ を考えます。どの n でも $x^n_1 > y_1$ なので $x^n \succ y$ です。ところが極限 $x = (1, 0)$ では $x_1 = y_1$、$x_2 < y_2$ なので $y \succ x$ となります。上方集合 $U(y)$ の点 x^n の極限が $U(y)$ に入らないので、$U(y)$ は閉集合ではなく、この選好は連続ではありません。

発展：辞書式選好と効用関数

辞書式選好は、完備性・推移性・強単調性・狭義凸性をすべて満たしますが、連続性を満たしません。そしてこの選好は、どんな効用関数でも表すことができないことが知られています。理由の概略は次のとおりです。仮に効用関数 u が存在したとすると、各 x_1 について $(x_1, 1) \succ (x_1, 0)$ なので、開区間 $\big(u(x_1, 0),\, u(x_1, 1)\big)$ は空ではありません。また $x_1 < x_1'$ ならば $(x_1', 0) \succ (x_1, 1)$ なので、異なる x_1 に対応する区間は互いに重なりません。各区間は有理数を少なくとも一つ含むので、x_1 の値（非可算個）ごとに異なる有理数（可算個）が対応することになり、矛盾します。次の章では、連続性があれば効用関数が存在することを示します。

補足：ここが大事　どの仮定がどこで効くか

この章の仮定が、この先どの結果に使われるかをまとめておきます。新しい定理を読むときは、「どの仮定を使っているか」を確かめると理解が深まります。

仮定	主に使われる結果
完備性・推移性（合理性）	効用関数による表現（第2章）
連続性	効用関数の存在（第2章）、需要の存在と連続性（第3章）
局所非飽和性	ワルラス法則（第3章）、双対性（第6章）、第一基本定理（第3巻）
凸性・狭義凸性	需要の凸性・一意性（第3章）、均衡の存在と第二基本定理（第3巻）
単調性	効用関数の存在の証明（第2章）、一般均衡の境界条件（第3巻）

補足：この章の知識が生きる場面

- 一般均衡理論（第3巻）では、各消費者の選好にこの章の仮定（連続・凸・強単調など）を置いて、均衡の存在と効率性を示します。
- ゲーム理論（第4巻）の利得関数も、プレーヤーの選好を表す効用関数です。
- 社会的選択理論（アローの不可能性定理）は、「個人の合理的な選好を集めて、合理的な社会の選好を作れるか」を問う分野で、コンドルセのパラドックスはその出発点です。

要点

- 消費者の好みは選好関係 $\succsim$ で表し、合理性として完備性と推移性を仮定します。
- 単調性は「多いほどよい」、局所非飽和性は「すぐ近くにより好ましい組がある」という性質で、単調性から局所非飽和性が従います。
- 凸性は上方集合が凸集合であることで、多様性を好む性質（限界代替率逓減の一般化）です。
- 連続性は上方集合と下方集合が閉集合であることで、辞書式選好は連続でない代表例です。

次の章へ　次の章では、選好関係を数値で表す効用関数がいつ存在するか、そして効用関数のどの性質に意味があるのかを学びます。

大学院とのつながり　完備性・推移性・連続性・局所非飽和性・凸性は、一般均衡理論の存在定理や厚生経済学の基本定理でも、そのまま仮定として使われます。

第2章

効用関数

ここまでの流れ　前の章で、消費者の好みを選好関係 $\succsim$ で表し、合理性・単調性・凸性・連続性という仮定を学びました。
この章の問い　選好関係はいつ数値（効用関数）で表せるのでしょうか。また、効用関数の値の大きさそのものに意味はあるのでしょうか。
この章で分かること　効用関数による選好の表現、効用の序数性、効用関数の存在定理とその証明、選好の性質と効用関数の性質の対応。

2.1　効用関数による表現

選好関係は比べ方の全体なので、そのままでは扱いにくい対象です。もし「好ましいほど大きな数」を各組に割り当てられれば、選好の問題を数の大小の問題に置き換え、微分などの道具を使えるようになります。

定義 2.1（効用関数による表現）

関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が、任意の $x, y \in X$ について

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y) \tag{2.1}$$

を満たすとき、u は選好関係 $\succsim$ を表現するという。u を効用関数という。

数式の読み方

- 「$\iff$」は「同値」、つまり左から右も右から左も成り立つことを表します。「x が y と同じくらい以上に好ましいときに限り、x の効用は y の効用以上」という意味です。
- この式から、$x \succ y \iff u(x) > u(y)$、$x \sim y \iff u(x) = u(y)$ も従います。

命題 2.2（効用関数で表せる選好は合理的）

$\succsim$ が効用関数 u で表現できるならば、$\succsim$ は合理的（完備かつ推移的）である。

証明

ステップ1　完備性

任意の x, y について、実数 $u(x)$ と $u(y)$ は $u(x) \geq u(y)$ か $u(y) \geq u(x)$ のどちらかを満たします。式 (2.1) より $x \succsim y$ か $y \succsim x$ です。

ステップ2　推移性

$x \succsim y$、$y \succsim z$ とすると $u(x) \geq u(y) \geq u(z)$ なので $u(x) \geq u(z)$、つまり $x \succsim z$ です。　□

この命題から、合理性は効用関数が存在するための**必要条件**だと分かります。前の章の辞書式選好の例が示すように、合理性だけでは十分ではありません。

2.2　効用の序数性

効用関数は一つに決まるわけではありません。

命題 2.3（単調増加変換）

u が $\succsim$ を表現し、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加関数ならば、$\tilde{u}(x) = f\big(u(x)\big)$ も $\succsim$ を表現する。

証明　f は狭義単調増加なので、任意の実数 a, b について $a \geq b \iff f(a) \geq f(b)$ です。したがって

$$
\begin{aligned}
x \succsim y &\iff u(x) \geq u(y) && (u \text{ が表現する}) \\
&\iff f\big(u(x)\big) \geq f\big(u(y)\big) && (f \text{ は狭義単調増加}) \\
&\iff \tilde{u}(x) \geq \tilde{u}(y) && (\tilde{u} \text{ の定義})
\end{aligned}
$$

です。　□

数式の読み方：序数的効用

- 効用関数で意味があるのは「どちらが大きいか」という順序だけで、値の大きさや差には意味がありません。このような効用を序数的効用といいます。
- 「x の効用は y の2倍」「効用が10増えた」といった言明は、変換で変わってしまうので意味をもちません。
- 効用関数の性質のうち経済学的に意味があるのは、単調増加変換で変わらない性質（準凹性、限界代替率など）だけです。凹性や限界効用逓減は変換で変わるので、選好そのものの性質ではありません。

計算例：限界代替率は変換で変わらない

$\tilde{u} = f(u)$ とすると、連鎖律より $\tilde{u}_\ell = f'(u)\, u_\ell$ なので

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2} &= \frac{f'(u)\, u_1}{f'(u)\, u_2} && \text{（連鎖律）} \\ &= \frac{u_1}{u_2} && \text{（}f'(u) > 0 \text{ で約分）} \end{aligned}$$

です。たとえば $u = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ と、対数をとった $\tilde{u} = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$ は同じ選好を表し、限界代替率はどちらも $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\dfrac{x_2}{x_1}$ です。計算では、扱いやすい方を自由に選んでかまいません。

補足：ここが大事　「意味のある性質」の見分け方

効用関数の性質を見たら、「単調増加変換をしても変わらないか」を確かめてください。変わらない性質だけが、選好そのものの性質です。

- 意味がある：どちらが大きいかという順序、無差別曲線の形、限界代替率とその逓減、準凹性、需要関数。
- 意味がない：効用の値や差、限界効用の大きさ、限界効用逓減、凹性。

学部で「限界効用逓減の法則」から需要曲線の右下がりを説明したことがあるかもしれませんが、大学院ミクロでは、需要の性質は限界代替率と予算制約だけから導かれます。なお、不確実性を扱う期待効用理論では、効用関数は正の一次変換（$a + bu$、$b > 0$）までしか変えられず、効用の差にも意味が生まれます。

2.3　効用関数の存在

どのような選好なら効用関数で表せるのでしょうか。この節の定理が、効用関数を使ってよいことの根拠です。

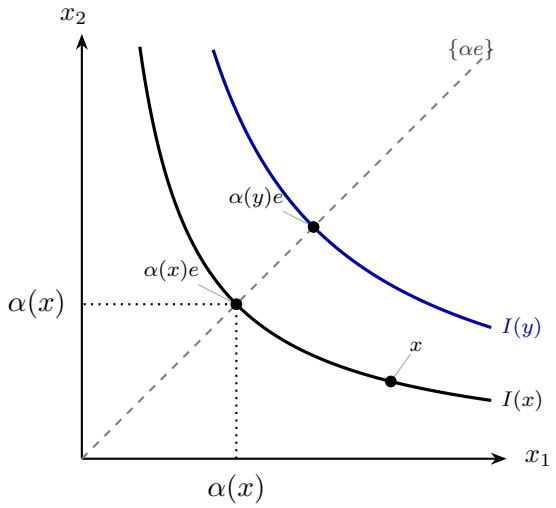
定理 2.4（効用関数の存在）

$X = \mathbb{R}^L_+$ 上の選好関係 $\succsim$ が合理的で、連続かつ単調ならば、$\succsim$ を表現する効用関数が存在する。

証明のアイデア

対角線 $\{\alpha e : \alpha \geq 0\}$（$e = (1, \ldots, 1)$、すべての財を同じ量だけ含む組）を「ものさし」に使います。各組 x について、x と無差別になる対角線上の点 αe をちょうど一つ見つけ、その目盛り α を x の効用とします。無差別曲線が対角線と交わる位置で効用を測る、ということです（図 2.1）。

図 2.1　対角線を使った効用の測り方



選好を x_1x_2 で表される選好とした例。$x=(4,1)$ の無差別曲線 $x_1x_2=4$ は対角線と $(2,2)$ で交わるので $\alpha(x)=2$。$x_1x_2=9$ の無差別曲線上の組 y では $\alpha(y)=3$。

図の読み方

1. 灰色の破線は対角線で、その上の点 $\alpha e=(\alpha,\alpha)$ は、目盛り α が大きいほど（単調性より）好ましくなります。
2. 黒い曲線は x を通る無差別曲線で、対角線と点 $\alpha(x)e$ で交わります。この目盛り $\alpha(x)=2$ を x の効用とします。
3. 青い曲線のように、より好ましい組の無差別曲線は対角線と外側で交わるので、目盛りも大きくなります。こうして選好の順序が目盛りの大小に置き換わります。

証明

方針　各 x について $\alpha e\sim x$ となる α が存在し（ステップ1〜3）、ただ一つであること（ステップ4）を示し、$u(x)=\alpha(x)$ が選好を表現することを確かめます（ステップ5）。

ステップ1　目盛りの2つの集合を作る

$x\in X$ を固定し、

$$A^+=\{\alpha\geq 0:\alpha e\succsim x\},\qquad A^-=\{\alpha\geq 0:x\succsim\alpha e\}$$

とおきます。完備性から、どの $\alpha\geq 0$ も A^+ か A^- の少なくとも一方に入ります。

ステップ2　2つの集合は空でなく、閉集合である

α を x のどの成分よりも大きくとると $\alpha e\gg x$ なので、単調性から $\alpha\in A^+$ です。また、任意の $\varepsilon>0$ で $x+\varepsilon e\gg 0$ なので $x+\varepsilon e\succ 0$ であり、$\varepsilon\to 0$ とすると連続性（上方集合 $U(0)$

が閉集合）より $x \gtrsim 0$、つまり $0 \in A^-$ です。さらに、$\alpha^n \in A^+$、$\alpha^n \to \alpha$ ならば $\alpha^n e \to \alpha e$ で、上方集合 $U(x)$ は閉集合なので $\alpha e \gtrsim x$、つまり $\alpha \in A^+$ です。A^+ は閉集合で、A^- も同様に閉集合です。

ステップ3　無差別な目盛りの存在

$\alpha^* = \inf A^+$ とおくと、A^+ は閉集合なので $\alpha^* \in A^+$ です。$\alpha^* = 0$ なら、$0 \in A^-$ でもあるので $0e \sim x$ です。$\alpha^* > 0$ なら、$0 \leq \alpha < \alpha^*$ のすべての α は A^+ に入らないので A^- に入ります。A^- は閉集合なので、$\alpha \to \alpha^*$ として $\alpha^* \in A^-$ です。いずれの場合も、$\alpha^* \in A^+ \cap A^-$、つまり $\alpha^* e \sim x$ です。

ステップ4　ただ一つであること

$\alpha > \beta$ がともに $\alpha e \sim x$、$\beta e \sim x$ を満たすとすると、推移性から $\alpha e \sim \beta e$ です。しかし $\alpha e \gg \beta e$ なので単調性から $\alpha e \succ \beta e$ となり、矛盾します。そこで、この一つに決まる目盛りを $\alpha(x)$ と書きます。

ステップ5　$u(x) = \alpha(x)$ が選好を表現する

任意の x, y について、$x \sim \alpha(x)e$、$y \sim \alpha(y)e$ と推移性から

$$
\begin{aligned}
x \gtrsim y &\iff \alpha(x)e \gtrsim \alpha(y)e && \text{（無差別な組で置き換える）} \\
&\iff \alpha(x) \geq \alpha(y) && \text{（対角線上では単調性より目盛りの大小と一致）}
\end{aligned}
$$

です。2行目の「$\Leftarrow$」は、$\alpha(x) > \alpha(y)$ なら単調性から $\alpha(x)e \succ \alpha(y)e$、等しければ同じ点であることから、「$\Rightarrow$」は、$\alpha(x) < \alpha(y)$ なら $\alpha(y)e \succ \alpha(x)e$ となり左辺に反することから分かります。　□

発展：連続な効用関数とドブリューの定理

この証明で作った $u(x) = \alpha(x)$ は連続関数であることも示せます。さらに、単調性を仮定しなくても、合理的で連続な選好は連続な効用関数で表現できます（ドブリューの定理）。大学院のミクロでは、これらの定理を根拠に「選好は連続な効用関数 u で表されている」として議論を進めます。

数式の読み方：存在証明の構造を読む

- この証明では、3つの仮定がそれぞれ異なる役割を果たしています。完備性は「どの目盛りも A^+ か A^- に入る」こと、連続性は「A^+ と A^- が閉集合で、境目で重なる」こと、単調性は「対角線上で目盛りの大小と好ましさが一致し、無差別な目盛りが一つに決まる」ことを保証しました。
- 「ものさし（対角線）を用意し、各対象をものさしの上の点と比べて値を決める」という発想は、支出関数を使って効用を金額で測る第8章の厚生測度にもつながっています。

2.4 選好の性質と効用関数の性質

第1章の選好の仮定は、効用関数の性質に次のように対応します。

選好 $\succsim$ の性質	効用関数 u の性質
合理的かつ連続	連続な u で表現できる
単調（強単調）	u は（狭義の意味で）増加関数
局所非飽和	u はどの点の近くでも、より大きな値をとる
凸	u は準凹関数
狭義凸	u は狭義準凹関数

命題 2.5（凸な選好と準凹な効用関数）

u が $\succsim$ を表現するとき、$\succsim$ が凸であることと、u が準凹関数であることは同値である。

証明　u が表現するので、上方集合は $U(x) = \{y : u(y) \geq u(x)\}$ と書けます。準凹関数とは、すべての c について $\{y : u(y) \geq c\}$ が凸集合となる関数でした。$c = u(x)$ とおけば、準凹ならば $U(x)$ は凸、つまり選好は凸です。逆に、選好が凸だとします。任意の c について、$y, z \in \{x : u(x) \geq c\}$ をとり、一般性を失わずに $u(z) \geq u(y)$ とします。このとき y, z はともに上方集合 $U(y)$ に入り、$U(y)$ は凸集合なので $\lambda y + (1-\lambda)z \succsim y$、つまり $u(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq u(y) \geq c$ です。よって $\{x : u(x) \geq c\}$ は凸集合で、u は準凹です。　□

補足：準凹性であって凹性ではない理由

凸な選好に対応するのは、凹性ではなく準凹性です。凹性は単調増加変換で変わってしまう性質で、選好そのものの性質ではないからです。たとえば $u = x_1 x_2$ は凹関数ではありませんが、同じ選好を表す $\sqrt{x_1 x_2}$ は凹関数です。

2.5 代表的な効用関数

この巻で例として使う効用関数をまとめておきます（$a, b > 0$、$0 < \alpha < 1$）。

名前	効用関数	限界代替率 u_1/u_2	特徴
コブ＝ダグラス型	$x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$	$\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\dfrac{x_2}{x_1}$	狭義凸（$x \gg 0$ で）
完全代替	$ax_1 + bx_2$	$\dfrac{a}{b}$（一定）	凸だが狭義凸でない
完全補完	$\min\{ax_1, bx_2\}$	（角では定義されない）	凸、単調だが強単調でない
準線形	$\phi(x_1) + x_2$	$\phi'(x_1)$	x_1 の需要が所得に依存しない

補足：この章の知識が生きる場面

- 効用の序数性 → 第4章の間接効用関数や乗数 λ の値には順序以上の意味がないこと、そして第8章で効用の変化を金額で測る必要が生じること。
- 準凹性 → 需要の凸性と一意性（第3章）、角谷の不動点定理の「値の凸性」（第3巻第3章、第4巻第3章）。
- 期待効用理論（不確実性下の選択）では、序数的効用と基数的効用の違いが中心的な論点になります。

要点

- 効用関数 u は「$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$」によって選好を表現する関数です。
- 効用は序数的で、単調増加変換しても同じ選好を表します。意味があるのは、変換で変わらない性質（順序、準凹性、限界代替率）だけです。
- 合理的・連続・単調な選好は、対角線をものさしにして効用関数で表現できます。
- 凸な選好は、準凹な効用関数に対応します。

次の章へ　選好を効用関数で表せることが分かったので、次の章では、予算制約のもとで効用を最大化する問題と、その解であるマーシャル需要を学びます。

大学院とのつながり　不確実性のもとでの選択（期待効用理論）では、効用の値の差にも意味がある「基数的」な効用が現れます。序数性との違いに注意が必要です。

第3章

効用最大化とマーシャル需要

ここまでの流れ　前の章で、合理的・連続・単調な選好は効用関数 u で表せることを示しました。
この章の問い　価格と所得が与えられたとき、消費者は何をどれだけ買うのでしょうか。その答え（需要）は、どのような性質をもつのでしょうか。
この章で分かること　効用最大化問題（UMP）の定式化と解の存在、マーシャル需要の3つの基本性質（0次同次性・ワルラス法則・凸性と一意性）、KKT条件による需要の求め方、需要の微分が満たす関係式。

3.1　効用最大化問題

消費者は、価格 $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ と所得 $w > 0$ のもとで、予算集合

$$B(p,w) = \{x \in \mathbb{R}^L_{+} : p \cdot x \leq w\}$$

の中から、最も好ましい組を選びます。効用関数 u を使うと、これは次の最適化問題になります。

定義 3.1（効用最大化問題とマーシャル需要）
効用最大化問題（UMP）とは

$$\max_{x \in \mathbb{R}^L_{+}} u(x) \quad \text{s.t.} \quad p \cdot x \leq w \tag{3.1}$$

である。その解の集合 $x(p,w) = \arg\max_{x \in B(p,w)} u(x)$ をマーシャル需要（ワルラス需要）という。解がただ一つのときは、$x(p,w)$ を関数（需要関数）とみなす。

数式の読み方

- $x(p,w)$ の入力は「価格 p と所得 w」で、どちらも観察できる量です。このため、マーシャル需要は「観察できる需要」とも呼ばれます。
- 解が複数あるとき、$x(p,w)$ は対応（集合値の写像）になります。完全代替財で価格比が限界代替率に等しい場合が典型例です。

命題 3.2（解の存在）

u が連続で、$p \gg 0$、$w \geq 0$ ならば、UMP (3.1) は解をもつ。

証明　$p \gg 0$ のとき予算集合 $B(p,w)$ は空でない（0 を含む）コンパクト集合です。連続関数 u はコンパクト集合上で最大値をとるので（ワイエルシュトラスの最大値定理）、解が存在します。 □

3.2　マーシャル需要の基本性質

需要を具体的に計算する前に、選好の仮定だけから導かれる性質を見ておきます。これらは効用関数の形によらず成り立つので、需要理論の土台になります。

定理 3.3（マーシャル需要の性質）

u が連続で、表現する選好が局所非飽和であるとし、$p \gg 0$、$w > 0$ とする。このとき、マーシャル需要は次の性質をもつ。

1. （0次同次性）任意の $t > 0$ について $x(tp, tw) = x(p,w)$。
2. （ワルラス法則）任意の $x \in x(p,w)$ について $p \cdot x = w$。
3. （凸性・一意性）選好が凸ならば $x(p,w)$ は凸集合であり、狭義凸ならば $x(p,w)$ はただ一つの要素からなる。

証明

ステップ1　0次同次性

予算集合について

$$
\begin{aligned}
B(tp,tw) &= \{x \in \mathbb{R}^L_+ : (tp)\cdot x \leq tw\} && \text{（定義）}\\
&= \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\} && \text{（両辺を } t>0 \text{ で割る）}\\
&= B(p,w)
\end{aligned}
$$

です。同じ集合の上で同じ u を最大化するので、解の集合も等しくなります。

ステップ2　ワルラス法則

背理法で示します。ある $x \in x(p,w)$ で $p \cdot x < w$ とします。$\varepsilon = (w - p\cdot x)/\|p\| > 0$ とお

くと、局所非飽和性より、$\|y-x\|<\varepsilon$ かつ $y \succ x$ となる $y \in \mathbb{R}^L_+$ があります。このとき

$$
\begin{aligned}
p \cdot y &= p \cdot x + p \cdot (y-x) && (x \text{ を足して引く}) \\
&\leq p \cdot x + \|p\| \, \|y-x\| && (\text{コーシー・シュワルツの不等式}) \\
&< p \cdot x + \|p\| \, \varepsilon = w && (\|y-x\|<\varepsilon \text{ と } \varepsilon \text{ の定義})
\end{aligned}
$$

なので $y \in B(p,w)$ です。予算内に x より好ましい y があることは、x が解であることに矛盾します。

ステップ3　凸性

$x, x' \in x(p,w)$ とし、最大値を u^* とします。x, x' はともに u^* を達成するので $x \sim x'$ です。$x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ とすると、予算集合は凸集合なので $x'' \in B(p,w)$ です。選好が凸なら、x, x' はともに上方集合 $U(x)$ に入るので $x'' \succsim x$、つまり $u(x'') \geq u^*$ です。最大値は u^* なので $u(x'') = u^*$ となり、$x'' \in x(p,w)$ です。

ステップ4　一意性

選好が狭義凸で、$x \neq x'$ がともに解だとします。ステップ3と同じく $x'' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'$ は予算集合に入り、狭義凸性から $x'' \succ x$、つまり $u(x'') > u^*$ です。これは u^* が最大値であることに矛盾します。　□

数式の読み方：3つの性質の意味

- 0次同次性は「貨幣錯覚がない」ことを表します。価格と所得がすべて2倍になっても（通貨単位の変更と同じ）、買うものは変わりません。
- ワルラス法則は「予算を使い切る」ことです。ここでの所得は「消費に使える総額」なので、貯蓄は将来の消費という別の財として扱います。
- 一意性のおかげで、狭義凸の選好のもとでは需要を関数として扱い、微分することができます。

補足：ここが大事　求めた需要の「検算」に使う

0次同次性とワルラス法則は、効用関数の形によらず必ず成り立つので、自分で求めた需要関数の検算に使えます。計算した需要に (tp, tw) を代入して変わらないか、$p \cdot x(p,w) = w$ になっているかを確かめる習慣をつけてください。試験や論文で需要を導いたとき、この2つが成り立たなければ、どこかで計算を間違えています。

3.3 一階条件による需要の求め方

u が微分可能なとき、需要はKKT条件から求められます。予算制約の乗数を λ とすると、ラグランジュ関数は $\mathcal{L} = u(x) + \lambda(w - p \cdot x)$ で、KKT条件は次のようになります。

$$\frac{\partial u}{\partial x_\ell}(x^*) \le \lambda p_\ell, \qquad x_\ell^* \Big(\frac{\partial u}{\partial x_\ell}(x^*) - \lambda p_\ell \Big) = 0 \qquad (\ell = 1, \dots, L) \tag{3.2}$$

$$\lambda \ge 0, \qquad \lambda \big(w - p \cdot x^* \big) = 0 \tag{3.3}$$

数式の読み方：内点解の場合

- すべての財を正の量だけ買うとき（$x^* \gg 0$）、式 (3.2) は $u_\ell = \lambda p_\ell$ となります。2つの財 ℓ, k について割り算すると

$$\frac{u_\ell(x^*)}{u_k(x^*)} = \frac{p_\ell}{p_k} \tag{3.4}$$

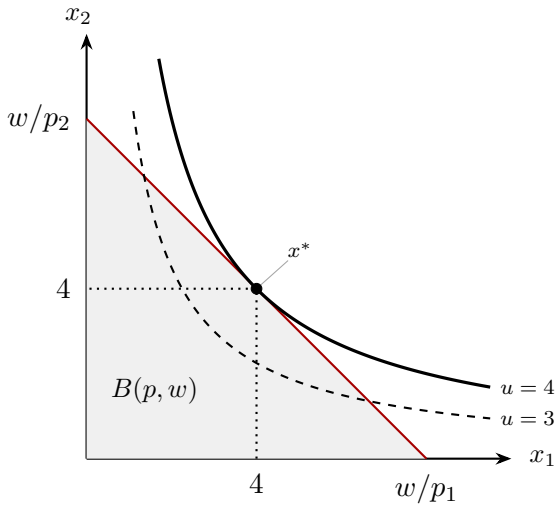
  で、「限界代替率＝価格比」という学部の条件が得られます。

- 同じ式を $\dfrac{u_\ell}{p_\ell} = \lambda$ と書くと、「1円あたりの限界効用がすべての財で等しい」という意味になります。その共通の値 λ は、所得の限界効用であることを次の章で示します。

補足：一階条件は十分条件か

KKT条件は最適解の必要条件です。効用関数が準凹で、$\nabla u(x^*) \neq 0$ なら、KKT条件を満たす点は解になります（アロー＝エントーベンの定理）。この巻で扱うコブ＝ダグラス型などの効用関数はこの条件を満たすので、一階条件から求めた点を解としてよいことになります。

図 3.1　効用最大化と最適消費



$u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、$p = (1,1)$、$w = 8$。最適消費は $x^* = (4,4)$、最大効用は 4。破線は $u = 3$ の無差別曲線。

図の読み方

1. 灰色の三角形が予算集合、赤い直線が予算線（傾き $-p_1/p_2 = -1$）です。
2. 実線の無差別曲線（$u = 4$）は、予算線と点 x^* で接しています。接点では無差別曲線の傾き $-u_1/u_2$ と予算線の傾きが等しく、式 (3.4) が成り立っています。
3. 破線の無差別曲線（$u = 3$）は予算線と2点で交わるので、予算の範囲で効用をさらに上げる余地があります。$u = 4$ より高い無差別曲線は予算集合と交わりません。

数式の読み方：需要を求める手順

1. 効用関数を扱いやすい形に変換する（対数をとるなど。第2章より選好は変わらない）。
2. 内点解かどうかを判断する。$x_\ell \to 0$ で限界効用が無限大になる関数（コブ＝ダグラス型など）なら内点解。そうでなければ端点解の可能性を残す。
3. 「限界代替率＝価格比」と「予算制約（等号）」の連立方程式を解く。
4. 端点解の可能性がある場合は、KKT条件 (3.2) の不等式を確かめる。
5. 0次同次性とワルラス法則で検算する。

3.4 コブ＝ダグラス型の需要

具体例として、$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$（$0 < \alpha < 1$）のマーシャル需要を求めます。計算を簡単にするため、同じ選好を表す対数形 $\tilde{u} = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$ を使います（第2章）。この効用関数では $x_\ell \to 0$ で限界効用が無限大になるので、解は内点解です。またワルラス法則より予算制約は等号で成り立ちます。

計算例：コブ＝ダグラス型のマーシャル需要

一階条件 $\tilde{u}_\ell = \lambda p_\ell$ は

$$\frac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1, \qquad \frac{1-\alpha}{x_2} = \lambda p_2$$

です。それぞれ $p_1 x_1 = \alpha/\lambda$、$p_2 x_2 = (1-\alpha)/\lambda$ と書き直して、予算制約に代入します。

$$\begin{aligned} w &= p_1 x_1 + p_2 x_2 && \text{（予算制約）} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{1-\alpha}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} && \text{（一階条件を代入）} \end{aligned}$$

よって $\lambda = 1/w$ で、

$$x_1(p, w) = \frac{\alpha w}{p_1}, \qquad x_2(p, w) = \frac{(1-\alpha) w}{p_2} \tag{3.5}$$

です。

数式の読み方：コブ＝ダグラス型需要の読み方

- $p_1 x_1 = \alpha w$ なので、所得のうち一定の割合 α を財1に、$1-\alpha$ を財2に使います。指数 α は「支出シェア」です。
- $x(tp, tw) = x(p, w)$（0次同次性）と $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$（ワルラス法則）が成り立つことを確かめてみてください。
- 財1の需要は自分の価格 p_1 と所得 w だけに依存し、財2の価格 p_2 には依存しません。

3.5 需要の微分が満たす関係式

需要関数が微分可能なとき、所得や価格の変化に対する反応に名前をつけておきます。

定義 3.4（正常財・劣等財・粗代替財・粗補完財）

- $\frac{\partial x_\ell}{\partial w} > 0$ のとき財 ℓ は正常財、$\frac{\partial x_\ell}{\partial w} < 0$ のとき劣等財という。
- $\frac{\partial x_\ell}{\partial p_\ell} > 0$ のとき財 ℓ はギッフェン財という。
- $\frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} > 0$（$k \neq \ell$）のとき財 ℓ は財 k の粗代替財、$\frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} < 0$ のとき粗補完財という。

0次同次性とワルラス法則は恒等式なので、微分しても成り立ちます。ここから、需要の微分の間に3つの関係式が得られます。

命題 3.5（需要の微分の関係式）

$x(p, w)$ が微分可能な需要関数ならば、次が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} + w \frac{\partial x_\ell}{\partial w} = 0 \quad (\ell = 1, \dots, L) \qquad \text{（同次性から）} \tag{3.6}$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} + x_k = 0 \quad (k = 1, \dots, L) \qquad \text{（クールノー集計）} \tag{3.7}$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial w} = 1 \qquad \text{（エンゲル集計）} \tag{3.8}$$

証明

ステップ1　式 (3.6)

$x_\ell(p, w)$ は (p, w) について0次同次なので、オイラーの定理（$k = 0$ の場合）から直ちに得られます。

ステップ2　式 (3.7) と (3.8)

ワルラス法則より、すべての (p, w) で恒等式 $\sum_\ell p_\ell x_\ell(p, w) = w$ が成り立ちます。両辺を p_k で微分すると、左辺では $p_k x_k$ の項の p_k も微分されるので

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} + x_k = 0 \qquad \text{（積の微分、右辺 } w \text{ は } p_k \text{ によらない）}$$

です。両辺を w で微分すると $\sum_\ell p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial w} = 1$ です。 □

数式の読み方：集計式の意味

- エンゲル集計 (3.8) は「所得が1円増えたら、その1円はどこかの財に使い切られる」ことを表します。したがって、すべての財が劣等財になることはありません。
- クールノー集計 (3.7) は「財 k の価格が上がっても総支出は w のまま」であることを表します。

発展：需要の微分だけでは分からないこと

学部では、価格が上がると需要が減る（需要法則）と学びました。ところが、効用最大化の仮定だけからは $\frac{\partial x_\ell}{\partial p_\ell} \leq 0$ は導けません。所得効果が大きく逆向きに働くと、ギッフェン財が生じうるからです。価格変化の効果を「必ず負になる部分」と「どちらにもなりうる部分」に分けるのが、第7章のスルツキー方程式です。

補足：ここが大事　集計式は「隠れた道具」

クールノー集計とエンゲル集計は、地味に見えますが、第4章のロイの恒等式の証明で決定的な役割を果たします（一階条件と組み合わせると、効用の変化が予算制約の変化だけで書ける）。また、需要システムを推定する実証研究では、推定した需要がこれらの関係式を満たすかどうかが、理論と整合的かを判断する最初の基準になります。

補足：この章の知識が生きる場面

- ワルラス法則 → 一般均衡の超過需要関数のワルラス法則（第3巻第2章）と、$L-1$ 個の市場の清算で十分であること。
- 需要の0次同次性 → 一般均衡で価格を基準化できること（第3巻第2章）。
- KKT条件と端点解 → 準線形効用や完全代替財の分析、産業組織論での離散的な選択。

要点

- マーシャル需要 $x(p, w)$ は、価格と所得を与えて効用を最大化する問題の解です。
- 局所非飽和性のもとで、需要は0次同次で、予算を使い切ります（ワルラス法則）。選好が狭義凸なら需要は一つに決まります。
- 内点解では「限界代替率＝価格比」が成り立ち、コブ＝ダグラス型では $x_1 = \alpha w/p_1$、$x_2 = (1-\alpha)w/p_2$ です。
- 同次性とワルラス法則を微分すると、需要の微分の間の関係式（クールノー集計・エンゲル集計）が得られます。

次の章へ　次の章では、UMPの「最適な値」である間接効用関数 $v(p, w)$ を学び、それを微分するとマーシャル需要が得られること（ロイの恒等式）を示します。

大学院とのつながり　ワルラス法則は、一般均衡理論で「超過需要の価値の合計がゼロ」という形で、均衡の存在証明の中心になります。

第4章

間接効用関数とロイの恒等式

ここまでの流れ　前の章で、効用最大化問題（UMP）の解であるマーシャル需要 $x(p, w)$ を学びました。

この章の問い　価格と所得が与えられたとき、消費者が達成できる最大の効用はどれだけで、それは価格や所得にどう依存するのでしょうか。また、その最大効用からマーシャル需要を取り戻すことはできるのでしょうか。

この章で分かること　間接効用関数の定義と4つの性質、ラグランジュ乗数の意味、ロイの恒等式とその証明。

4.1　間接効用関数

UMPの解 $x(p, w)$ を効用関数に代入すると、価格と所得のもとで達成できる最大の効用が得られます。

定義 4.1（間接効用関数）

UMPの最大値

$$v(p, w) = \max_{x \in B(p,w)} u(x) = u\big(x(p, w)\big) \tag{4.1}$$

を、(p, w) の関数とみたものを間接効用関数という。

数式の読み方

- もとの効用関数 $u(x)$ は「財の組」の関数なので、直接効用関数とも呼ばれます。$v(p, w)$ は「価格と所得」の関数で、財の組を経由して間接的に効用を表すので、間接効用関数と呼ばれます。
- 序章の表では、UMPの「最適な値」にあたります。
- 効用関数を単調増加変換すると v も同じ変換を受けます。v の値そのものにも、順序以上の意味はありません。

定理 4.2（間接効用関数の性質）

u が連続で、表現する選好が局所非飽和であるとし、$p \gg 0$、$w > 0$ とする。このとき間接効用関数 $v(p, w)$ は次の性質をもつ。

1. (p, w) について0次同次である。
2. w について狭義増加、各 p_ℓ について非増加である。
3. 準凸である。すなわち、任意の $\bar{v}$ について $\{(p, w) : v(p, w) \leq \bar{v}\}$ は凸集合である。
4. 連続である。

証明

ステップ1　0次同次性

前の章で示したとおり $B(tp, tw) = B(p, w)$ なので、最大値も等しく $v(tp, tw) = v(p, w)$ です。

ステップ2　w について狭義増加

$w' > w$ とし、$x \in x(p, w)$ をとります。$p \cdot x = w < w'$ なので、ワルラス法則の証明と同じく局所非飽和性から、x のすぐ近くに $p \cdot y < w'$ かつ $y \succ x$ となる y があります。よって $v(p, w') \geq u(y) > u(x) = v(p, w)$ です。

ステップ3　p_ℓ について非増加

$p' \geq p$ ならば、$p' \cdot x \leq w$ を満たす $x \geq 0$ は $p \cdot x \leq p' \cdot x \leq w$ も満たすので、$B(p', w) \subseteq B(p, w)$ です。より狭い集合の上での最大値は小さいか等しいので、$v(p', w) \leq v(p, w)$ です。

ステップ4　準凸性

(p, w) と (p', w') がともに $v \leq \bar{v}$ を満たすとし、$\lambda \in [0, 1]$ について $(p'', w'') = \lambda(p, w) + (1 - \lambda)(p', w')$ とおきます。$x \in B(p'', w'')$ を任意にとると

$$\lambda\, p \cdot x + (1 - \lambda)\, p' \cdot x = p'' \cdot x \leq w'' = \lambda w + (1 - \lambda) w'$$

です。左辺と右辺を比べると、$p \cdot x \leq w$ と $p' \cdot x \leq w'$ の少なくとも一方が成り立ちます（両方とも成り立たなければ、左辺の方が大きくなってしまう）。前者なら $x \in B(p, w)$ なので $u(x) \leq v(p, w) \leq \bar{v}$、後者なら同様に $u(x) \leq v(p', w') \leq \bar{v}$ です。$B(p'', w'')$ のどの x でも $u(x) \leq \bar{v}$ なので、$v(p'', w'') \leq \bar{v}$ です。

ステップ5　連続性

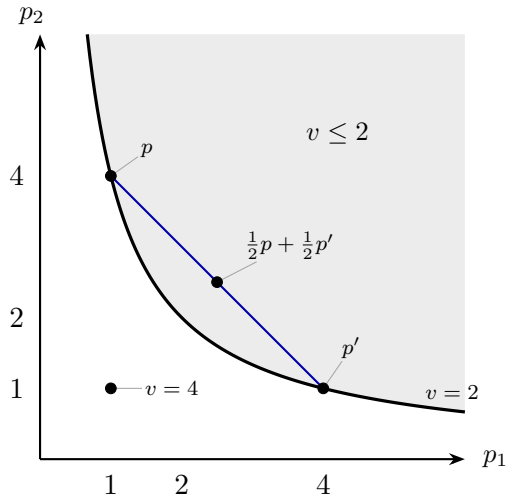
予算対応 $(p, w) \mapsto B(p, w)$ は $p \gg 0$、$w > 0$ で連続でコンパクトな値をとるので、ベルジ

ュの最大値定理より最大値関数 v は連続です。 □

数式の読み方：準凸性の意味

- 準凸性は「2つの価格・所得の組のどちらでも効用が $\bar{v}$ 以下なら、その中間の組でも $\bar{v}$ 以下」という性質です。
- 直観的には、中間的な価格のもとでは、消費者は2つの状況のどちらかで買えた組しか買えない（ステップ4）ので、両方より良くなることはない、ということです。逆に言えば、極端な価格の方が、安い方の財を集中的に買えるので有利になりえます。

図 4.1　価格空間における間接効用関数の準凸性



$u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、$w = 8$ のとき $v(p, w) = w/(2\sqrt{p_1 p_2}) = 4/\sqrt{p_1 p_2}$。$v = 2$ の曲線は $p_1 p_2 = 4$。

図の読み方

1. 横軸と縦軸は2つの財の価格です（所得は $w = 8$ に固定）。黒い曲線は、間接効用が $v = 2$ となる価格の組（価格空間の「無差別曲線」）です。
2. 価格が高くなるほど効用は下がるので、灰色の右上の領域が $\{p : v \le 2\}$ です。この領域は凸集合なので、v は準凸です。
3. 曲線上の $p = (1, 4)$ と $p' = (4, 1)$ を結ぶ線分（青）は灰色の領域に入り、中点 $(2.5, 2.5)$ での効用は $4/2.5 = 1.6$ と、端点の 2 より低くなります。原点に近い $(1, 1)$ では効用は 4 です。

補足：ここが大事　v で政策を「順位づけ」できるが「金額」にはできない

間接効用関数は、価格と所得の組を「消費者にとってどれだけ良いか」で順位づけます。たとえば2つの政策のもとでの (p, w) を比べ、v の大きい方が消費者にとって望ましいと判断できます。しかし、v は序数的なので、「どれだけ良いか」を金額で表すことはできません。この限界を克服するのが、第5章の支出関数と、それを使った第8章の補償変分・等価変分です。

4.2　ラグランジュ乗数の意味

前の章で、UMPの一階条件に現れる乗数 λ は「所得の限界効用」だと予告しました。包絡線定理を使って、これを確かめます。

命題 4.3（乗数は所得の限界効用）

v と $x(p, w)$ が微分可能で、$x(p, w) \gg 0$ とする。UMPの乗数を $\lambda(p, w)$ とすると

$$\frac{\partial v}{\partial w}(p, w) = \lambda(p, w) \tag{4.2}$$

が成り立つ。

証明

方針　包絡線定理を使わずに、連鎖律とUMPの一階条件、ワルラス法則だけで示します。

$v(p, w) = u(x(p, w))$ を w で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial w} &= \sum_{\ell=1}^{L} u_\ell\big(x(p, w)\big)\frac{\partial x_\ell}{\partial w} && \text{（連鎖律）} \\
&= \sum_{\ell=1}^{L} \lambda p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial w} && \text{（一階条件 } u_\ell = \lambda p_\ell\text{）} \\
&= \lambda \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial w} && \text{（}\lambda\text{ をくくり出す）} \\
&= \lambda && \text{（エンゲル集計：和は 1）}
\end{aligned}$$

となります。　□

補足：シャドー・プライス

式 (4.2) は、乗数 λ が「所得という制約を1単位緩めたときに、最大効用がどれだけ増えるか」を表すことを示しています。一般に、ラグランジュ乗数は制約の「影の価格」（シャドー・プライス）です。ただし v は序数的なので、λ の値も効用関数の選び方に依存します。

4.3 ロイの恒等式

間接効用関数が分かれば、マーシャル需要を取り戻すことができます。これが、序章の地図の左の縦の矢印です。

定理 4.4（ロイの恒等式）

v と $x(p,w)$ が微分可能で、$x(p,w)\gg 0$、$\frac{\partial v}{\partial w}>0$ とする。このとき、各財 ℓ について

$$x_\ell(p,w)=-\frac{\partial v(p,w)/\partial p_\ell}{\partial v(p,w)/\partial w} \tag{4.3}$$

が成り立つ。

証明のアイデア

価格 p_ℓ が少し上がると、消費者は「これまでと同じ組を買うのに、x_ℓ だけ余分にお金がかかる」状態になります。これは、所得が x_ℓ だけ減ったのと（一次の近似では）同じです。したがって「価格上昇による効用の減少」は「所得が x_ℓ 減ったことによる効用の減少」に等しく、$\frac{\partial v}{\partial p_\ell}=-x_\ell\frac{\partial v}{\partial w}$ となります。

証明

方針　$\frac{\partial v}{\partial p_\ell}=-\lambda x_\ell$ を示せば、式 (4.2) で割ることで結論が得られます。

ステップ1　v を p_ℓ で微分する

$v(p,w)=u(x(p,w))$ を p_ℓ で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial p_\ell}&=\sum_{k=1}^{L}u_k\big(x(p,w)\big)\frac{\partial x_k}{\partial p_\ell} && \text{（連鎖律）}\\ &=\lambda\sum_{k=1}^{L}p_k\frac{\partial x_k}{\partial p_\ell} && \text{（一階条件 } u_k=\lambda p_k\text{）}\\ &=-\lambda\,x_\ell && \text{（クールノー集計：和は } -x_\ell\text{）}\end{aligned}$$

です。

ステップ2　割り算する

ステップ1の結果を式 (4.2) で割ると

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial v/\partial p_\ell}{\partial v/\partial w} &= -\frac{-\lambda x_\ell}{\lambda} && \text{（ステップ1と式 (4.2) を代入）} \\
&= x_\ell && \text{（}\lambda = \frac{\partial v}{\partial w} > 0 \text{ で約分）}
\end{aligned}
$$

となります。 □

補足：包絡線定理による証明

同じ結果は、包絡線定理からも直ちに得られます。ラグランジュ関数 $\mathcal{L} = u(x) + \lambda(w - p \cdot x)$ で、p_ℓ は $-\lambda p_\ell x_\ell$ の項にだけ、w は λw の項にだけ現れるので、$\frac{\partial v}{\partial p_\ell} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\ell} = -\lambda x_\ell$、$\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \lambda$ です。上の証明は、包絡線定理の中身（一階条件で x の変化の効果が消える）を、集計式を使って具体的に確かめたものになっています。

数式の読み方：符号と単位で読む

- 分子 $\partial v/\partial p_\ell$ は負（価格が上がると効用は下がる）、分母 $\partial v/\partial w$ は正なので、右辺はマイナスを付けて正になります。
- 分子は「価格が1円上がったときの効用の損失」、分母は「所得1円の効用での価値」です。その比は「価格が1円上がったときの損失を、所得に換算すると何円か」で、それがちょうど需要量 x_ℓ（x_ℓ 単位買っているので x_ℓ 円余分にかかる）に等しい、という式です。
- 効用の単位は分子と分母で打ち消し合うので、ロイの恒等式は効用関数の選び方によらない、意味のある関係式です。

4.4 コブ＝ダグラス型の場合

計算例：間接効用関数とロイの恒等式の確認

前の章の需要 $x_1 = \alpha w/p_1$、$x_2 = (1-\alpha)w/p_2$ を $u = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ に代入すると

$$\begin{aligned} v(p,w) &= \left(\frac{\alpha w}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{(1-\alpha)w}{p_2}\right)^{1-\alpha} && \text{（需要を代入）} \\ &= \alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} \frac{w}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}} && \text{（}w^{\alpha} w^{1-\alpha} = w \text{ にまとめる）} \end{aligned}$$

です。p_1 と w について微分すると、$\frac{\partial v}{\partial p_1} = -\frac{\alpha}{p_1} v$、$\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{v}{w}$ なので

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v/\partial p_1}{\partial v/\partial w} &= \frac{\alpha v/p_1}{v/w} && \text{（微分を代入）} \\ &= \frac{\alpha w}{p_1} = x_1(p,w) && \text{（}v \text{ を約分）} \end{aligned}$$

となり、ロイの恒等式が確かめられます。

数式の読み方：v の形の読み方

- v は w について1次、p について -1 次なので、全体として0次同次です。
- 分母 $p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}$ は、支出シェアで重みをつけた「価格の平均」（物価指数）とみなせます。v は「実質所得」w/(物価指数) に比例しています。

補足：この章の知識が生きる場面

- ロイの恒等式 → 需要システムの実証分析で、間接効用関数の形を指定して需要を導く方法。
- 乗数＝所得の限界効用 → 公共経済学で、税や補助金の効果を効用で評価するときの換算係数。
- 「値の関数を微分すると選択が出てくる」構造 → 第5章のシェパードの補題、第2巻のホテリングの補題。

要点

- 間接効用関数 $v(p, w)$ はUMPの最大値で、0次同次・所得について増加・価格について非増加・準凸・連続です。
- UMPの乗数 λ は所得の限界効用 $\frac{\partial v}{\partial w}$ に等しくなります。
- ロイの恒等式 $x_\ell = -(\partial v/\partial p_\ell)/(\partial v/\partial w)$ により、間接効用関数からマーシャル需要が得られます。

次の章へ　ここまでで、序章の地図の左の列（UMP）を学びました。次の章では右の列、つまり「ある効用水準を最も安く達成する」支出最小化問題と、そこから生まれるヒックス需要・支出関数を学びます。

大学院とのつながり　実証研究では、需要関数を直接推定する代わりに、間接効用関数（や支出関数）の形を指定してロイの恒等式などで需要を導く方法がよく使われます。こうすると、推定した需要が効用最大化と整合的であることが保証されます。

第5章

支出最小化・ヒックス需要・支出関数

ここまでの流れ　第3章と第4章で、効用最大化問題（UMP）から生まれるマーシャル需要 $x(p,w)$ と間接効用関数 $v(p,w)$ を学びました。

この章の問い　「所得を与えて効用を最大にする」のではなく、「効用水準を与えて、それを最も安く達成する」と考えると、どのような需要と関数が得られるのでしょうか。

この章で分かること　支出最小化問題（EMP）、ヒックス（補償）需要 $h(p,u)$ と支出関数 $e(p,u)$ の性質、支出関数の凹性、シェパードの補題、補償需要の法則。

5.1　支出最小化問題

UMPでは「予算」を固定して「効用」を最大化しました。逆に、「効用」を固定して「支出」を最小化する問題を考えます。これは企業の費用最小化と同じ形の問題で、目標とする効用水準 u を「生産量」、財の組 x を「投入物」と読みかえることができます。

定義 5.1（支出最小化問題）

価格 $p \gg 0$ と、$u(0)$ より大きい効用水準 u について、

$$\min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \; p \cdot x \quad \text{s.t.} \quad u(x) \geq u \tag{5.1}$$

を支出最小化問題（EMP）という。その解の集合をヒックス需要（補償需要）といい $h(p,u)$ で、最小値を支出関数といい $e(p,u)$ で表す。

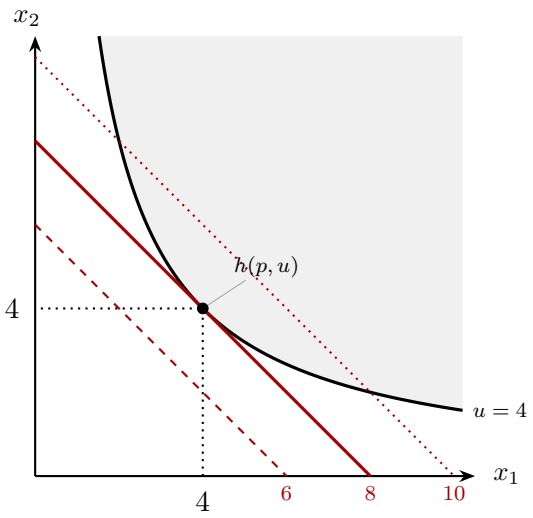
数式の読み方：記号の注意

- ここでの u は、効用関数 $u(\cdot)$ ではなく、達成すべき効用の**水準**（数）です。慣習的に同じ文字を使うので、括弧の有無で区別してください。
- $h(p,u)$ の入力は「価格」と「効用水準」です。効用水準は直接観察できないので、ヒックス需要は観察できない需要です。
- $e(p,u)$ は「価格 p のもとで効用 u を達成するのに、最低いくら必要か」を表します。

補足：解の存在

EMPの制約集合 $\{x \geq 0 : u(x) \geq u\}$ は、上にどこまでも広がっているので有界ではありません。それでも、$u(\bar{x}) \geq u$ を満たす組 $\bar{x}$ を一つとり、探す範囲を $\{x \geq 0 : u(x) \geq u,\ p \cdot x \leq p \cdot \bar{x}\}$ に限っても最小値は変わりません。この集合は（u が連続で $p \gg 0$ なら）コンパクトなので、ワイエルシュトラスの最大値定理から解が存在します。

図 5.1　支出最小化と最小支出



$u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、目標の効用水準 $u = 4$、$p = (1, 1)$。赤い線は支出額が $6, 8, 10$ の等支出線 $x_1 + x_2 = c$。ヒックス需要は $h = (4, 4)$、支出関数の値は $e = 8$。

図の読み方

1. 黒い曲線は目標の効用 $u = 4$ の無差別曲線で、灰色の領域が「効用 4 以上」を満たす組の集まり（制約集合）です。

2. 赤い直線は、支出額が等しい組を結んだ等支出線です。原点に近いほど支出が少なくなります。

3. 支出 6 の破線は制約集合に届きません。支出 10 の点線は届きますが、まだ節約できます。支出 8 の実線は無差別曲線に接し、これが最小支出 $e(p, u) = 8$、接点がヒックス需要 $h(p, u) = (4, 4)$ です。

4. UMP（図 3.1）では予算線を固定して最も高い無差別曲線を探しましたが、EMPでは無差別曲線を固定して最も低い等支出線を探します。どちらも答えは接点で、接点では「限界代替率＝価格比」が成り立ちます。

5.2 ヒックス需要の性質

定理 5.2（ヒックス需要の性質）

u が連続で、表現する選好が局所非飽和であるとし、$p \gg 0$ とする。このとき、ヒックス需要は次の性質をもつ。

1. （0次同次性）任意の $t > 0$ について $h(tp, u) = h(p, u)$。
2. （効用の余剰がない）任意の $x \in h(p, u)$ について $u(x) = u$。
3. （凸性・一意性）選好が凸ならば $h(p, u)$ は凸集合であり、狭義凸ならばただ一つの要素からなる。

証明

ステップ1　0次同次性

目的関数を $(tp) \cdot x = t\,p \cdot x$ と正の定数倍しても、制約集合は変わらず、どの x が最小になるかも変わりません。

ステップ2　効用の余剰がない

ある $x \in h(p, u)$ で $u(x) > u$ だとします。$t \in (0, 1)$ を 1 に十分近くとると、u の連続性から $u(tx) > u$ のままです。一方、$x \neq 0$（$u(0) < u$ なので）かつ $p \gg 0$ より $p \cdot x > 0$ なので、$p \cdot (tx) = t\,p \cdot x < p \cdot x$ です。制約を満たしてより安い組 tx があるので、x が解であることに矛盾します。

ステップ3　凸性・一意性

UMPの場合と同様です。$x, x' \in h(p, u)$ ならば、選好が凸なので $x'' = \lambda x + (1 - \lambda)x'$ も $u(x'') \geq u$ を満たし、支出は $p \cdot x'' = \lambda e + (1 - \lambda)e = e$ で最小です。狭義凸なら、$x \neq x'$ のとき $u(x'') > u$ となり、ステップ2に矛盾します。　□

5.3 支出関数の性質

支出関数は、この巻で最も重要な関数です。とくに「価格について凹関数である」という性質が、後の結果の多くを支えます。

定理 5.3（支出関数の性質）

u が連続で、表現する選好が局所非飽和であるとし、$p \gg 0$ とする。このとき支出関数 $e(p,u)$ は次の性質をもつ。

1. p について1次同次である。
2. u について狭義増加、各 p_ℓ について非減少である。
3. p について凹関数である。
4. p と u について連続である。

証明

ステップ1　1次同次性

ヒックス需要は p について0次同次なので、$x \in h(p,u)$ をとると $x \in h(tp,u)$ でもあり、

$$\begin{aligned} e(tp,u) &= (tp)\cdot x && (x \text{ は価格 } tp \text{ での解}) \\ &= t\,p\cdot x = t\,e(p,u) && (x \text{ は価格 } p \text{ での解}) \end{aligned}$$

です。

ステップ2　p_ℓ について非減少

$p' \geq p$ とし、$x' \in h(p',u)$ をとります。x' は価格 p のもとでも制約を満たすので、

$$\begin{aligned} e(p',u) &= p'\cdot x' && (x' \text{ は価格 } p' \text{ での解}) \\ &\geq p\cdot x' && (p' \geq p,\ x' \geq 0) \\ &\geq e(p,u) && (x' \text{ は価格 } p \text{ での候補の一つ}) \end{aligned}$$

です。u について狭義増加であることは、ヒックス需要の性質2を使って同様に示せます。

ステップ3　凹性

p, p' と $\lambda \in [0,1]$ について $p'' = \lambda p + (1-\lambda)p'$ とし、$x'' \in h(p'',u)$ をとります。x'' は効用 u を達成するので、価格 p のもとでも p' のもとでも候補の一つであり、$p\cdot x'' \geq e(p,u)$、$p'\cdot x'' \geq e(p',u)$ です。よって

$$\begin{aligned} e(p'',u) &= p''\cdot x'' && (x'' \text{ は価格 } p'' \text{ での解}) \\ &= \lambda\,p\cdot x'' + (1-\lambda)\,p'\cdot x'' && (p'' \text{ を代入し内積を分ける}) \\ &\geq \lambda\,e(p,u) + (1-\lambda)\,e(p',u) && (\text{上の2つの不等式}) \end{aligned}$$

となり、e は p について凹関数です。

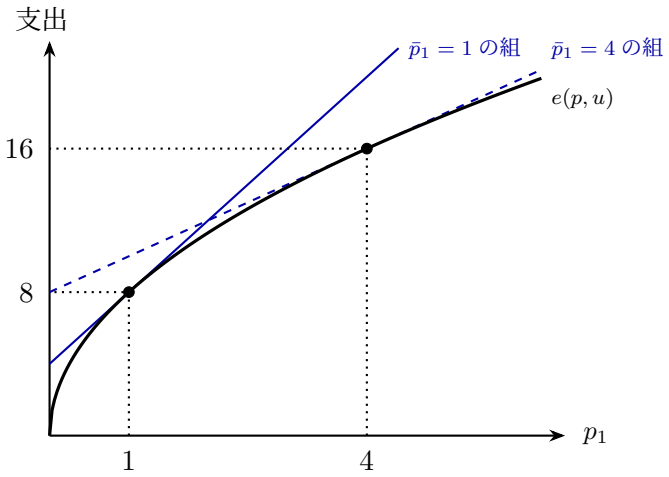
ステップ4　連続性

ベルジュの最大値定理（の最小値版）を、ヒックス需要の存在の補足で述べたコンパクトな集合に当てはめて示せます。 □

数式の読み方：凹性の直観

- ある価格 $\bar{p}$ のもとでの最適な組 $\bar{x} = h(\bar{p}, u)$ を、価格が変わっても**そのまま買い続ける**と、支出は $p \cdot \bar{x}$ で、これは p の一次関数（直線）です。
- 実際には、価格が変わると消費者は割高になった財を減らし、割安になった財を増やす（代替する）ことで、支出をさらに節約できます。したがって $e(p, u) \leq p \cdot \bar{x}$ で、等号は $p = \bar{p}$ のときだけです。
- 支出関数は、すべての $\bar{p}$ に対する直線の下側にあり、各直線と $\bar{p}$ で接します。このような関数は凹関数になります（図 5.2）。

図 5.2　支出関数の凹性とシェパードの補題



$u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、$u = 4$、$p_2 = 1$ のとき $e = 8\sqrt{p_1}$。実線の青い直線は $\bar{p} = (1, 1)$ での組 $h = (4, 4)$ を買い続けたときの支出 $4p_1 + 4$、破線は $\bar{p} = (4, 1)$ での組 $h = (2, 8)$ を買い続けたときの支出 $2p_1 + 8$。

図の読み方

1. 黒い曲線が支出関数 $e(p,u)$ を p_1 の関数として描いたもので、上に凸（凹関数）の形をしています。
2. 青い直線は、ある価格 $\bar{p}$ での最適な組を買い続けたときの支出です。支出関数はつねに直線の下にあり、$\bar{p}_1$（黒い点）で直線に接しています。
3. 接点では傾きが等しいので、支出関数の p_1 についての傾きは、その直線の傾き、つまりその点でのヒックス需要 h_1 に等しくなります。たとえば $\bar{p}_1 = 1$ では傾きは $4 = h_1$、$\bar{p}_1 = 4$ では傾きは $2 = h_1$ です。これが次の節のシェパードの補題です。

補足：ここが大事　支出関数は「効用を円で測る」関数

間接効用関数の値には意味がありませんでしたが、支出関数の値は金額なので意味があります。基準となる価格 $\bar{p}$ を一つ決めて、$e(\bar{p}, u(x))$ を考えると、これは「組 x と同じ満足を、価格 $\bar{p}$ のもとで得るのに必要な金額」で、効用を円で測った量（マネー・メトリック効用）になります。第8章の等価変分・補償変分は、この考え方を使って価格変化による損得を金額で表します。また、支出関数の凹性は第7章でスルツキー行列が負半定値であることの根拠になり、この章で最も重要な性質です。

5.4　シェパードの補題

図 5.2 で見たことを、定理として述べます。これが序章の地図の右の縦の矢印です。

定理 5.4（シェパードの補題）

$h(\bar{p}, u)$ がただ一つの組からなり、$e(\cdot, u)$ が $\bar{p}$ で微分可能ならば、

$$h_\ell(\bar{p}, u) = \frac{\partial e}{\partial p_\ell}(\bar{p}, u) \qquad (\ell = 1, \dots, L) \tag{5.2}$$

が成り立つ。

証明

方針　図 5.2 の「直線と曲線の差」が $\bar{p}$ で最小になることを使います。ラグランジュ関数を使わない証明です。

ステップ1　差の関数を作る

$\bar{x} = h(\bar{p}, u)$ とし、$g(p) = p \cdot \bar{x} - e(p, u)$ とおきます。$\bar{x}$ はどの価格のもとでも効用 u を達成する候補なので、すべての p で $p \cdot \bar{x} \geq e(p, u)$、つまり $g(p) \geq 0$ です。また $p = \bar{p}$ では

$g(\bar{p}) = e(\bar{p}, u) - e(\bar{p}, u) = 0$ です。

ステップ2　最小点の一階条件

g は $p = \bar{p}$ で最小値 0 をとり、そこで微分可能なので、各偏微分は 0 です。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g}{\partial p_\ell}(\bar{p}) && \text{（最小点の一階条件）} \\ &= \bar{x}_\ell - \frac{\partial e}{\partial p_\ell}(\bar{p}, u) && \text{（}p \cdot \bar{x}\text{ の }p_\ell\text{ による微分は }\bar{x}_\ell\text{）} \end{aligned}$$

よって $\frac{\partial e}{\partial p_\ell}(\bar{p}, u) = \bar{x}_\ell = h_\ell(\bar{p}, u)$ です。 □

補足：包絡線定理による見方

EMPのラグランジュ関数 $\mathcal{L} = p \cdot x + \mu\big(u - u(x)\big)$ に包絡線定理を当てはめると、p_ℓ は $p_\ell x_\ell$ の項にだけ現れるので、$\frac{\partial e}{\partial p_\ell} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\ell} = x_\ell = h_\ell$ となります。上の証明は、包絡線定理の考え方（最適な組の変化の影響は一次では消える）を、微分可能性だけを使って示したものです。

5.5　補償需要の法則

第3章の最後で、マーシャル需要については「価格が上がると需要が減る」とは限らないことを見ました。ところがヒックス需要については、これが必ず成り立ちます。

定理 5.5（補償需要の法則）

任意の価格 p, p' について、$x \in h(p, u)$、$x' \in h(p', u)$ とすると

$$(p' - p) \cdot (x' - x) \leq 0 \tag{5.3}$$

が成り立つ。特に、h が微分可能なら $\frac{\partial h_\ell}{\partial p_\ell} \leq 0$ である。

証明　x' は価格 p' での最小支出の組で、x も効用 u を達成するので $p' \cdot x' \leq p' \cdot x$ です。同様に $p \cdot x \leq p \cdot x'$ です。2つの不等式を

$$\begin{aligned} p' \cdot (x' - x) &\leq 0 && \text{（1つ目を移項）} \\ -p \cdot (x' - x) &\leq 0 && \text{（2つ目を移項）} \end{aligned}$$

と書いて足すと、式 (5.3) が得られます。p' を p から第 ℓ 成分だけ $\Delta p_\ell > 0$ 変えたものとすると、式は $\Delta p_\ell\,(x'_\ell - x_\ell) \leq 0$ となり、$x'_\ell \leq x_\ell$ です。微分可能なら、$\Delta p_\ell \to 0$ として $\frac{\partial h_\ell}{\partial p_\ell} \leq 0$ です。 □

数式の読み方：なぜ「補償」需要なのか

- ヒックス需要では効用が u に固定されているので、価格が上がると、それによる損失を埋め合わせる（補償する）ように所得が自動的に調整されている、と考えられます。
- 補償されているので、価格変化による「実質所得の変化」の効果（所得効果）は取り除かれ、相対価格の変化による効果（代替効果）だけが残ります。代替効果は必ず価格と逆向きに働く、というのがこの定理の内容です。

補足：ここが大事　なぜヒックス需要では「需要法則」が必ず成り立つのか

証明に使ったのは「最小費用の組は、他の価格のもとでも候補の一つ」という最適化の性質だけで、効用関数の形も微分可能性も使っていません。所得効果を取り除いた（効用を固定した）需要では、価格が上がった財から離れる代替効果しか働かないので、需要法則が例外なく成り立つのです。一方、マーシャル需要には所得効果が加わるので、需要法則が破れうる（ギッフェン財）。この違いを式で表したのが第7章のスルツキー方程式です。

5.6 コブ＝ダグラス型の場合

計算例：ヒックス需要と支出関数

$u(x)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ のEMPを解きます。接点の条件「限界代替率＝価格比」は

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}=\frac{p_1}{p_2}\quad\Longrightarrow\quad x_2=\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}\,x_1$$

です。これを制約 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=u$ に代入して x_1 について解くと

$$h_1(p,u)=u\Big(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_2}{p_1}\Big)^{1-\alpha},\qquad h_2(p,u)=u\Big(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}\Big)^{\alpha} \tag{5.4}$$

$$e(p,u)=p_1h_1+p_2h_2=\frac{u\,p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} \tag{5.5}$$

となります（$p_1h_1=\alpha e$、$p_2h_2=(1-\alpha)e$ を確かめると、和の計算が簡単です）。シェパードの補題を確かめると

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial p_1}&=\frac{\alpha}{p_1}\,e(p,u) && (p_1^{\alpha}\text{ を微分})\\ &=\frac{\alpha e}{p_1}=h_1(p,u) && (p_1h_1=\alpha e)\end{aligned}$$

です。$\alpha=\frac12$ なら $h_1=u\sqrt{p_2/p_1}$、$e=2u\sqrt{p_1p_2}$ で、図 5.1 と図 5.2 の数値になります。

補足：この章の知識が生きる場面

- 支出関数とシェパードの補題 → 第2巻の費用関数と条件付き要素需要（まったく同じ構造）。
- 支出関数の凹性 → スルツキー行列の負半定値性（第7章）。
- マネー・メトリック効用 → 等価変分・補償変分（第8章）、費用便益分析、物価指数の理論（真の生計費指数は $e(p^1,u)/e(p^0,u)$）。

要点

- 支出最小化問題（EMP）は「効用 u を最も安く達成する」問題で、解がヒックス需要 $h(p,u)$、最小値が支出関数 $e(p,u)$ です。
- 支出関数は価格について1次同次、非減少、凹関数です。凹性は「価格が変われば代替して節約できる」ことの表れです。
- シェパードの補題 $h_\ell = \partial e/\partial p_\ell$ により、支出関数からヒックス需要が得られます。
- ヒックス需要は補償需要の法則を満たし、自己価格について必ず右下がり（$\partial h_\ell/\partial p_\ell \leq 0$）です。

次の章へ　これで序章の地図の4つの関数がそろいました。次の章では、UMPとEMPが「表と裏」の関係にあること（双対性）を示し、4つの関数を互いに結びつけます。

大学院とのつながり　生産者理論の費用関数とシェパードの補題（条件付き要素需要）は、この章の支出関数とヒックス需要とまったく同じ構造をしています。

第6章

双対性：2つの問題を結ぶ

ここまでの流れ　効用最大化問題（UMP）から $x(p,w)$ と $v(p,w)$ を、支出最小化問題（EMP）から $h(p,u)$ と $e(p,u)$ を得ました。
この章の問い　2つの問題は別々の問題のように見えますが、実際にはどのような関係にあるのでしょうか。
この章で分かること　UMPとEMPの双対性（4つの恒等式）とその証明、双対性によるロイの恒等式の別証明、4つの関数のどれか1つから残りを求める方法。

6.1　同じ接点を2つの方向から見る

第3章の図 3.1 と第5章の図 5.1 を見比べてください。どちらも $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、$p = (1,1)$ の例で、UMPでは所得 $w = 8$ のもとで最大効用 4 を、EMPでは効用 4 を最小支出 8 で達成していました。そして、どちらの最適な組も $(4,4)$ でした。

これは偶然ではありません。「所得 8 で達成できる最大の効用は 4」ということと、「効用 4 を達成するのに必要な最小の所得は 8」ということは、同じ接点を2つの方向から言い表したものだからです。この関係を双対性といいます。

定理 6.1（UMPとEMPの双対性）

u が連続で、表現する選好が局所非飽和であるとし、$p \gg 0$ とする。このとき、次が成り立つ。

1. 任意の $w > 0$ について

$$e\big(p, v(p,w)\big) = w, \tag{6.1}$$
$$h\big(p, v(p,w)\big) = x(p,w). \tag{6.2}$$

2. 任意の $u > u(0)$ について

$$v\big(p, e(p,u)\big) = u, \tag{6.3}$$
$$x\big(p, e(p,u)\big) = h(p,u). \tag{6.4}$$

数式の読み方：4つの式の読み方

- 式 (6.1)：所得 w で達成できる最大の効用 $v(p,w)$ を、最も安く達成する費用は、ちょうど w である。
- 式 (6.2)：その効用 $v(p,w)$ を最も安く達成する組は、所得 w のもとで効用を最大にする組と同じである。
- 式 (6.3)：効用 u を達成する最小費用 $e(p,u)$ を所得として与えると、達成できる最大の効用はちょうど u である。
- 式 (6.4)：そのときの効用最大化の組は、効用 u を最も安く達成する組と同じである。
- 式 (6.1) と (6.3) は、所得 w を固定すると「$v(p,\cdot)$ と $e(p,\cdot)$ は互いに逆関数」であることを意味します。

証明

方針　前半では局所非飽和性を、後半では効用関数の連続性を使い、どちらも「もし等号が成り立たなければ、より良い（安い）組が作れる」という背理法で示します。

ステップ1　式 (6.1)：$e \le w$ であること

$x^* \in x(p,w)$ をとり、$\bar{u} = v(p,w) = u(x^*)$ とします。x^* は効用 $\bar{u}$ を達成するのでEMPの候補の一つであり、ワルラス法則より

$$\begin{aligned} e(p,\bar{u}) &\le p \cdot x^* && (x^* \text{ は候補の一つ}) \\ &= w && (\text{ワルラス法則}) \end{aligned}$$

です。

ステップ2　式 (6.1)：$e < w$ でないこと

仮に $e(p,\bar{u}) < w$ とすると、$u(x') \ge \bar{u}$ かつ $p \cdot x' < w$ となる x' があります。局所非飽和性から、x' のすぐ近くに、まだ $p \cdot x'' < w$ を満たし $x'' \succ x'$ となる x'' があります（ワルラス法則の証明と同じ議論）。すると $x'' \in B(p,w)$ かつ $u(x'') > u(x') \ge \bar{u}$ となり、$\bar{u}$ が所得 w のもとでの最大効用であることに矛盾します。よって $e(p,v(p,w)) = w$ です。

ステップ3　式 (6.2)

ステップ1と2から、$x^* \in x(p,w)$ は効用 $\bar{u}$ を支出 $w = e(p,\bar{u})$ で達成するので、$x^* \in h(p,\bar{u})$ です。逆に $x' \in h(p,\bar{u})$ なら、$p \cdot x' = e(p,\bar{u}) = w$ なので $x' \in B(p,w)$ で、ヒックス需要の性質から $u(x') = \bar{u}$ なので、x' は最大効用を達成し $x' \in x(p,w)$ です。2つの集合は等しくなります。

ステップ4　式 (6.3)：$v \geq u$ であること

$\bar{x} \in h(p,u)$ をとり、$\bar{w} = e(p,u) = p \cdot \bar{x}$ とします。$\bar{x} \in B(p,\bar{w})$ で、ヒックス需要の性質から $u(\bar{x}) = u$ なので、$v(p,\bar{w}) \geq u$ です。

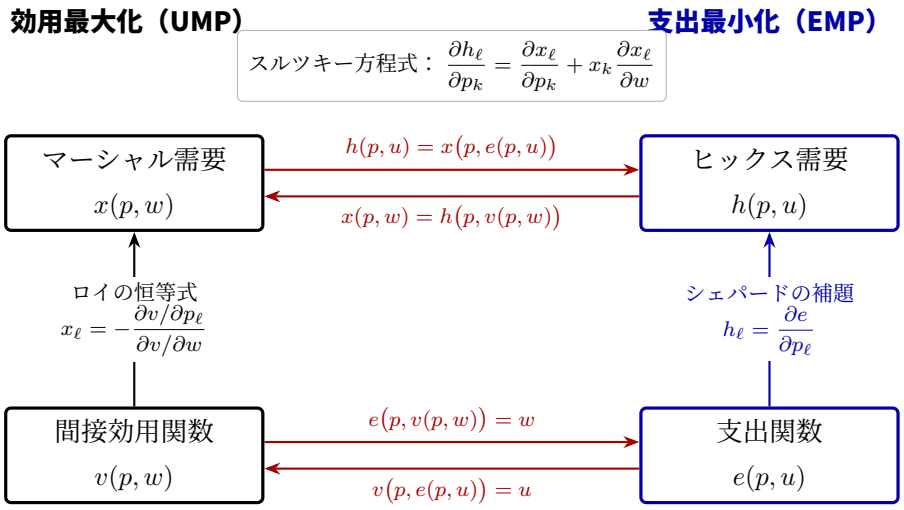
ステップ5　式 (6.3)：$v > u$ でないこと

仮に $v(p,\bar{w}) > u$ とすると、$p \cdot x' \leq \bar{w}$ かつ $u(x') > u$ となる x' があります。$u(x') > u > u(0)$ より $x' \neq 0$ なので $p \cdot x' > 0$ です。$t \in (0,1)$ を 1 に十分近くとると、u の連続性から $u(tx') > u$ のままで、支出は $p \cdot (tx') < p \cdot x' \leq \bar{w}$ です。これは効用 u を $\bar{w} = e(p,u)$ より安く達成できることを意味し、矛盾です。よって $v(p, e(p,u)) = u$ です。

ステップ6　式 (6.4)

ステップ3と同様に、ステップ4と5から2つの集合が等しいことが示せます。　□

図 6.1　4つの関数の地図（双対性）



この章では、赤い矢印で示した4つの関係式を証明した。

図の読み方

1. 下の段の赤い矢印（式 (6.1) と (6.3)）は、価格を固定すると v と e が「所得」と「効用水準」を互いに読みかえる逆関数であることを示しています。
2. 上の段の赤い矢印（式 (6.2) と (6.4)）は、「所得を $e(p,u)$ に合わせればマーシャル需要がヒックス需要になる」「効用水準を $v(p,w)$ に合わせればヒックス需要がマーシャル需要になる」ことを示しています。
3. 2つの需要は、「何を固定しているか」（所得か効用か）が違うだけで、同じ点で評価すれば同じ組を指しています。違いが現れるのは、価格が変わったときに何を固定し続けるかを考えるときです（第7章）。

補足：ここが大事　「解きやすい方の問題を解く」

双対性の実用上の意味は、「2つの問題のうち、解きやすい方を解けばよい」ということです。効用最大化は予算制約が線形なので計算しやすいことが多く、支出最小化は目的関数が線形なので性質（凹性など）を示しやすいことが多い、という使い分けがよくなされます。試験では、4つの関数のどれか一つを与えて残りを求めさせる問題が典型的なので、この章の表の手順を自分で一通りたどれるようにしておくことが大切です。

6.2　双対性によるロイの恒等式

双対性を使うと、第4章のロイの恒等式を、一階条件や集計式を使わずに導くことができます。

系 6.2（ロイの恒等式：双対性による証明）

v と e が微分可能で、$\frac{\partial v}{\partial w} > 0$ ならば、$x_\ell(p,w) = -\dfrac{\partial v/\partial p_\ell}{\partial v/\partial w}$ が成り立つ。

証明

ステップ1　恒等式を微分する

式 (6.3) はすべての p について成り立つ恒等式です。両辺を p_ℓ で微分すると、右辺の u は p によらないので

$$\frac{\partial v}{\partial p_\ell}\big(p, e(p,u)\big) + \frac{\partial v}{\partial w}\big(p, e(p,u)\big)\cdot \frac{\partial e}{\partial p_\ell}(p,u) = 0 \qquad \text{（連鎖律）}$$

です。

ステップ2　シェパードの補題と双対性を使う

$u = v(p,w)$ とおくと、式 (6.1) より $e(p,u) = w$ です。さらにシェパードの補題と式 (6.2) より

$$\frac{\partial e}{\partial p_\ell}(p,u) = h_\ell(p,u) = h_\ell\big(p, v(p,w)\big) = x_\ell(p,w)$$

です。これらをステップ1の式に代入すると $\frac{\partial v}{\partial p_\ell}(p,w) + \frac{\partial v}{\partial w}(p,w)\,x_\ell(p,w) = 0$ となり、移項して $\frac{\partial v}{\partial w}$ で割れば結論が得られます。　□

数式の読み方：この証明の構造

- 地図の上では、「右の縦の矢印（シェパードの補題）」と「赤い矢印（双対性）」をたどると、「左の縦の矢印（ロイの恒等式）」が得られる、という構造になっています。
- このように、4つの関数の関係は互いに独立ではなく、地図のどの道をたどっても同じ結果にたどりつきます。

6.3 1つの関数から残りを求める

双対性の実用上の大きな利点は、4つの関数のどれか1つが分かれば、残りがすべて求められることです。

分かっているもの	求めたいもの	方法
$v(p,w)$	$x(p,w)$	ロイの恒等式
$v(p,w)$	$e(p,u)$	$v(p,e)=u$ を e について解く（式 (6.3)）
$e(p,u)$	$h(p,u)$	シェパードの補題
$e(p,u)$	$v(p,w)$	$e(p,v)=w$ を v について解く（式 (6.1)）
$h(p,u)$	$x(p,w)$	u に $v(p,w)$ を代入（式 (6.2)）
$x(p,w)$	$h(p,u)$	w に $e(p,u)$ を代入（式 (6.4)）

計算例：コブ＝ダグラス型で双対性を確かめる

第4章の間接効用関数を、$k=\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}$、$P=p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}$ とおいて $v(p,w)=kw/P$ と書きます。

(1) v から e を求める。 式 (6.3) より $v(p,e)=u$、つまり

$$\frac{k\,e}{P}=u \qquad (v \text{ の式に } w=e \text{ を代入})$$

$$e(p,u)=\frac{uP}{k}=\frac{u\,p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} \qquad (e \text{ について解く})$$

となり、第5章で直接求めた式 (5.5) と一致します。

(2) x から h を求める。 式 (6.4) より

$$h_1(p,u)=x_1\big(p,e(p,u)\big)=\frac{\alpha\,e(p,u)}{p_1} \qquad (x_1=\alpha w/p_1 \text{ に } w=e \text{ を代入})$$

で、これは第5章の $p_1h_1=\alpha e$ と一致します。

発展：支出関数から選好を復元する

双対性はさらに強い主張に広げられます。凹性・1次同次性などの性質を満たす関数 $e(p,u)$ が与えられると、それを支出関数としてもつ選好を作ることができます（具体的には、$\{x : p \cdot x \geq e(p,u)$ がすべての $p \gg 0$ で成り立つ$\}$ を上方集合とします）。この意味で、支出関数は凸な選好の情報をすべて含んでいます。これは、分離超平面定理を使って「凸集合は、それを含む半空間すべての共通部分である」ことから示されます。

補足：この章の知識が生きる場面

- 双対性 → 第2巻の利潤最大化と費用最小化の関係（2段階法）。
- 「最適化問題を値の関数で扱う」考え方 → 大学院マクロの動的計画法（ベルマン方程式）、産業組織論の需要・費用関数の推定。
- 支出関数から選好を復元できること（発展）→ 実証分析で、選好を直接指定せず双対関数を推定する方法の理論的根拠。

要点

- UMP と EMP は同じ接点を2つの方向から見た問題で、$e(p, v(p,w)) = w$、$v(p, e(p,u)) = u$、$h(p, v(p,w)) = x(p,w)$、$x(p, e(p,u)) = h(p,u)$ が成り立ちます。
- 証明では、前半に局所非飽和性、後半に効用関数の連続性を使います。
- 恒等式 $v(p, e(p,u)) = u$ を微分し、シェパードの補題と組み合わせると、ロイの恒等式が得られます。
- 4つの関数のどれか1つが分かれば、双対性・ロイの恒等式・シェパードの補題で残りがすべて求められます。

次の章へ　次の章では、恒等式 $h(p,u) = x(p, e(p,u))$ を価格で微分します。そこから、マーシャル需要の価格効果を代替効果と所得効果に分けるスルツキー方程式が得られます。

大学院とのつながり　双対性は、生産者理論（利潤関数・費用関数）や一般均衡の応用分析でも中心的な道具です。最適化問題を「値の関数」で扱う考え方は、マクロ経済学の動的計画法（ベルマン方程式）にも通じています。

第7章

スルツキー方程式

ここまでの流れ　前の章で、UMPとEMPの双対性、とくに $h(p,u) = x(p, e(p,u))$ を示しました。
この章の問い　ある財の価格が上がったとき、マーシャル需要の変化はどのような要因に分けられるのでしょうか。また、効用最大化の仮定は、観察できる需要の変化にどのような制約を課すのでしょうか。
この章で分かること　代替効果と所得効果、スルツキー方程式とその証明、スルツキー行列の3つの性質、ギッフェン財の条件。

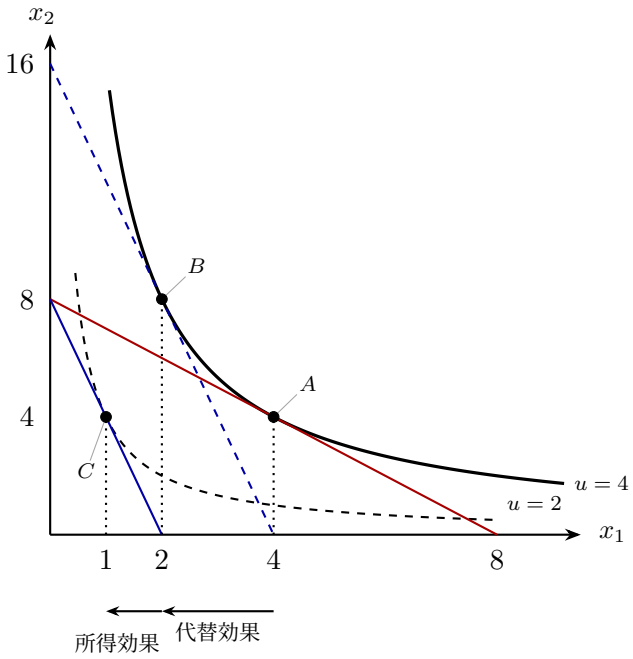
7.1　代替効果と所得効果

財1の価格が上がると、消費者には2つのことが同時に起こります。

- 財1が財2に比べて割高になる（相対価格の変化）。
- 同じ所得で買えるものが減り、実質的に貧しくなる（実質所得の変化）。

前者による需要の変化を代替効果、後者による変化を所得効果といいます。2つを分けるには、「価格が変わっても、もとの効用を保てるように所得を補償した」仮想的な状況を考えます。これはまさに、効用を固定したヒックス需要の変化です。

図 7.1　代替効果と所得効果（ヒックスの分解）



$u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、$w = 8$、$p_2 = 1$ で、p_1 が 1 から 4 に上昇する場合。赤：もとの予算線 $x_1 + x_2 = 8$。青の実線：新しい予算線 $4x_1 + x_2 = 8$。青の破線：補償された予算線 $4x_1 + x_2 = 16$。$A = (4, 4)$、$B = (2, 8)$、$C = (1, 4)$。

図の読み方

1. 価格が変わる前、消費者は赤い予算線のもとで点 $A = x(p, w) = (4, 4)$ を選び、効用 4 を得ています。

2. 価格上昇後、消費者は青い実線の予算線のもとで点 $C = x(p', w) = (1, 4)$ を選び、効用は 2 に下がります。A から C への動きが、マーシャル需要の変化（全部効果）です。

3. もとの効用 4 を保つのに必要な所得は $e(p', 4) = 2 \cdot 4\sqrt{4 \cdot 1} = 16$ です。この補償された所得のもとでの予算線（青の破線）は、新しい価格比をもち、もとの無差別曲線に点 $B = h(p', 4) = (2, 8)$ で接します。

4. A から B への動き（$x_1 : 4 \to 2$）は、同じ無差別曲線の上で相対価格だけが変わった効果で、代替効果です。B から C への動き（$x_1 : 2 \to 1$）は、相対価格は同じまま所得が 16 から 8 に減った効果で、所得効果です。

7.2　スルツキー方程式

図 7.1 の分解を、価格の微小な変化について式で表したものがスルツキー方程式です。

定理 7.1（スルツキー方程式）

u が連続で、表現する選好が局所非飽和かつ狭義凸であり、$x(p,w)$ と $h(p,u)$ が微分可能であるとする。$u = v(p,w)$ のとき、任意の財 ℓ, k について

$$\frac{\partial x_\ell}{\partial p_k}(p,w) = \frac{\partial h_\ell}{\partial p_k}(p,u) - x_k(p,w)\,\frac{\partial x_\ell}{\partial w}(p,w) \tag{7.1}$$

が成り立つ。

数式の読み方：各項の意味

- 左辺 $\frac{\partial x_\ell}{\partial p_k}$：財 k の価格が上がったときの、財 ℓ のマーシャル需要の変化（全部効果）。観察できる量です。
- 右辺第1項 $\frac{\partial h_\ell}{\partial p_k}$：効用を固定したときの需要の変化（代替効果）。
- 右辺第2項 $-x_k\,\frac{\partial x_\ell}{\partial w}$：所得効果。価格 p_k が1円上がると、いま買っている x_k 単位の財 k を買うのに x_k 円余分に必要になり、実質所得が x_k 円減ったのと同じになります。所得が1円減ると財 ℓ の需要は $\frac{\partial x_\ell}{\partial w}$ だけ減るので、全体で $-x_k\,\frac{\partial x_\ell}{\partial w}$ です。

証明

方針　双対性の恒等式 $h_\ell(p,u) = x_\ell(p, e(p,u))$ を p_k で微分し、シェパードの補題と双対性で項を置き換えます。

ステップ1　恒等式を微分する

式 (6.4) より、すべての p で $h_\ell(p,u) = x_\ell\big(p, e(p,u)\big)$ が成り立ちます。右辺では p_k が「価格の引数」と「所得の引数 $e(p,u)$ の中」の2か所に現れるので、連鎖律より

$$\frac{\partial h_\ell}{\partial p_k}(p,u) = \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k}\big(p,e(p,u)\big) + \frac{\partial x_\ell}{\partial w}\big(p,e(p,u)\big)\cdot\frac{\partial e}{\partial p_k}(p,u) \qquad \text{（連鎖律）}$$

です。

ステップ2　シェパードの補題を使う

シェパードの補題より $\frac{\partial e}{\partial p_k}(p,u) = h_k(p,u)$ なので

$$\frac{\partial h_\ell}{\partial p_k}(p,u) = \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k}\big(p,e(p,u)\big) + \frac{\partial x_\ell}{\partial w}\big(p,e(p,u)\big)\cdot h_k(p,u) \qquad \text{（シェパードの補題）}$$

です。

ステップ3　$u = v(p, w)$ で評価する

$u = v(p, w)$ とおくと、双対性より $e(p, u) = w$（式 (6.1)）、$h_k(p, u) = x_k(p, w)$（式 (6.2)）なので

$$\frac{\partial h_\ell}{\partial p_k}(p, u) = \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k}(p, w) + \frac{\partial x_\ell}{\partial w}(p, w) \cdot x_k(p, w) \qquad \text{（双対性で置き換え）}$$

です。右辺第2項を左辺に移項すれば、式 (7.1) が得られます。 □

補足：地図の上での位置

序章の地図では、スルツキー方程式は上の段の2つの需要を結ぶ式でした。証明で使ったのは、上の段の赤い矢印（双対性）と右の縦の矢印（シェパードの補題）です。地図の矢印を組み合わせると新しい関係が生まれる、という双対性の威力がよく表れています。

数式の読み方：弾力性の形で読む

スルツキー方程式の両辺に p_k/x_ℓ をかけると、弾力性の関係式になります。 第2項には $w/w = 1$ を入れて整理します。

$$\underbrace{\frac{p_k}{x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial p_k}}_{\text{価格弾力性}} = \underbrace{\frac{p_k}{x_\ell}\frac{\partial h_\ell}{\partial p_k}}_{\text{補償価格弾力性}} - \underbrace{\frac{p_k x_k}{w}}_{\text{支出シェア}} \cdot \underbrace{\frac{w}{x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial w}}_{\text{所得弾力性}}$$

- 所得効果の大きさは「財 k の支出シェア × 財 ℓ の所得弾力性」です。支出シェアの小さい財（ガムやノートなど）では所得効果はほとんど無視でき、マーシャル需要とヒックス需要はほぼ一致します。
- 学部の部分均衡分析で、需要曲線の下の面積（消費者余剰）を厚生の尺度として使ってよい理由は、ここにあります（第8章）。

7.3　スルツキー行列とその性質

スルツキー方程式の右辺の代替効果を、観察できるマーシャル需要だけで書き直したものを並べた行列を考えます。

定義 7.2（スルツキー行列）

$L \times L$ 行列 $S(p,w)$ を、その (ℓ,k) 成分が

$$s_{\ell k}(p,w) = \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k}(p,w) + x_k(p,w)\,\frac{\partial x_\ell}{\partial w}(p,w) \tag{7.2}$$

となるように定め、スルツキー行列（代替行列）という。

スルツキー方程式より $s_{\ell k}(p,w) = \frac{\partial h_\ell}{\partial p_k}(p, v(p,w))$ です。さらにシェパードの補題より $h_\ell = \frac{\partial e}{\partial p_\ell}$ なので、

$$s_{\ell k} = \frac{\partial h_\ell}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 e}{\partial p_k\,\partial p_\ell} \tag{7.3}$$

となり、スルツキー行列は支出関数のヘッセ行列（価格についての2階微分の行列）に等しいことが分かります。ここから、次の重要な性質が導かれます。

定理 7.3（スルツキー行列の性質）

スルツキー方程式の仮定に加えて e が2回連続微分可能ならば、スルツキー行列 $S(p,w)$ は次の性質をもつ。

1. （負半定値性）任意の $z \in \mathbb{R}^L$ について $z^\top S(p,w)\,z \le 0$。特に $s_{\ell\ell} \le 0$。
2. （対称性）任意の ℓ, k について $s_{\ell k} = s_{k\ell}$。
3. （価格ベクトルとの積）$S(p,w)\,p = 0$。

証明

ステップ1　負半定値性

支出関数は価格について凹関数でした（第5章）。2回連続微分可能な凹関数のヘッセ行列は負半定値なので、式 (7.3) より S は負半定値です。z を第 ℓ 成分だけ 1 の単位ベクトルとすると $z^\top S z = s_{\ell\ell} \le 0$ です。

ステップ2　対称性

2階の偏微分が連続なら微分の順序を入れ替えられる（ヤングの定理）ので、$s_{\ell k} = \dfrac{\partial^2 e}{\partial p_k \partial p_\ell} = \dfrac{\partial^2 e}{\partial p_\ell \partial p_k} = s_{k\ell}$ です。

ステップ3　$Sp = 0$

ヒックス需要 $h_\ell(p,u)$ は p について0次同次なので、オイラーの定理（$k=0$）より $\sum_k p_k \frac{\partial h_\ell}{\partial p_k} = 0$、つまり $\sum_k s_{\ell k} p_k = 0$ です。 □

数式の読み方：3つの性質の意味

- 負半定値性の特別な場合 $s_{\ell\ell} \leq 0$ は「自己価格の代替効果は非正」、つまり補償需要の法則（第5章）を微分の形で述べたものです。
- 対称性は、「財 k の価格が上がったときの財 ℓ の補償需要の変化」と「財 ℓ の価格が上がったときの財 k の補償需要の変化」が等しいという、直観的には自明でない性質です。
- $Sp = 0$ は、すべての価格を同じ割合で上げても相対価格は変わらないので、代替効果は生じないことを表します。
- 式 (7.2) の右辺はすべてマーシャル需要（観察できる量）で書かれているので、これらの性質は需要データで検証できる「効用最大化の検証可能な含意」です。

発展：積分可能性

逆に、需要関数 $x(p, w)$ が0次同次性とワルラス法則を満たし、そのスルツキー行列が対称かつ負半定値ならば、その需要を生み出す選好（効用関数）が存在することが知られています（積分可能性問題）。つまり、スルツキー行列の対称性と負半定値性は、需要関数が効用最大化から生じるための「必要十分条件」に近いものです。証明では、シェパードの補題 $\partial e/\partial p_\ell = h_\ell$ を偏微分方程式とみなして支出関数を「積分」して復元します。対称性は、この偏微分方程式が解をもつための条件になっています。

補足：ここが大事　効用最大化の「検証可能な予測」

効用は観察できませんが、スルツキー行列はマーシャル需要（観察できる量）だけで書けます。したがって、その3つの性質は「消費者が効用を最大化している」という仮説を、データで検証するための条件です。特に対称性 $s_{\ell k} = s_{k\ell}$ は、直観からは決して出てこない予測で、効用最大化という理論の力をよく示しています。さらに積分可能性（発展）により、これらの性質は効用最大化の「ほぼ必要十分条件」です。つまり、ミクロ経済学の消費者理論が観察データについて言えることは、本質的にこの定理に集約されているのです。

7.4　ギッフェン財

スルツキー方程式で $k=\ell$ とすると、自己価格の効果は

$$\underbrace{\frac{\partial x_\ell}{\partial p_\ell}}_{\text{全部効果}} = \underbrace{s_{\ell\ell}}_{\text{代替効果 }(\le 0)} \underbrace{-\,x_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial w}}_{\text{所得効果}} \tag{7.4}$$

と分解されます。代替効果は必ず 0 以下なので、需要法則 $\frac{\partial x_\ell}{\partial p_\ell} \le 0$ が破れるのは、所得効果がプラスで、しかも代替効果より大きいときに限られます。

財の種類	所得効果 $-x_\ell\,\partial x_\ell/\partial w$	全部効果 $\partial x_\ell/\partial p_\ell$	需要法則
正常財（$\partial x_\ell/\partial w > 0$）	負	負	成り立つ
劣等財（所得効果が小さい）	正	負	成り立つ
ギッフェン財（所得効果が大きい）	正	正	破れる

命題 7.4（ギッフェン財は劣等財）

財 ℓ がギッフェン財（$\frac{\partial x_\ell}{\partial p_\ell} > 0$）ならば、財 ℓ は劣等財（$\frac{\partial x_\ell}{\partial w} < 0$）である。

証明　式 (7.4) より $x_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial w} = s_{\ell\ell} - \frac{\partial x_\ell}{\partial p_\ell}$ です。右辺は $s_{\ell\ell} \le 0$ と $-\frac{\partial x_\ell}{\partial p_\ell} < 0$ の和なので負です。$x_\ell \ge 0$ なので、$x_\ell > 0$ かつ $\frac{\partial x_\ell}{\partial w} < 0$ でなければなりません。 □

補足：ギッフェン財が生じやすい条件

所得効果の大きさは $x_\ell\,\partial x_\ell/\partial w$ なので、所得の大きな割合を占める（x_ℓ が大きい）劣等財ほど、ギッフェン財になりやすくなります。所得の大半を主食に使う貧しい家計の主食が、典型的な候補とされてきました。

7.5 コブ＝ダグラス型での確認

計算例：スルツキー方程式とスルツキー行列

$x_1 = \alpha w/p_1$、$x_2 = (1-\alpha)w/p_2$ について、スルツキー行列の成分を計算します。

$$s_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1\frac{\partial x_1}{\partial w} = -\frac{\alpha w}{p_1^2} + \frac{\alpha w}{p_1}\cdot\frac{\alpha}{p_1} = -\frac{\alpha(1-\alpha)w}{p_1^2} \qquad \text{（式 (7.2) に代入）}$$

$$s_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + x_2\frac{\partial x_1}{\partial w} = 0 + \frac{(1-\alpha)w}{p_2}\cdot\frac{\alpha}{p_1} = \frac{\alpha(1-\alpha)w}{p_1 p_2} \qquad \text{（}x_1\text{ は }p_2\text{ によらない）}$$

$$s_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + x_1\frac{\partial x_2}{\partial w} = 0 + \frac{\alpha w}{p_1}\cdot\frac{1-\alpha}{p_2} = \frac{\alpha(1-\alpha)w}{p_1 p_2} \qquad \text{（}x_2\text{ は }p_1\text{ によらない）}$$

同様に $s_{22} = -\alpha(1-\alpha)w/p_2^2$ です。$c = \alpha(1-\alpha)w > 0$ とおくと

$$S = c\begin{pmatrix} -1/p_1^2 & 1/(p_1p_2) \\ 1/(p_1p_2) & -1/p_2^2 \end{pmatrix}$$

で、対称性（$s_{12} = s_{21}$）が成り立ちます。Sp の第1成分は $c(-p_1/p_1^2 + p_2/(p_1p_2)) = 0$ で、第2成分も同様に 0 です。また、$z^\top S z = -c\,(z_1/p_1 - z_2/p_2)^2 \le 0$ なので負半定値です。

数式の読み方：計算結果の読み方

- $s_{12} > 0$ なので、財1と財2は補償需要の意味で代替財（ヒックスの代替財）です。一方、マーシャル需要では $\partial x_1/\partial p_2 = 0$ で、粗代替財でも粗補完財でもありません。2つの財の関係は、代替効果だけで見るか、所得効果も含めて見るかで変わりうるのです。
- 第5章の $h_1 = u(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_2}{p_1})^{1-\alpha}$ を直接 p_1 で微分すると $\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = -(1-\alpha)h_1/p_1$ で、$u = v(p,w)$ のとき $h_1 = x_1 = \alpha w/p_1$ を代入すれば s_{11} と一致します。スルツキー方程式が確かめられました。

補足：この章の知識が生きる場面

- 代替効果と所得効果の分解 → 労働供給（賃金上昇の代替効果と所得効果）、異時点間の消費（利子率の効果）、税の効果の分析。
- スルツキー行列の性質 → 需要システム（AIDSなど）の推定と検定。
- ヒックスの代替財と粗代替財の区別 → 一般均衡の一意性・安定性の条件（粗代替性、第3巻第2章）。

要点

- 価格変化の効果は、効用を固定した代替効果（ヒックス需要の変化）と、実質所得の変化による所得効果に分けられます。
- スルツキー方程式 $\partial x_\ell/\partial p_k = \partial h_\ell/\partial p_k - x_k\,\partial x_\ell/\partial w$ は、双対性の恒等式を微分し、シェパードの補題を使って導かれます。
- スルツキー行列は支出関数のヘッセ行列であり、負半定値・対称・$Sp = 0$ という、データで検証できる性質をもちます。
- ギッフェン財は、所得効果が代替効果を上回る劣等財です。

次の章へ　最後の章では、効用関数を仮定せずに観察された選択だけから出発する顕示選好理論と、価格変化による消費者の損得を金額で測る厚生測度（補償変分・等価変分）を学びます。

大学院とのつながり　スルツキー行列の対称性や負半定値性は、需要システムの実証分析（AIDSモデルなど）で、推定した需要が理論と整合的かを検定するときに使われます。

第8章

顕示選好と厚生測度

ここまでの流れ　効用関数から出発して、需要・間接効用・支出関数・スルツキー方程式までを学びました。
この章の問い　効用は観察できません。観察できる選択だけから、消費者の合理性について何が言えるでしょうか。また、価格が変わったとき、消費者がどれだけ得や損をしたかを、金額で測ることはできるでしょうか。
この章で分かること　顕示選好の弱公理、補償された価格変化に対する需要法則、補償変分と等価変分、消費者余剰との関係。

8.1　顕示選好の弱公理

ここまでは「選好 → 効用関数 → 需要」という順に議論しました。顕示選好理論では逆に、観察できる需要（選択）から出発し、その選択が満たすべき整合性の条件を考えます。

$x(p, w)$ を、価格 p と所得 w のもとで実際に選ばれた組（一つに決まるとする）とします。

定義 8.1（顕示選好）

$p \cdot y \leq w$ である組 y が、価格 p・所得 w のもとで選ばれた組 $x = x(p, w)$ と異なるとき、「x は y より顕示的に選好される」という。

数式の読み方

- y も買えたのに x を選んだのだから、消費者は y より x を好むことを、選択によって「顕示」した、と考えます。
- ここでは効用関数も選好関係も仮定していません。使うのは、観察された価格・所得・選択だけです。

定義 8.2（顕示選好の弱公理（WARP））

需要関数 $x(p, w)$ が次の条件を満たすとき、顕示選好の弱公理を満たすという。任意の (p, w)、(p', w') について、

$$p \cdot x(p', w') \leq w \text{ かつ } x(p', w') \neq x(p, w) \implies p' \cdot x(p, w) > w'. \tag{8.1}$$

数式の読み方：弱公理の読み方

- 前半は「状況 (p, w) では $x(p', w')$ も買えたのに、$x(p, w)$ が選ばれた」、つまり $x(p, w)$ が $x(p', w')$ より顕示的に選好されることです。
- 後半は「それならば、状況 (p', w') で $x(p', w')$ が選ばれたのは、$x(p, w)$ が買えなかったからだ」という意味です。もし $x(p, w)$ も買えたのに $x(p', w')$ を選んだのなら、消費者の選択は矛盾しています。

命題 8.3（効用最大化は弱公理を満たす）

選好が合理的・局所非飽和・狭義凸で、$x(p, w)$ がUMPの解（一つに決まる）ならば、$x(p, w)$ は弱公理を満たす。

証明　$x = x(p, w)$、$x' = x(p', w')$ とし、$p \cdot x' \leq w$、$x' \neq x$ とします。x' は (p, w) のもとで買えたのに、ただ一つの最適な組として x が選ばれたので、$x \succ x'$ です。仮に $p' \cdot x \leq w'$ だとすると、x は (p', w') のもとでも買え、しかも x' より好ましいので、x' が最適であることに矛盾します。よって $p' \cdot x > w'$ です。 □

弱公理から、スルツキー行列の負半定値性に対応する性質が導かれます。そのために、価格の変化に合わせて「もとの組がちょうど買えるように」所得を調整することを考えます。

定義 8.4（スルツキーの補償）

価格が p から p' に変わるとき、所得を $w' = p' \cdot x(p, w)$ に調整することを、スルツキーの補償という。

定理 8.5（補償された価格変化と需要法則）

需要関数 $x(p, w)$ がワルラス法則と弱公理を満たすとする。スルツキーの補償 $w' = p' \cdot x(p, w)$ のもとで、

$$(p' - p) \cdot \big(x(p', w') - x(p, w)\big) \leq 0 \tag{8.2}$$

が成り立ち、$x(p', w') \neq x(p, w)$ なら強い不等号が成り立つ。

証明　$x = x(p, w)$、$x' = x(p', w')$ とおきます。$x' = x$ なら左辺は 0 です。$x' \neq x$ とします。

ステップ1　左辺を展開する

$$
\begin{aligned}
(p'-p)\cdot(x'-x) &= p'\cdot x' - p'\cdot x - p\cdot x' + p\cdot x && \text{（展開）}\\
&= w' - w' - p\cdot x' + w && \text{（ワルラス法則と } w' = p'\cdot x\text{）}\\
&= w - p\cdot x'
\end{aligned}
$$

ステップ2　弱公理を使う

$p'\cdot x = w'$ なので、x は状況 (p', w') で買えたのに x' が選ばれました。弱公理（(p, w) と (p', w') の役割を入れ替えたもの）より、$p\cdot x' > w$ です。よってステップ1の値は負です。□

数式の読み方：ヒックスの補償との比較

- 第5章の補償需要の法則は「効用を一定に保つ」（ヒックスの補償）ものでした。ここでは「もとの組が買えるように所得を保つ」（スルツキーの補償）もので、効用関数を使わずに定義できます。
- 価格の変化が微小なら、2つの補償は一次の近似で一致し、式 (8.2) からスルツキー行列 S が負半定値であることが導かれます。

発展：強公理とアフリアトの定理

弱公理は2つの状況の間の整合性ですが、3つ以上の状況の間で循環が起きないことを要求するのが顕示選好の強公理（SARP）です。需要関数が強公理を満たすことは、それが合理的な選好の最大化から生じるための必要十分条件になります。また、有限個の観察データについては、それらを説明する（単調で凹な）効用関数が存在するための条件を与えるアフリアトの定理があり、実験経済学や実証研究で使われています。

補足：ここが大事　効用を仮定しない消費者理論

顕示選好理論の意義は、効用関数や選好という観察できないものを一切仮定せず、観察できる価格・所得・選択だけで合理性を表現したことです。弱公理（と強公理）は、有限個のデータから合理性を検証する条件として、実験経済学や家計データの分析で使われています。第7章のスルツキー行列の性質（微分で表した条件）と、この章の顕示選好の条件（不等式で表した条件）は、同じ合理性を異なる形で表したものです。

8.2 補償変分と等価変分

次に、価格の変化によって消費者がどれだけ得や損をしたかを、金額で測る方法を考えます。効用は序数的で、その差には意味がありませんでした。そこで、支出関数を使って「効用の変化」を「金額」に換算します。

価格が p^0 から p^1 に変わり、所得 w は一定とします。変化前と変化後の効用を $u^0 = v(p^0, w)$、$u^1 = v(p^1, w)$ とします。

定義 8.6（等価変分と補償変分）

$$EV = e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = e(p^0, u^1) - w \qquad \text{（等価変分）} \qquad (8.3)$$

$$CV = e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0) = w - e(p^1, u^0) \qquad \text{（補償変分）} \qquad (8.4)$$

数式の読み方：2つの測度の意味

- 等価変分 EV：価格を変化前の p^0 のままにしたとき、変化後の効用 u^1 と**同じ（等価な）**効用を得るには、所得がいくら変わればよいか。変化前の価格で測った金額です。
- 補償変分 CV：価格が p^1 に変わった後で、変化前の効用 u^0 を取り戻すには、所得をいくら**補償**すればよいか（の符号を変えたもの）。変化後の価格で測った金額です。
- 2つ目の等号は、双対性 $e(p, v(p, w)) = w$ を使っています。価格が上がって損をするときは、どちらも負になります。
- $e(\bar{p}, \cdot)$ はある固定した価格 $\bar{p}$ のもとで効用を金額に換算する関数で、効用の単調増加変換をしても値は変わりません。そのため、EV と CV は効用関数の選び方によらない、意味のある金額になります。

8.3 ヒックス需要曲線の左側の面積

財1の価格だけが p_1^0 から p_1^1 に変わる場合、EV と CV はヒックス需要曲線の左側の面積として表せます。

命題 8.7（厚生測度と需要曲線の面積）

財1の価格だけが p_1^0 から p_1^1 に変わるとき（他の価格を $\bar{p}_{-1}$ とする）、

$$CV = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(s, \bar{p}_{-1}, u^0)\, ds \tag{8.5}$$

$$EV = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(s, \bar{p}_{-1}, u^1)\, ds \tag{8.6}$$

が成り立つ。

証明

方針　支出関数の差を、シェパードの補題と微積分の基本定理で積分の形に書き直します。

CV について、双対性から $w = e(p^0, u^0)$ なので

$$\begin{aligned} CV &= e(p^0, u^0) - e(p^1, u^0) && (w = e(p^0, u^0) \text{ を代入}) \\ &= -\int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e}{\partial p_1}(s, \bar{p}_{-1}, u^0)\, ds && (\text{微積分の基本定理}) \\ &= -\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(s, \bar{p}_{-1}, u^0)\, ds && (\text{シェパードの補題}) \end{aligned}$$

です。EV も、$w = e(p^1, u^1)$ を使って同様に示せます。 □

ふつうの消費者余剰の変化は、マーシャル需要曲線の左側の面積 $\Delta CS = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} x_1(s, \bar{p}_{-1}, w)\, ds$ です。3つの測度の大小関係は、所得効果の向きで決まります。

命題 8.8（3つの測度の大小関係）

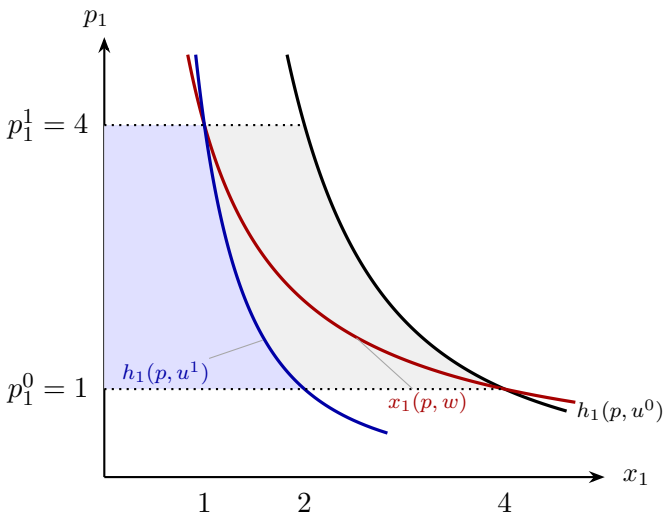
財1が正常財で、その価格が上がる（$p_1^1 > p_1^0$）とき、$CV \le \Delta CS \le EV \le 0$ である。

証明　p_1^0 と p_1^1 の間の価格 s では、間接効用は価格について非増加なので $u^1 \le v(s, \bar{p}_{-1}, w) \le u^0$ です。正常財ではヒックス需要は効用水準について増加するので、双対性 $x_1 = h_1(\cdot, v)$ と合わせて

$$h_1(s, \bar{p}_{-1}, u^1) \le x_1(s, \bar{p}_{-1}, w) \le h_1(s, \bar{p}_{-1}, u^0)$$

です。各辺を s について p_1^0 から p_1^1 まで積分し、符号を変えると結論が得られます。 □

図 8.1　補償変分・等価変分・消費者余剰



第7章と同じ例（$u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、$w = 8$、$p_2 = 1$、$p_1 : 1 \to 4$）。$u^0 = 4$、$u^1 = 2$。$h_1(p, u^0) = 4/\sqrt{p_1}$、$x_1 = 4/p_1$、$h_1(p, u^1) = 2/\sqrt{p_1}$。

図の読み方

1. 縦軸が価格、横軸が需要量です。黒は変化前の効用 u^0 のヒックス需要曲線、赤はマーシャル需要曲線、青は変化後の効用 u^1 のヒックス需要曲線です。

2. 3本の曲線は、$p_1^0 = 1$ では黒と赤が（$x_1 = 4$ で）、$p_1^1 = 4$ では赤と青が（$x_1 = 1$ で）交わっています。これは双対性 $x(p, w) = h(p, v(p, w))$ の表れです。

3. 価格 1 から 4 の間で黒い曲線の左側の面積（灰色と青の領域の合計）が $|CV|$、青い曲線の左側の面積（青の領域）が $|EV|$ です。赤い曲線の左側の面積 $|\Delta CS|$ はその間にあります。

4. 財1は正常財なので、所得効果のためにマーシャル需要曲線はヒックス需要曲線より傾きが緩やか（価格に敏感）で、2本のヒックス需要曲線の間を通ります。

計算例：数値で確かめる

支出関数は $e(p,u) = 2u\sqrt{p_1 p_2}$ です。式 (8.3) と (8.4) から

$$CV = w - e(p^1, u^0) = 8 - 2 \cdot 4\sqrt{4 \cdot 1} = 8 - 16 = -8 \qquad (u^0 = 4、\ p^1 = (4,1))$$
$$EV = e(p^0, u^1) - w = 2 \cdot 2\sqrt{1 \cdot 1} - 8 = 4 - 8 = -4 \qquad (u^1 = 2、\ p^0 = (1,1))$$

です。積分で確かめると、$CV = -\int_1^4 4s^{-1/2} ds = -8\left[\sqrt{s}\right]_1^4 = -8$ で一致します。消費者余剰の変化は

$$\Delta CS = -\int_1^4 \frac{4}{s}\, ds = -4\ln 4 \approx -5.55$$

で、$CV = -8 \leq \Delta CS \approx -5.55 \leq EV = -4$ となっています。

数式の読み方：どの測度を使えばよいか

- CV は「変化を受け入れてもらうのに、いくら補償すればよいか」を測るので、補償の議論に向いています。
- EV は、どの政策もすべて同じ基準価格 p^0 で評価するので、複数の政策を比べて順位をつけるのに向いています。
- 消費者余剰 ΔCS は計算が簡単ですが、一般には CV と EV の近似にすぎません。所得効果が小さいとき（支出に占める財のシェアが小さいときなど）は、3つの値は近くなります。

補足：準線形効用では3つが一致する

準線形効用 $u = \phi(x_1) + x_2$ では、財1の需要は所得によらない（所得効果がない）ので、内点解では $h_1(p,u) = x_1(p,w)$ で、3本の需要曲線が一致します。このとき $CV = \Delta CS = EV$ となり、消費者余剰は厳密な厚生測度になります。学部の余剰分析が暗に仮定しているのは、この状況です。

補足：この章の知識が生きる場面

- 等価変分・補償変分 → 費用便益分析、税や関税の厚生分析、独占や価格規制の評価。
- 消費者余剰が近似として使える条件（所得効果が小さい）→ 産業組織論や国際貿易での部分均衡の厚生分析。
- 顕示選好 → 実験経済学、ノンパラメトリックな需要分析（アフリアトの定理）。

要点

- 顕示選好の弱公理は、観察された選択だけで書かれた合理性の条件で、効用最大化から導かれます。
- 弱公理とワルラス法則から、スルツキーの補償をした価格変化について需要法則が成り立ちます。
- 補償変分 CV と等価変分 EV は、支出関数を使って効用の変化を金額に換算した厚生測度で、ヒックス需要曲線の左側の面積で表せます。
- 正常財の価格上昇では $CV \leq \Delta CS \leq EV$ で、所得効果がなければ3つは一致します。

この巻のまとめ　選好関係から出発し、効用関数、UMPとEMP、4つの関数とその関係（ロイの恒等式・シェパードの補題・双対性・スルツキー方程式）、そして顕示選好と厚生測度までを学びました。序章の地図（図 序.1）のすべての矢印を、自分で証明できるかどうか確かめてみてください。

次の巻へ　第2巻では生産者理論を学びます。利潤最大化と費用最小化、費用関数とシェパードの補題、利潤関数とホテリングの補題は、この巻の支出関数とヒックス需要とまったく同じ構造をもっています。