DSGEモデル

研究マニュアル

ニューケインジアン・モデルから
中規模DSGEモデルの推定と応用まで

第1版　2026年11月

作成：@dokugaku_econ

公開：econ-manuals.netlify.app

本書について

本書は、ニューケインジアン（NK）モデルを学んだ読者が、研究で使われる中規模DSGEモデルを「作る・解く・推定する・使う」ところまでを、一続きの流れとして学べるように書いた研究マニュアルです。

構成

第I部 モデルを作る（第1章〜第4章）
: ルーカス批判から出発し、摩擦を一つずつ加えて中規模モデルを組み立て、定常状態を求め、対数線形化します。

第II部 モデルを解く（第5章）
: ブランシャール＝カーン条件とQZ分解によって、モデルを状態空間表現に直します。

第III部 データで推定する（第6章〜第8章）
: 観測方程式、カルマンフィルタ、ベイズ推定を、統計の基礎から説明します。

第IV部 推定したモデルを使う（第9章・第10章）
: インパルス応答、分散分解、歴史分解、反実仮想の政策分析と、DSGEモデルへの批判を扱います。

第V部 発展（第11章〜第14章）
: ゼロ金利制約、金融摩擦、開放経済、異質的経済主体のモデルへの入口を紹介します。

前提とする知識

NKモデルの3方程式（動学IS曲線・NKフィリップス曲線・金利ルール）と、その導出に使うカルボ型価格設定を知っていることを前提にします。これらは「ニューケインジアン攻略マニュアル（NK編）」で扱っています。また、ラムゼイモデルのオイラー方程式、行列の固有値、差分方程式、多変数の最適化についての基礎知識があると読みやすくなります（「ラムゼイモデル攻略マニュアル」「大学院マクロのための経済数学」）。統計学については予備知識を仮定せず、必要な内容を第7章・第8章で説明します。

枠の使い分け

青の枠は押さえておきたい要点、赤の枠は図の読み方、緑の枠は発展的な話題、灰色の枠は数式の読み方・計算例・補足です。緑の枠は飛ばしても本筋は追えます。

目次

本書について i

序章：DSGE編の地図 1

第I部　モデルを作る 4

1　なぜ中規模DSGEが必要か 5

1.1　ルーカス批判：なぜ「構造」が必要なのか 5

1.2　DSGEモデルとは何か 7

1.3　3方程式モデルでは何が足りないのか 8

1.4　中規模モデルの設計図 10

2　中規模DSGEモデルの構造 12

2.1　モデルの全体像 12

2.2　家計 13

2.3　労働組合と賃金の設定 18

2.4　企業 19

2.5　価格と賃金のフィリップス曲線 21

2.6　政府と中央銀行 24

2.7　市場の均衡 24

2.8　7つの構造ショック 25

2.9　摩擦は何をしているのか 26

3　均衡条件と定常状態 29

3.1　均衡条件の全体像 29

3.2　定常状態とは何か 30

3.3　定常状態を計算する手順 30

3.4　経済成長がある場合 33

3.5　カリブレーションと推定の役割分担 35

4 対数線形化 37

4.1 線形化の目的と基本ルール 37
4.2 家計ブロックの線形化 38
4.3 企業ブロックの線形化 41
4.4 資源制約と金利ルール 41
4.5 線形化モデルの全体 41
4.6 金融政策はどう波及するのか 43
4.7 練習：RBCモデルで手順を通す 44

第II部 モデルを解く 46

第II部のはじめに 47

5 合理的期待モデルの解法 48

5.1 「解く」とは何をすることか 48
5.2 2変数の例：RBCモデルの鞍点経路 49
5.3 ブランシャール＝カーン条件：一般の場合 52
5.4 **A** が正則でないとき：QZ分解 54
5.5 中規模モデルに当てはめる 56
5.6 ほかの解法との関係 59
5.7 状態空間表現 60
5.8 練習問題 63

第III部 データで推定する 65

第III部のはじめに 66

6 モデルとデータをつなぐ 67

6.1 何を観測するか 67
6.2 トレンドをどう扱うか 68
6.3 観測方程式 69
6.4 確率的特異性 71
6.5 モデルとデータのずれ 73

7 カルマンフィルタと尤度関数 75

7.1 尤度とは何か 75
7.2 統計の準備：正規分布の性質 76
7.3 1変数で考える 77

7.4 一般のカルマンフィルタ 79
7.5 尤度の計算 80
7.6 中規模モデルでの実験 81
7.7 カルマン平滑化 83
7.8 実務上の注意 84
7.9 練習問題 85

8 ベイズ推定 86

8.1 なぜベイズ推定なのか 86
8.2 ベイズの定理 87
8.3 事前分布の選び方 88
8.4 事後分布の要約 89
8.5 事後分布からサンプリングする 90
8.6 収束の診断 92
8.7 人工データでの推定 94
8.8 識別の問題 96
8.9 周辺尤度とモデルの比較 97
8.10 実データで推定するときの注意 99
8.11 練習問題 100

第IV部 推定したモデルを使う 102

第IV部のはじめに 103

9 推定結果の読み方 104

9.1 インパルス応答とその不確実性 104
9.2 分散分解 106
9.3 歴史分解 108
9.4 予測 110

10 政策分析とDSGEモデルの評価 112

10.1 反実仮想分析とは 112
10.2 政策ルールを変える 112
10.3 政策のフロンティア 113
10.4 ルーカス批判を確かめる 114
10.5 DSGEモデルへの批判 115

10.6 批判への応答 116
10.7 DSGEモデルとどう付き合うか 117
10.8 練習問題 118

第V部 発展 120

第V部のはじめに 121

11 ゼロ金利制約と非線形性 122

11.1 線形近似が使えないとき 122
11.2 ゼロ金利制約のもとでの3方程式モデル 123
11.3 フォワード・ガイダンスのパズル 124
11.4 非線形の解法の地図 126

12 金融摩擦 128

12.1 なぜ金融が実体経済に影響するのか 128
12.2 BGGの外部資金プレミアム 129
12.3 中規模モデルへの組み込み 130
12.4 金融アクセラレーター 131
12.5 リスク・ショック 133
12.6 金融摩擦の他のアプローチ 134

13 開放経済 136

13.1 開放経済で新しく加わるもの 136
13.2 金利平価 136
13.3 二つのインフレ率 137
13.4 閉鎖経済との同型性 137
13.5 推定される開放経済モデル 138

14 異質的経済主体とHANK 140

14.1 代表的家計のモデルが見落としていること 140
14.2 2主体のモデル（TANK） 140
14.3 HANKモデル 142

終章：DSGE編を振り返って 144

参考文献 146

索引 152

序章：DSGE編の地図

NK編では、独占的競争と価格の硬直性という二つの仮定を加えるだけで、金融政策が実物を動かすモデルが手に入ることを見ました。最後にたどり着いたのは、動学IS曲線・NKフィリップス曲線・金利ルールからなる3方程式モデルです。理論の骨格としては、これで十分です。

しかし、このモデルをそのまま実際のデータに当てはめようとすると、すぐに困ったことが起こります。モデルには投資がありません。賃金も出てきません。そして何より、ショックが消えると経済はすぐに元に戻ってしまい、データが示すような「じわじわと効いて、ゆっくり戻る」動きを生み出せません。

本書（DSGE編）の目的は、**3方程式モデルを、実際のデータと対話できるモデルに育てる**ことです。そのために本書は、次の四つの作業を順に行います。

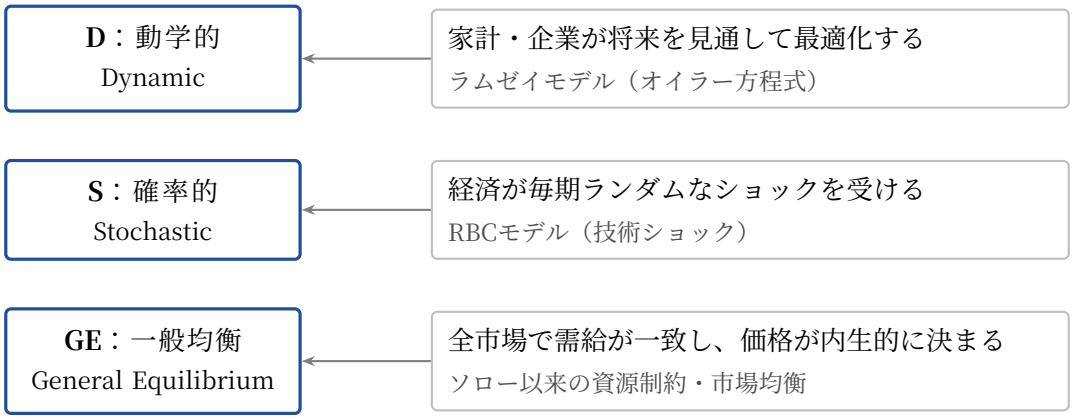
1. **作る**：資本蓄積と各種の摩擦を加え、中規模のDSGEモデルを組み立てる（第I部）。
2. **解く**：期待を含む線形の差分方程式系を解き、状態空間表現に直す（第II部）。
3. **推定する**：カルマンフィルタで尤度を計算し、ベイズ推定でパラメータを求める（第III部）。
4. **使う**：推定したモデルで景気変動の要因を分解し、政策を評価する（第IV部）。

最後の第V部では、ゼロ金利制約、金融摩擦、開放経済、異質的経済主体といった研究の最前線への入口を紹介します。

「DSGE」という名前を分解する

DSGEは Dynamic Stochastic General Equilibrium の頭文字で、日本語では「動学的確率的一般均衡」と訳されます。長い名前ですが、三つの要素はどれも、これまでの攻略マニュアルで一つずつ手に入れてきたものです。

図 1　DSGEの三つの要素は、どこから来たのか



NK編で加えた独占的競争と価格の硬直性は、この三つの要素のどれにも属さない「摩擦」である。現代のDSGEモデルは、この三つの骨格の上に摩擦を積み重ねたものと見ることができる。

ここから分かるように、DSGEモデルは何か特別な新しい理論ではありません。**ラムゼイモデルの骨格に、RBCモデルの確率的ショックと、NKモデルの名目硬直性を載せ、さらにいくつかの摩擦を加えたもの**です。本書で新しく学ぶのは、主に二つのことです。一つは、どんな摩擦をなぜ加えるのか。もう一つは、そうしてできた大きなモデルを、どうやって解き、データで推定するのか、です。

本書の流れ

第I部 モデルを作る（第1章〜第4章）

なぜ中規模のモデルが必要なのかを確かめたうえで（第1章）、家計・企業・労働組合・政府・中央銀行からなるモデルを組み立てます（第2章）。均衡条件を整理して定常状態を計算し（第3章）、対数線形化して線形の方程式体系にまとめます（第4章）。

第II部 モデルを解く（第5章）

NK編第6章のブランシャール＝カーン条件を、状態変数を含む一般的な場合に拡張し、解を状態空間表現の形に直します。

第III部 データで推定する（第6章〜第8章）

モデルと観測データをつなぎ（第6章）、カルマンフィルタで尤度を計算し（第7章）、ベイズ推定でパラメータを推定します（第8章）。統計学の予備知識は仮定せず、基礎から説明します。

第IV部 推定したモデルを使う（第9章・第10章）

インパルス応答・分散分解・歴史分解の読み方と、政策分析への応用、そしてDSGEモデルへの批判を扱います。

第V部 発展

ゼロ金利制約、金融摩擦、開放経済、異質的経済主体モデル（HANK）への入口を紹

介します。

本書は5つの部からなります。第I部を読み終えると、中規模DSGEモデルの線形化された方程式体系が手元に揃い、各式が経済学的に何を表しているのかを説明できるようになります。

記号と約束

記号は原則としてNK編に合わせています。時間は離散で四半期を想定し、X_t の定常値を X（添字なし）、対数乖離を $\hat{x}_t \equiv \ln X_t - \ln X$ と書きます。E_t は t 期の情報に基づく条件付き期待値です。価格改定の確率に関わるカルボ・パラメータは、NK編と同じく ω で表し、価格には ω_p、賃金には ω_w と添字を付けて区別します。

本書で新しく現れる約束が二つあります。

- 名目金利 i_t と投資 I_t はどちらも頭文字が i なので、乖離を表すときは**名目金利を** $\hat{\imath}_t \equiv i_t - \rho$（$\rho$ は定常状態の金利）、**投資を大文字の** $\hat{I}_t$ と書いて区別します。
- インフレ率 π_t と金利はもともと「率」なので、対数乖離ではなく定常値からの差（パーセント・ポイント）で測ります。定常インフレ率はゼロとします。

補足：「大学院マクロのための経済数学」との記号の対応

同じ対象を表す記号の違いをまとめておきます。対数乖離 $\hat{x}_t$、産出ギャップ $\tilde{y}_t$、カルボ・パラメータ ω、政策関数 $\mathbf{F}$、カルマンフィルタの $\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}$・$\boldsymbol{\nu}_t$・$\mathbf{G}_t$・$\mathbf{K}_t$ などは共通です。

対象	本書	大学院マクロのための経済数学
定常状態の値	X（添字なし）	$\bar{x}$
t 期の生産に使う資本	K_{t-1}（期末の表記）	k_t（期首の表記）
線形化したモデル	$\mathbf{A}E_t\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{B}\mathbf{X}_t$	$A_0\mathrm{E}_t[y_{t+1}] = A_1 y_t$
先決変数・ジャンプ変数	$\mathbf{s}_t$、$\mathbf{y}_t$	x_t、p_t
状態の推移	$\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{s}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$	$x_{t+1} = Hx_t + \eta\varepsilon_{t+1}$
観測方程式	$\mathbf{z}_t = \mathbf{d} + \mathbf{H}\mathbf{s}_t + \mathbf{u}_t$	$y_t = Zs_t + u_t$

とくに $\mathbf{P}$ と $\mathbf{H}$ は、2冊で指すものが入れかわっているので注意してください。

枠の色の使い分けもNK編と同じです。青は押さえておきたい要点、赤は図の読み方、緑は発展的な話題、灰色は数式の読み方・計算例・補足です。緑の枠は飛ばしても本筋は追えます。

第 I 部

モデルを作る

第1章〜第4章

第1章

なぜ中規模DSGEが必要か

> **ここまでの流れ**　NK編では、3方程式モデルによって、金融政策が産出とインフレをどう動かすかを分析できるようになりました。
> **この章の問い**　では、なぜその3方程式モデルのままではいけないのでしょうか。モデルを大きくすると何が得られ、何を失うのでしょうか。
> **この章で分かること**　「構造モデル」がなぜ必要なのかという方法論上の理由（ルーカス批判）。3方程式モデルがデータと合わない具体的な点。そして、第2章で加える摩擦の一つ一つが、どの事実に対応しているのかという設計図。

1.1　ルーカス批判：なぜ「構造」が必要なのか

DSGEモデルの話を始める前に、そもそもなぜ家計や企業の最適化問題から組み立てる「構造モデル」が必要なのかを確認しておきます。データの相関関係をそのまま推定するだけでは、なぜいけないのでしょうか。

1.1.1　誘導形と構造形

1960年代から70年代にかけて、マクロ経済の分析には大規模な計量モデルが使われていました。消費関数、投資関数、フィリップス曲線といった関係式をデータから一本ずつ推定し、それらを組み合わせて政策の効果を予測する、という方法です。

これに対してLucas (1976) は根本的な疑問を投げかけました。データから推定された関係式の係数は、**その期間にとられていた政策のもとで**家計や企業が最適に行動した結果として現れたものです。政策が変われば、人々の期待も行動も変わり、関係式の係数そのものが変わってしまいます。だとすると、過去のデータで推定した係数を使って「政策を変えたらどうなるか」を予測するのは、論理的に矛盾しています。

この批判を正確に述べるために、二つの言葉を区別しておきます。

定義 1.1 (構造パラメータと誘導形)　選好・技術・価格設定の摩擦など、政策が変わっても変化しないと考えられる経済の基本的な性質を表すパラメータを**構造パラメータ**（深いパラメータ）と呼ぶ。これに対して、観測される変数どうしの関係を直接表した式を**誘導形**と呼び、その係数は一般に構造パラメータと政策パラメータの両方に依存する。

1.1.2 3方程式モデルで確かめる

ルーカス批判は抽象的に聞こえますが、NK編の3方程式モデルで具体的に確かめることができます。

経済に、持続性 ρ_u をもつコスト・プッシュ・ショック u_t だけがあるとします（$u_t = \rho_u u_{t-1} + \varepsilon_t^u$）。中央銀行は $\hat{\imath}_t = \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t$ というルールに従っているとします。NK編第6章の未定係数法と同じく、解を $\tilde{y}_t = \psi_y u_t$、$\pi_t = \psi_\pi u_t$ と推測すると、$E_t \tilde{y}_{t+1} = \rho_u \tilde{y}_t$、$E_t \pi_{t+1} = \rho_u \pi_t$ です。これを動学IS曲線に代入すると

$$\tilde{y}_t = \rho_u \tilde{y}_t - \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t - \rho_u \pi_t\right)$$

となり、整理すれば

$$\tilde{y}_t = -\frac{\phi_\pi - \rho_u}{\sigma(1-\rho_u) + \phi_y}\,\pi_t \tag{1.1}$$

を得ます。

数式の読み方：この式が言っていること

- (1.1)は、データ上で観測される産出ギャップとインフレ率の関係です。$\phi_\pi > \rho_u$ なら係数は**負**です。つまり、この経済のデータからフィリップス曲線を推定しようとすると、「インフレが高い時期ほど景気が悪い」という、右下がりの関係が観測されます。
- ところが、この経済の本当のフィリップス曲線（NKPC）の傾き κ は正です。データに現れる関係は、NKPCそのものではなく、**NKPCと金融政策ルールが組み合わさった結果**です。
- しかも係数には政策パラメータ ϕ_π、ϕ_y が入っています。中央銀行がインフレへの反応を強めれば、観測される関係の傾きも変わります。過去のデータで推定した傾きは、新しい政策のもとでは成り立ちません。

要点：構造モデルが必要な理由

観測される相関関係（誘導形）は、構造パラメータと政策パラメータの両方に依存します。したがって、政策を変えたときの効果を予測するには、**政策が変わっても変化しない構造パラメータを特定し、そこから新しい均衡を計算し直す**必要があります。DSGEモデルは、まさにそのための道具です。家計の選好、企業の技術、価格・賃金の改定頻度といった構造パラメータを推定しておけば、政策ルールを入れ替えて、新しい均衡を計算できます。

補足：ルーカス批判の「限界」

DSGEモデルの構造パラメータが、本当に政策から独立しているかどうかは自明ではありません。たとえば価格改定の頻度（$1-\omega_p$）は、インフレ率が高い環境では上がることが知られています。本書で扱うカルボ型の価格設定は、改定頻度を外生的に固定しているので、この点では「十分に構造的」とは言えません。この論点は第10章で再び取り上げます。

1.2　DSGEモデルとは何か

ルーカス批判を受けて、マクロ経済学は**ミクロ的基礎**をもつモデル、すなわち経済主体の最適化問題から組み立てたモデルへと大きく舵を切りました。その流れを簡単に振り返っておきます。

出発点はKydland and Prescott (1982) の実物的景気循環（RBC）モデルです。ラムゼイモデルに確率的な技術ショックを入れるだけで、景気循環の統計的な性質がかなりの程度再現できることを示しました。ただしRBCモデルには貨幣も価格の硬直性もなく、金融政策は分析できません。

1990年代になると、RBCモデルの方法論（最適化・合理的期待・一般均衡）と、ケインズ経済学の名目硬直性を組み合わせる動きが進みました。Goodfriend and King (1997) はこれを**新しい新古典派総合**と呼んでいます。NK編の3方程式モデルは、その最も簡潔な形です。

2000年代に入ると、この枠組みを実際のデータに当てはめる研究が本格化します。Christiano, Eichenbaum and Evans (2005) は、さまざまな摩擦を加えたモデルが、金融政策ショックに対する経済の反応をよく再現できることを示しました。Smets and Wouters (2003, 2007) は、同様のモデルをベイズ推定によってユーロ圏と米国のデータに当てはめ、時系列モデルに匹敵する予測力をもつことを示しました。これらのモデルは**中規模DSGEモデル**と呼ばれ、多くの中央銀行が政策分析や予測のために同種のモデルを開発・保有するようになりました。

要点：DSGEモデルの作り方の全体像

DSGEモデルの分析は、どれも次の手順を踏みます。

1. 家計・企業・政府などの最適化問題を書き、その一階条件と市場均衡条件を集める。
2. 定常状態を計算し、その周りで均衡条件を線形近似する。
3. 合理的期待のもとで線形の体系を解き、状態空間表現を得る。
4. データを使ってパラメータを推定し、推定されたモデルで分析する。

第I部は1と2、第II部は3、第III部と第IV部は4にあたります。

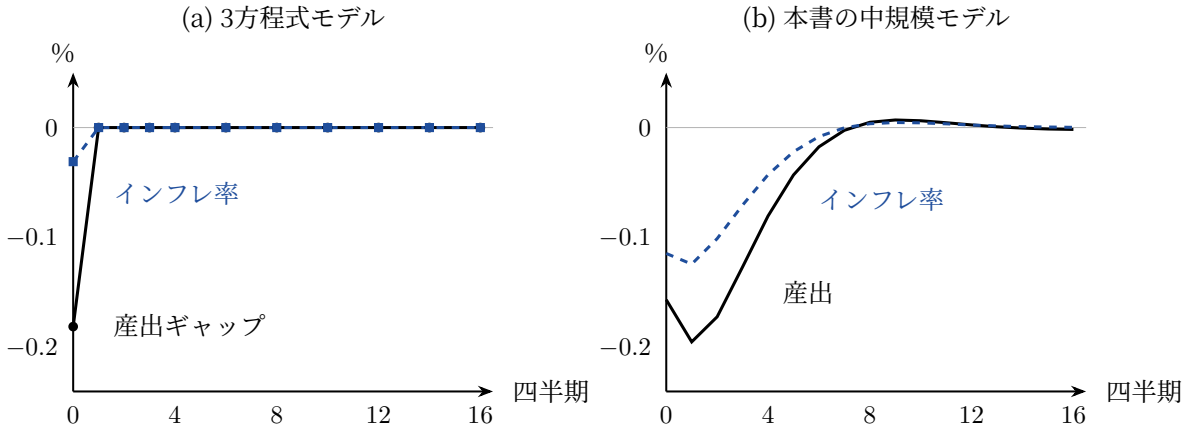
1.3　3方程式モデルでは何が足りないのか

3方程式モデルの弱点を、具体的に見ていきましょう。最も分かりやすいのは、金融政策ショックへの反応です。

1.3.1　内生的な持続性がない

NK編の3方程式モデルに、持続性のない（1期限りの）金融政策ショック v_t が当たったとします。基本NKモデルには資本や債務のように過去を引きずる変数がないので、解は今期のショックだけの関数になり、$\tilde{y}_t = \psi_y v_t$、$\pi_t = \psi_\pi v_t$ という形をとります。ショックが1期で消えれば、翌期以降の期待値はすべてゼロです。したがって、**ショックが当たった期だけ産出とインフレが動き、翌期には完全に元に戻ります。**

図 1.1　金融政策ショックへの反応：3方程式モデルと中規模モデル



どちらも、名目金利を1期だけ0.25%ポイント（年率約1%）引き上げるショックへの反応。(a) はNK編の標準的なカリブレーション、(b) は第2章で組み立てるモデルを第3章・第4章の方法で線形化し、代表的なパラメータ値で計算したもの。

図の読み方

- (a) の3方程式モデルでは、ショックの当たった期（0期）だけ産出とインフレが下がり、1期目にはぴたりとゼロに戻ります。経済の側にショックを「記憶」する仕組みが何もないためです。
- (b) の中規模モデルでは、同じ1期限りのショックに対して、産出もインフレも**1期後に底を打ち**、その後2年ほどかけてゆっくり戻ります。ショックそのものは1期で消えているので、この持続性は**モデルの内部から生まれたもの**です。
- 反応が最大になる時点が0期より後ろにずれ、山（ここでは谷）の形を描く応答を、**こぶ型（hump-shaped）の応答**と呼びます。

1.3.2 データは何を示しているのか

では、実際の経済はどちらに近いのでしょうか。金融政策ショックの効果を測る標準的な方法は、構造VAR（ベクトル自己回帰）モデルです。金利・産出・物価などの時系列をVARで推定し、「中央銀行の通常の反応では説明できない金利の動き」を金融政策ショックとして識別して、それに対する各変数の反応を描きます。

Christiano, Eichenbaum and Evans (2005) は、米国データを使ったこの種の分析から、金融緩和ショックに対する経済の反応について、おおむね次のような特徴を報告しています。

- 産出・消費・投資はいずれも**こぶ型**に反応し、反応のピークはおよそ1年半後に来る。
- インフレ率の反応はさらに遅く、当初はほとんど動かず、ピークはおよそ2年後に来る。
- 実質賃金の反応は小さい。

3方程式モデルの反応は、このどれとも合いません。産出は即座に最大の反応を示し、インフレも即座に動き、そして1期で消えます。

要点：3方程式モデルの限界

1. **持続性がない**：過去を引きずる状態変数がないため、反応の持続性はすべてショックの持続性から借りてくるしかない。
2. **投資と賃金がない**：景気循環で最も大きく変動する投資を扱えず、賃金の動きも分析できない。
3. **観測できる変数が少ない**：データと照合できる変数が産出・インフレ・金利に限られ、推定に使える情報が乏しい。

3つ目の点は、推定の段階で重要になります。第6章で詳しく見るように、多くの観測変数を使ってモデルを推定するには、それに見合うだけの数のショックがモデルに必要です。3方程式モデルは、この点でも窮屈なのです。

1.3.3 VARとDSGEの役割分担

ここで、構造VARとDSGEモデルの関係を整理しておきます。

構造VARは、経済理論にあまり依存せずに「データが何を語っているか」を明らかにする道具です。ただし、ルーカス批判の意味で構造的ではないので、政策ルールを変えたらどうなるか、という問いには答えられません。

DSGEモデルは、構造パラメータをもつので政策の変更を分析できます。ただし、モデルの仮定が間違っていれば、その答えも間違います。

そこで、両者は次のように組み合わせて使われてきました。**VARで確かめた事実を、**

DSGEモデルが再現できるかどうかを調べるのです。Christiano, Eichenbaum and Evans (2005) は、VARのインパルス応答とモデルのインパルス応答の距離が最も小さくなるようにパラメータを選ぶ方法（インパルス応答マッチング）をとりました。一方Smets and Wouters (2007) は、データ全体の尤度を使うベイズ推定をとりました。本書の第III部では後者を扱います。

1.4　中規模モデルの設計図

3方程式モデルの限界を克服するために、第2章では次のような摩擦を加えます。どれも「ある特定の事実を再現するために」入れられたものだという点が大切です。

摩擦	狙っている事実	主なパラメータ
資本蓄積	投資という最も変動の大きい需要項目を扱う	δ、α
消費の習慣形成	消費のこぶ型の反応	h
投資の調整費用	投資のこぶ型の反応	ψ
資本稼働率の変動	限界費用の反応を穏やかにし、インフレの反応を遅らせる	ϑ
賃金の硬直性	実質賃金の反応が小さいこと	ω_w
価格・賃金のインデクセーション	インフレ率の持続性	ι_p、ι_w
金利の平滑化	政策金利がゆっくり動くこと	ρ_i

これらの摩擦は、どれもミクロの最適化問題の形で導入されます。たとえば「消費はゆっくり動く」と直接仮定するのではなく、「家計の効用が前期の消費水準にも依存する」と仮定し、その結果として消費がゆっくり動くことを導きます。ルーカス批判を踏まえれば、この手間を省くわけにはいきません。

発展：「摩擦を足せば合う」ことへの批判

摩擦を一つ加えるたびにパラメータが増え、モデルはデータに合わせやすくなります。そのため、「当てはまりを良くするために都合のよい摩擦を足しているだけではないか」という批判があります。

とくにインデクセーション（改定できない価格を過去のインフレ率に合わせて自動的に引き上げる仕組み）は、ミクロの価格データではほとんど観察されません。ミクロデータでは、多くの価格が数か月から1年以上まったく変わらないからです。それでもマクロのインフレ率の持続性を説明するためにモデルに入れられている、という点には注意が必要です。こうした批判とその応答は第10章で扱います。

要点：この章のまとめ

- 観測される相関関係は政策に依存する（ルーカス批判）。政策の効果を分析するには、政策から独立した構造パラメータをもつモデルが必要である。
- DSGEモデルは、ラムゼイモデルの骨格にRBCの確率的ショックとNKの名目硬直性を載せたものであり、その分析は「作る・解く・推定する・使う」の4段階で進む。
- 3方程式モデルは内生的な持続性をもたず、投資も賃金もない。データが示すこぶ型の反応を再現できない。
- 中規模モデルでは、各摩擦が特定の事実に対応するように導入される。

次の章へ　設計図ができたので、次章では実際にモデルを組み立てます。登場する経済主体は、家計、労働組合、中間財企業、最終財企業、政府、中央銀行です。一つずつ最適化問題を書き、一階条件を導いていきます。

第2章

中規模DSGEモデルの構造

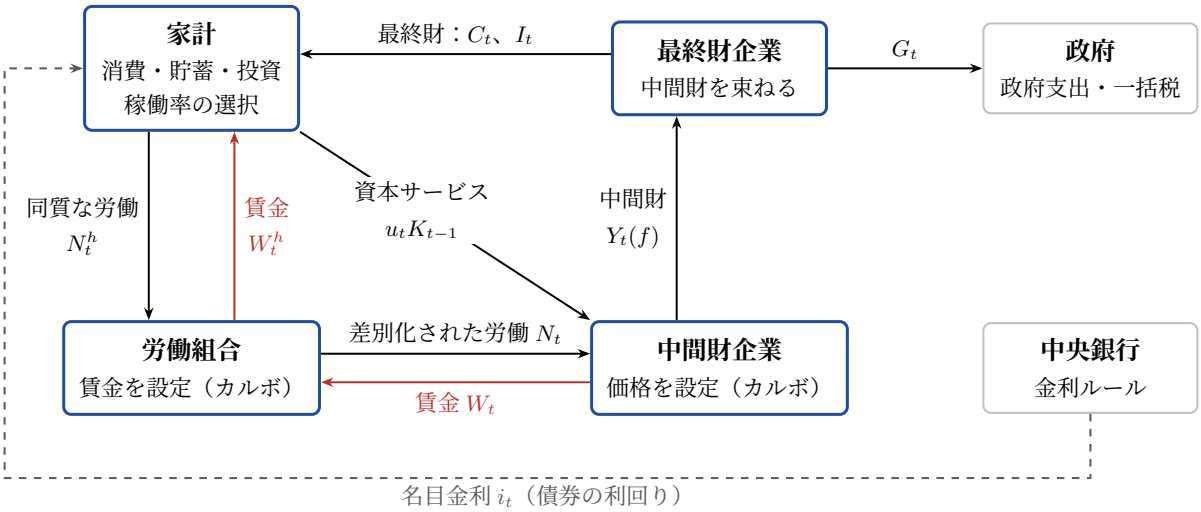
> **ここまでの流れ**　第1章では、3方程式モデルにどんな摩擦を加えればデータに近づくのか、その設計図を描きました。
> **この章の問い**　その設計図どおりに、家計・企業・労働組合・政府・中央銀行の最適化問題を書き下すと、どんな均衡条件が得られるでしょうか。
> **この章で分かること**　習慣形成をもつ消費のオイラー方程式、投資の調整費用とトービンの q、資本稼働率の選択、インデクセーション付きのカルボ型価格・賃金設定。そして、7種類の構造ショックが経済のどこに入ってくるのか。

本章のモデルは、Christiano, Eichenbaum and Evans (2005) と Smets and Wouters (2007) を基本にしつつ、学ぶうえで本質的でない部分を簡単にしたものです。どこを簡単にしたかは、その都度補足で説明します。

2.1　モデルの全体像

最初に全体の見取り図を示しておきます。部品が多いので、いまどこを組み立てているのかを見失わないよう、この図に何度か戻ってきてください。

図 2.1　中規模DSGEモデルの経済主体と取引の流れ



黒の矢印は財・サービスの流れ、赤の矢印は支払いの流れを表す。家計は資本を所有して中間財企業に貸し出し、労働組合を通じて労働を供給する。中央銀行が決める名目金利は、家計が保有する債券の利回りとなり、家計の貯蓄・投資の判断を通じて経済全体に影響する。政府は最終財を購入し、一括税で財源をまかなう。

図の読み方

- NK編のモデルと比べて新しいのは、**資本**（家計から中間財企業への流れ）と**労働組合**（家計と中間財企業の間）の二つです。
- 価格を設定する主体が二か所あることに注目してください。中間財企業は財の価格を、労働組合は賃金を、それぞれカルボ型の硬直性のもとで設定します。両者の仕組みはまったく同じ形をしているので、2.5節で一つの命題としてまとめて扱います。
- 家計自身は賃金を設定しません。労働組合を間に挟むことで、家計を全員同じ（代表的家計）として扱えるようになります。この工夫の意味は2.3節で説明します。

2.2　家計

2.2.1　効用関数：習慣形成

経済には同質な家計が連続体として存在し、その測度を1とします。代表的家計は次の期待生涯効用を最大化します。

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \varepsilon_t^b \left[\frac{(C_t - h\bar{C}_{t-1})^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \chi \frac{(N_t^h)^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right] \tag{2.1}$$

ここで C_t は消費、N_t^h は労働時間、ε_t^b は選好ショックです。新しいのは $h\bar{C}_{t-1}$ の項で、$\bar{C}_{t-1}$ は**経済全体の**前期の消費水準、$h \in [0,1)$ は**習慣形成**の強さを表します。

数式の読み方：習慣形成の意味

- 効用を生むのは消費の水準 C_t そのものではなく、**前期の消費水準を基準にした超過分** $C_t - h\bar{C}_{t-1}$ です。昨年まで当たり前だった生活水準は、今年は「当たり前」としてしか感じられない、という考え方です。
- $h = 0$ なら通常の効用関数に戻ります。h が大きいほど、基準点が前期の消費に強く引きずられます。
- 限界効用は $\varepsilon_t^b (C_t - h\bar{C}_{t-1})^{-\sigma}$ です。C_t を急に下げると、基準点との差が小さくなって限界効用が急上昇します。したがって家計は**消費を急に変えることを嫌い**、変化を何期かに分散させようとします。これが消費のこぶ型の反応を生む仕組みです。
- $\bar{C}_{t-1}$ には上線を付けて、家計が自分では動かせない経済全体の値であることを示しています。このような定式化を**外部習慣**（「隣人に負けない」型の習慣）と呼びます。均衡では家計は同質なので $\bar{C}_{t-1} = C_{t-1}$ となります。

補足：外部習慣と内部習慣

自分自身の過去の消費 C_{t-1} を基準にする定式化は**内部習慣**と呼ばれます。Christiano, Eichenbaum and Evans (2005) は内部習慣を、Smets and Wouters (2007) は外部習慣を使っています。内部習慣では、今期の消費を増やすと来期の基準点が上がって来期の効用が下がるという効果まで家計が考慮するので、一階条件に将来の項が加わり、式がやや複雑になります。線形化したときの性質は似ているので、本書では簡単な外部習慣を使います。

2.2.2　予算制約と資本蓄積

家計は消費のほかに、債券と資本を通じて貯蓄します。t 期の予算制約は、実質（最終財単位）で書くと

$$C_t + I_t + a(u_t)K_{t-1} + \frac{B_t}{P_t} = \frac{(1+i_{t-1})B_{t-1}}{P_t} + w_t^h N_t^h + r_t^k u_t K_{t-1} + D_t - T_t \tag{2.2}$$

です。左辺は支出で、消費 C_t、投資 I_t、資本の稼働費用 $a(u_t)K_{t-1}$、そして名目債券の購入 B_t です。右辺は収入で、前期に買った債券の元利、労働所得 $w_t^h N_t^h$、資本のレンタル収入 $r_t^k u_t K_{t-1}$、企業と労働組合からの配当 D_t、そして一括税 T_t の支払いです。w_t^h は家計が労働組合から受け取る実質賃金、r_t^k は資本サービス1単位あたりの実質レンタル料です。

資本については、新しい要素が二つあります。

資本稼働率　家計は前期末に保有する資本 K_{t-1} を、どれだけ集中的に使うかを毎期選べます。稼働率を u_t とすると、企業に貸し出される**資本サービス**は

$$K_t^s = u_t K_{t-1} \tag{2.3}$$

です。稼働率を上げると機械の摩耗や保守費用がかさむので、最終財単位で $a(u_t)K_{t-1}$ の費用がかかるとします。関数 $a(\cdot)$ は増加的かつ凸で、定常状態では $u = 1$、$a(1) = 0$ と基準化します。

投資の調整費用　資本は次の式に従って蓄積されます。

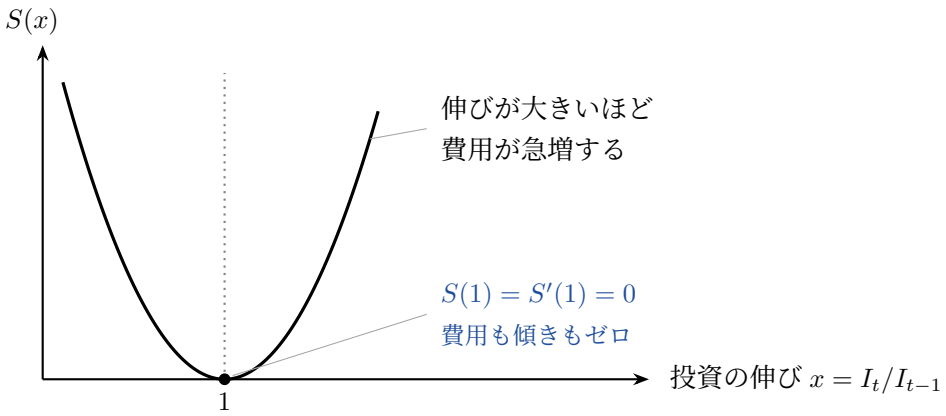
$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + \mu_t \left[1 - S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right] I_t \tag{2.4}$$

δ は資本減耗率、μ_t は**投資固有の技術ショック**で、投資財1単位がどれだけの資本に変わるかの効率を表します。$S(\cdot)$ が**投資の調整費用**です。

数式の読み方：調整費用は「水準」ではなく「変化」にかかる

- $S(\cdot)$ の引数は投資の水準 I_t ではなく、**投資の伸び** I_t/I_{t-1} です。投資を前期と同じペースで続ける限り費用はかかりませんが、急に増やしたり減らしたりすると、投資財の一部が資本にならずに失われます。工場の建設計画を急に倍にしても、すぐには同じ効率で進まない、という状況です。
- $S(1) = S'(1) = 0$ なので、定常状態では調整費用は効きません。効いてくるのは2階微分 $S''(1) \equiv \psi > 0$ だけです。ψ が大きいほど、投資を変えるのが難しくなります。
- 投資の**変化**にコストがかかるので、家計は投資を少しずつ変えようとします。これが投資のこぶ型の反応を生みます。ラムゼイモデルの教科書でよく見る「資本ストックの変化にかかる調整費用」とは、この点が違います。

図 2.2　投資の調整費用関数 $S(x)$ の形



$S(x) = \frac{\psi}{2}(x-1)^2$ の形を描いた。$x = 1$（投資が前期と同じ）で費用はゼロ、そこから離れると2次的に増える。

2.2.3　一階条件

家計は (2.2) と (2.4) の制約のもとで、C_t、N_t^h、B_t、u_t、I_t、K_t を選びます。ラグランジュ関数を

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big\{ & \varepsilon_t^b U(C_t, N_t^h) + \lambda_t \Big[\tfrac{(1+i_{t-1})B_{t-1}}{P_t} + w_t^h N_t^h + r_t^k u_t K_{t-1} + D_t - T_t \\ & - C_t - I_t - a(u_t)K_{t-1} - \tfrac{B_t}{P_t} \Big] \\ & + \lambda_t Q_t \Big[(1-\delta)K_{t-1} + \mu_t \big(1 - S(\tfrac{I_t}{I_{t-1}})\big) I_t - K_t \Big] \Big\}\end{aligned}$$

と置きます。予算制約の乗数を λ_t、資本蓄積式の乗数を $\lambda_t Q_t$ と書いたのは、Q_t を「資本1単位の価値を最終財単位で測ったもの」として解釈できるようにするためです。

一階条件は次の6本です。$x_t \equiv I_t/I_{t-1}$、$\Pi_{t+1} \equiv P_{t+1}/P_t$ と書きます。

$$C_t: \quad \lambda_t = \varepsilon_t^b \, (C_t - h\bar{C}_{t-1})^{-\sigma} \tag{2.5}$$

$$B_t: \quad \lambda_t = \beta(1+i_t)\, E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\Pi_{t+1}}\right] \tag{2.6}$$

$$N_t^h: \quad \chi\, \varepsilon_t^b \, (N_t^h)^{\varphi} = \lambda_t \, w_t^h \tag{2.7}$$

$$u_t: \quad r_t^k = a'(u_t) \tag{2.8}$$

$$K_t: \quad Q_t = \beta E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\Big(r_{t+1}^k u_{t+1} - a(u_{t+1}) + (1-\delta)Q_{t+1}\Big)\right] \tag{2.9}$$

$$I_t: \quad 1 = Q_t \mu_t \big[1 - S(x_t) - S'(x_t)x_t\big] + \beta E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} Q_{t+1}\mu_{t+1} S'(x_{t+1})\, x_{t+1}^2\right] \tag{2.10}$$

最初の4本は見慣れた形をしています。(2.5)は消費の限界効用が所得の限界価値に等しいこと、(2.6)は債券についてのオイラー方程式、(2.7)は労働の限界不効用と労働所得の限界

価値が等しいこと、(2.8)は稼働率を上げることの限界収入（レンタル料）と限界費用が等しいことを表します。新しいのは後の2本です。

数式の読み方：(2.10)の右辺第2項はどこから来るのか

I_t は、t 期の資本蓄積式だけでなく、$t+1$ 期の資本蓄積式にも $S(I_{t+1}/I_t)$ の分母として現れます。今期の投資を増やすと、来期の投資の伸び x_{t+1} が**小さくなり**、来期の調整費用が節約されます。$\partial[-S(I_{t+1}/I_t)I_{t+1}]/\partial I_t = S'(x_{t+1})x_{t+1}^2$ がその節約分で、それを来期の資本の価値 Q_{t+1} で評価し、割り引いたものが第2項です。
つまり家計は、「今期投資を増やしておけば、来期に同じ水準の投資を続けやすくなる」という効果まで考慮して投資を決めています。

2.2.4　トービンの q

Q_t の意味をはっきりさせておきます。

命題 2.1 (Q_t は資本の将来収益の割引現在価値である)　横断性条件のもとで、(2.9)を前向きに解くと

$$Q_t = E_t \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \frac{\lambda_{t+k}}{\lambda_t} (1-\delta)^{k-1} \left[r_{t+k}^k u_{t+k} - a(u_{t+k}) \right] \tag{2.11}$$

が成り立つ。

証明. (2.9)の Q_{t+1} に、同じ式を1期先にずらしたものを代入する。繰り返し期待値の法則 $E_t E_{t+1} = E_t$ と $\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_{t+1}} = \frac{\lambda_{t+2}}{\lambda_t}$ を使うと、T 回代入したあとで

$$Q_t = E_t \sum_{k=1}^{T} \beta^k \frac{\lambda_{t+k}}{\lambda_t} (1-\delta)^{k-1} \left[r_{t+k}^k u_{t+k} - a(u_{t+k}) \right] + E_t \left[\beta^T \frac{\lambda_{t+T}}{\lambda_t} (1-\delta)^T Q_{t+T} \right]$$

を得る。横断性条件 $\lim_{T\to\infty} E_t[\beta^T \lambda_{t+T} Q_{t+T} K_{t+T}] = 0$ と、定常状態の近傍では K_{t+T} がゼロから離れた値にとどまることから最後の項はゼロに収束し、(2.11)が従う。 □

要点：Q_t は「限界の q」

Q_t は、いま資本を1単位追加したときに、それが将来にわたって生み出す純収益（レンタル料から稼働費用を引き、減耗を考慮したもの）の割引現在価値です。資本1単位を手に入れるための費用は投資財1単位なので、Q_t は**資本の市場価値と再取得費用の比**、すなわち**トービンの q**（の限界版）にあたります。
調整費用がなければ（$S \equiv 0$）、(2.10)は $Q_t \mu_t = 1$ となり、q は投資技術だけで決まります。調整費用があるときにだけ、Q_t が1から乖離し、その乖離が投資を動かします。$Q_t > 1$ なら資本の価値が取得費用を上回っているので、家計は投資を増やします。

2.3 労働組合と賃金の設定

2.3.1 なぜ労働組合を置くのか

賃金の硬直性を入れる方法として最も直接的なのは、家計一人一人が差別化された労働を供給し、自分の賃金をカルボ型で設定する、という定式化です（Erceg, Henderson and Levin, 2000）。ところがこの方法では、賃金を改定できた家計とできなかった家計で労働時間と所得が異なります。消費を全員でそろえて代表的家計の形で議論するには、所得の違いを完全にならす保険の市場を別に仮定しなければなりません。

そこで本書では、Smets and Wouters (2007) にならって、家計と企業の間に**労働組合**を置きます。家計はすべて同質な労働を労働組合に供給し、同じ賃金 W_t^h を受け取ります。労働組合 $l \in [0,1]$ はその労働を差別化し、自分の賃金 $W_t(l)$ を設定して企業に売ります。賃金の硬直性は労働組合の側にあるので、家計は同質なまま保たれます。

2.3.2 労働の集計と労働需要

中間財企業が使う労働 N_t は、差別化された労働を次のように束ねたものです。

$$N_t = \left[\int_0^1 N_t(l)^{\frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w}} dl \right]^{\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1}} \tag{2.12}$$

これはNK編第2章で中間財を束ねたディキシット＝スティグリッツ型の集計とまったく同じ形です。したがって同じ計算により、労働組合 l の労働に対する需要と、集計された賃金指数は

$$N_t(l) = \left(\frac{W_t(l)}{W_t} \right)^{-\varepsilon_w} N_t, \qquad W_t = \left[\int_0^1 W_t(l)^{1-\varepsilon_w} dl \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_w}} \tag{2.13}$$

となります。$\varepsilon_w > 1$ は差別化された労働どうしの代替の弾力性です。

2.3.3 労働組合の賃金設定

各労働組合は、毎期 $1 - \omega_w$ の確率でしか賃金を最適に改定できません。改定できなかった組合は、前期のインフレ率に部分的に合わせて賃金を自動的に引き上げます。

$$W_t(l) = \Pi_{t-1}^{\iota_w} W_{t-1}(l) \tag{2.14}$$

$\iota_w \in [0,1]$ は**賃金のインデクセーション**の程度です。$\iota_w = 0$ なら据え置き、$\iota_w = 1$ なら前期のインフレ率に完全に連動します。

t 期に改定できた組合が選ぶ賃金を W_t^* とします。この賃金は、次に改定できるまで(2.14)に従って引き上げられていくので、$t+k$ 期の賃金は $W_t^* X_{t,k}^w$ です。ここで $X_{t,0}^w = 1$、$X_{t,k}^w = \prod_{s=0}^{k-1} \Pi_{t+s}^{\iota_w}$ です。組合の利潤は家計に配当されるので、組合は家計の確率的割引

因子で利潤を評価し、

$$\max_{W_t^*} \; E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\omega_w)^k \frac{\lambda_{t+k}}{\lambda_t} \left[\frac{W_t^* X_{t,k}^w - W_{t+k}^h}{P_{t+k}} \right] N_{t+k|t} \tag{2.15}$$

を解きます。$N_{t+k|t} = \left(W_t^* X_{t,k}^w / W_{t+k}\right)^{-\varepsilon_w} N_{t+k}$ は、t 期に改定した組合が $t+k$ 期に直面する労働需要です。一階条件は

$$E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\omega_w)^k \, \frac{\lambda_{t+k} N_{t+k|t}}{P_{t+k}} \left[W_t^* X_{t,k}^w - \mathcal{M}_{w,t+k} W_{t+k}^h \right] = 0 \tag{2.16}$$

です。$\mathcal{M}_{w,t}$ は望ましい賃金マークアップで、定常状態では $\mathcal{M}_w = \varepsilon_w/(\varepsilon_w - 1)$ です。本書ではこれが確率的に変動することを許し、**賃金マークアップ・ショック**の源とします。

数式の読み方：賃金設定は価格設定の鏡像である

(2.16)を、NK編第4章の改定企業の一階条件と見比べてください。

	価格設定（NK編）	賃金設定（本章）
設定する主体	中間財企業	労働組合
設定するもの	価格 P_t^*	賃金 W_t^*
限界費用	名目限界費用	家計に払う賃金 W_t^h
マークアップ	$\varepsilon_p/(\varepsilon_p - 1)$	$\varepsilon_w/(\varepsilon_w - 1)$

構造はまったく同じです。労働組合にとって家計から労働を仕入れる費用 W_t^h が「限界費用」であり、組合はそれにマークアップを上乗せして賃金を設定します。家計の一階条件(2.7)より、$w_t^h = W_t^h/P_t$ は労働と消費の**限界代替率**（MRS_t）に等しいので、伸縮賃金（$\omega_w = 0$）のもとでは

$$w_t = \mathcal{M}_w \cdot MRS_t$$

となります。実質賃金が限界代替率を上回る分が、労働市場の独占力による歪みです。

2.4　企業

2.4.1　最終財企業

最終財企業は完全競争的で、中間財 $Y_t(f)$、$f \in [0,1]$ を弾力性 ε_p のディキシット＝スティグリッツ型で束ねて最終財 Y_t を作ります。NK編第2章と同じく、中間財への需要と物価指数

は

$$Y_t(f) = \left(\frac{P_t(f)}{P_t}\right)^{-\varepsilon_p} Y_t, \qquad P_t = \left[\int_0^1 P_t(f)^{1-\varepsilon_p} df\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_p}} \tag{2.17}$$

です。

2.4.2 中間財企業：費用最小化

中間財企業 f は、資本サービスと労働を使って

$$Y_t(f) = A_t\, K_t^s(f)^{\alpha} N_t(f)^{1-\alpha} \tag{2.18}$$

だけ生産します。A_t は全要素生産性（技術ショック）です。NK編のモデルとの違いは、資本サービスが生産要素に加わったことです。

価格の設定は、費用最小化と価格の選択の2段階に分けて考えます。まず、与えられた生産量をつくる費用を最小化します。実質レンタル料 r_t^k、実質賃金 $w_t = W_t/P_t$ のもとで費用最小化の一階条件を整理すると、次の二つの結果を得ます。

命題 2.2 (費用最小化の帰結)　(i) すべての中間財企業は同じ資本・労働比率を選ぶ。

$$\frac{K_t^s(f)}{N_t(f)} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w_t}{r_t^k} \tag{2.19}$$

(ii) 実質限界費用はすべての企業で等しく、生産量に依存しない。

$$mc_t = \frac{1}{A_t}\left(\frac{r_t^k}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \tag{2.20}$$

証明. 企業 f は $Y_t(f)$ を所与として $r_t^k K_t^s(f) + w_t N_t(f)$ を最小化する。生産関数の制約の乗数を $mc_t(f)$ とすれば、一階条件は

$$r_t^k = mc_t(f)\,\alpha\frac{Y_t(f)}{K_t^s(f)}, \qquad w_t = mc_t(f)\,(1-\alpha)\frac{Y_t(f)}{N_t(f)}$$

である。両式の比をとると(i)を得る。右辺は f に依存しない。次に(i)を生産関数に代入して $N_t(f)$ を $Y_t(f)$ で表し、第2式に戻すと

$$mc_t(f) = \frac{w_t}{(1-\alpha)A_t}\left(\frac{K_t^s(f)}{N_t(f)}\right)^{-\alpha} = \frac{w_t}{(1-\alpha)A_t}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w_t}{r_t^k}\right)^{-\alpha}$$

となり、整理すると(ii)の形になる。右辺は f にも $Y_t(f)$ にも依存しない。　□

数式の読み方：限界費用の式の読み方

(2.20)は、限界費用が要素価格の加重幾何平均を生産性で割ったものであることを示しています。レンタル料が1%上がると限界費用はα%、実質賃金が1%上がると$(1-\alpha)$%上がり、生産性が1%上がると1%下がります。

ここで**資本稼働率**が効いてきます。需要が増えたとき、稼働率を上げれば資本サービスを増やせるので、レンタル料r_t^kの上昇が抑えられます。その結果、限界費用も、それを通じてインフレ率も、穏やかにしか反応しません。第1章の表で「稼働率がインフレの反応を遅らせる」と書いたのは、この経路のことです。

2.4.3　中間財企業：価格の設定

価格の設定は、NK編第4章のカルボ型に、インデクセーションを加えたものです。各企業は毎期$1-\omega_p$の確率でしか価格を最適に改定できず、改定できない企業は

$$P_t(f) = \Pi_{t-1}^{\iota_p} P_{t-1}(f) \tag{2.21}$$

に従って価格を引き上げます。改定できた企業の一階条件は、NK編第4章の式に$X_{t,k}^p = \prod_{s=0}^{k-1} \Pi_{t+s}^{\iota_p}$を掛けたものになり、

$$E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\omega_p)^k \frac{\lambda_{t+k} Y_{t+k|t}}{P_{t+k}} \left[P_t^* X_{t,k}^p - \mathcal{M}_{p,t+k} P_{t+k} mc_{t+k} \right] = 0 \tag{2.22}$$

です。(2.16)と見比べると、まったく同じ形をしていることが分かります。$\mathcal{M}_{p,t}$は望ましい価格マークアップで、その変動が**価格マークアップ・ショック**になります。

2.5　価格と賃金のフィリップス曲線

(2.16)と(2.22)が同じ形をしているので、線形化も一度に済ませることができます。

命題 2.3 (インデクセーション付きカルボ型設定の線形化)　ある名目価格$X_t(j)$が次のように設定されるとする。毎期$1-\omega$の確率で最適に改定され、改定できなければ$X_t(j) = \Pi_{t-1}^{\iota} X_{t-1}(j)$に従う。改定時の一階条件は

$$E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\omega)^k Z_{t+k|t} \left[X_t^* \prod_{s=0}^{k-1} \Pi_{t+s}^{\iota} - V_{t+k} \right] = 0$$

の形をしている（V_tは名目の限界費用にマークアップを掛けたもの、$Z_{t+k|t} > 0$は重み）。集計指数を$X_t^{1-\epsilon} = \int X_t(j)^{1-\epsilon} dj$とし、$X$の上昇率を$\pi_t^x \equiv \ln(X_t / X_{t-1})$と書く。インフレ率

ゼロの定常状態の周りで線形化すると、

$$\pi_t^x - \iota\pi_{t-1} = \beta E_t\big(\pi_{t+1}^x - \iota\pi_t\big) + \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}\big(\ln V_t - \ln X_t\big)^{\wedge} \tag{2.23}$$

が成り立つ。ここで $(\cdot)^{\wedge}$ は定常値からの乖離を表す。

証明. 小文字で対数を表し、定常状態からの乖離をとる。インフレ率ゼロの定常状態では $Z_{t+k|t}$ の変動は1次の項に効かない（括弧の中が定常状態でゼロになるため）ので、一階条件の線形化は

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\omega)^k E_t\Big[x_t^* + \iota\sum_{s=0}^{k-1}\pi_{t+s} - v_{t+k}\Big] = 0$$

となる。$\sum_k(\beta\omega)^k = 1/(1-\beta\omega)$ を使って x_t^* について解くと

$$x_t^* = (1-\beta\omega)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\omega)^k E_t\Big[v_{t+k} - \iota\sum_{s=0}^{k-1}\pi_{t+s}\Big].$$

この式を1期先にずらしたものと比べると、和の各項から $\iota\pi_t$ が一つずつ取り除かれていることに注意して、

$$x_t^* = (1-\beta\omega)v_t + \beta\omega E_t x_{t+1}^* - \beta\omega\iota\pi_t \tag{a}$$

という再帰的な形を得る。

次に集計指数を考える。改定しなかった主体の価格は前期の値をインデクセーションで引き上げたものであり、カルボ型の仮定よりその分布は前期の分布と同じなので、

$$X_t^{1-\epsilon} = (1-\omega)(X_t^*)^{1-\epsilon} + \omega\big(\Pi_{t-1}^{\iota}X_{t-1}\big)^{1-\epsilon}.$$

線形化すると $x_t = (1-\omega)x_t^* + \omega(x_{t-1} + \iota\pi_{t-1})$、すなわち

$$x_t^* - x_t = \frac{\omega}{1-\omega}\big(\pi_t^x - \iota\pi_{t-1}\big) \tag{b}$$

である。(a)の両辺から x_t を引き、右辺を $x_{t+1}^* - x_{t+1}$ と $x_{t+1} - x_t = \pi_{t+1}^x$ を使って書き直すと

$$x_t^* - x_t = (1-\beta\omega)(v_t - x_t) + \beta\omega E_t(x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \beta\omega E_t\pi_{t+1}^x - \beta\omega\iota\pi_t.$$

ここに(b)を t 期と $t+1$ 期について代入すると、

$$\frac{\omega}{1-\omega}(\pi_t^x - \iota\pi_{t-1}) = (1-\beta\omega)(v_t - x_t) + \frac{\beta\omega}{1-\omega}E_t\big(\pi_{t+1}^x - \iota\pi_t\big).$$

両辺に $(1-\omega)/\omega$ を掛ければ(2.23)を得る。 □

この命題を、価格と賃金に当てはめます。

価格のフィリップス曲線　$X=P$、$\pi^x=\pi$、$V_t=\mathcal{M}_{p,t}P_t mc_t$ とすると、$\ln V_t-\ln X_t$ の乖離は $\widehat{mc}_t+\hat{\mu}^p_t$（実質限界費用と望ましいマークアップの乖離の和）です。したがって

$$\pi_t-\iota_p\pi_{t-1}=\beta E_t(\pi_{t+1}-\iota_p\pi_t)+\lambda_p\widehat{mc}_t+u^p_t,\qquad \lambda_p\equiv\frac{(1-\omega_p)(1-\beta\omega_p)}{\omega_p} \tag{2.24}$$

を得ます。$u^p_t\equiv\lambda_p\hat{\mu}^p_t$ が価格マークアップ・ショックです。

賃金のフィリップス曲線　$X=W$、$\pi^x=\pi^w$（名目賃金上昇率）、$V_t=\mathcal{M}_{w,t}W^h_t$ とすると、$\ln V_t-\ln X_t$ の乖離は $\widehat{mrs}_t-\hat{w}_t+\hat{\mu}^w_t$ です（$w^h_t=MRS_t$ を使いました）。したがって

$$\pi^w_t-\iota_w\pi_{t-1}=\beta E_t(\pi^w_{t+1}-\iota_w\pi_t)-\lambda_w\big(\hat{w}_t-\widehat{mrs}_t\big)+u^w_t,\qquad \lambda_w\equiv\frac{(1-\omega_w)(1-\beta\omega_w)}{\omega_w} \tag{2.25}$$

を得ます。$u^w_t\equiv\lambda_w\hat{\mu}^w_t$ が賃金マークアップ・ショックです。

数式の読み方：二つのフィリップス曲線の読み方

- (2.24)は、$\iota_p=0$ とおけばNK編のNKPC $\pi_t=\beta E_t\pi_{t+1}+\lambda_p\widehat{mc}_t$ に戻ります。インデクセーションは、インフレ率そのものではなく**前期のインフレ率からの乖離** $\pi_t-\iota_p\pi_{t-1}$ について、NKPCが成り立つようにする仕組みです。
- π_t について解くと

$$\pi_t=\frac{\iota_p}{1+\beta\iota_p}\pi_{t-1}+\frac{\beta}{1+\beta\iota_p}E_t\pi_{t+1}+\frac{\lambda_p}{1+\beta\iota_p}\widehat{mc}_t+\frac{u^p_t}{1+\beta\iota_p}$$

  となります。前期のインフレ率が右辺に入るので、インフレ率に**慣性**が生まれます。後ろ向きの項と前向きの項の両方をもつので、**ハイブリッド型NKPC**とも呼ばれます。
- (2.25)の $\hat{w}_t-\widehat{mrs}_t$ は、実質賃金が限界代替率をどれだけ上回っているか、すなわち**賃金マークアップの定常値からの乖離**です。マークアップが望ましい水準より高すぎれば（$\hat{w}_t>\widehat{mrs}_t$）、改定できた組合は賃金を引き下げようとするので、賃金上昇率が下がります。

補足：賃金フィリップス曲線の傾き

家計ごとに差別化された労働を供給する Erceg, Henderson and Levin (2000) の定式化では、傾きが $\lambda_w/(1+\varepsilon_w\varphi)$ と小さくなります。賃金を引き上げた家計は労働需要が減るので、自分の限界代替率が下がり、それが賃金の引き上げを抑えるからです（実質硬直性の一種）。本書の労働組合の定式化では、組合の「限界費用」W^h_t が組合自身の労働需要に依存しないので、この効果は現れません。推定ではこの違いが ω_w の値の解釈に影響する点に注意してください。

2.6　政府と中央銀行

2.6.1　政府

政府は外生的に変動する政府支出 G_t を、一括税 T_t と国債の発行でまかないます。一括税しかなく、家計が合理的に将来の税負担を予想するので、リカードの等価定理が成り立ち、税と国債の組み合わせは均衡に影響しません。したがって以下では、政府支出の経路だけを考えれば十分です。G_t の定常状態からの変動を**政府支出ショック**とします。

2.6.2　中央銀行

中央銀行は名目金利を次のルールで設定します。

$$\frac{1+i_t}{1+i} = \left(\frac{1+i_{t-1}}{1+i}\right)^{\rho_i} \left[\Pi_t^{\phi_\pi} \left(\frac{Y_t}{Y}\right)^{\phi_y}\right]^{1-\rho_i} e^{v_t} \tag{2.26}$$

NK編のテイラー型ルールとの違いは、前期の金利が入っていることです。$\rho_i \in [0,1)$ は**金利の平滑化**の程度を表します。v_t は金融政策ショックです。

数式の読み方：平滑化の意味

線形化すると $\hat{\imath}_t = \rho_i \hat{\imath}_{t-1} + (1-\rho_i)(\phi_\pi \pi_t + \phi_y \hat{y}_t) + v_t$ です。中央銀行は「目標とする金利」$\phi_\pi \pi_t + \phi_y \hat{y}_t$ に一気に合わせるのではなく、毎期その差の $(1-\rho_i)$ だけ近づけていきます。実際の中央銀行は、政策金利を小刻みに、同じ方向に何度も動かす傾向があり、この性質を捉えるものです。

平滑化があると、今期の利上げは将来の金利も高く保つことを意味します。NK編で見たように、需要に効くのは将来の実質金利の経路全体なので、平滑化は金融政策の効果を強める働きももちます。

補足：何に反応するか

ここでは簡単のため、中央銀行は産出の定常状態からの乖離 $\hat{y}_t$ に反応するとしました。Smets and Wouters (2007) は、価格と賃金が伸縮的だった場合の産出（潜在産出）からの乖離、つまりNK編の意味での産出ギャップに反応し、さらにその変化にも反応するルールを使っています。潜在産出を計算するには伸縮価格版のモデルを並行して解く必要があり、モデルの規模がほぼ倍になります。考え方は同じなので、本書では簡単な形を採用します。

2.7　市場の均衡

最後に、市場の均衡条件をまとめます。

財市場　最終財は、消費・投資・政府支出・稼働費用に使われます。

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + a(u_t)K_{t-1} \tag{2.27}$$

資本サービスと労働　中間財企業が使う資本サービスの総量は家計が供給する $u_t K_{t-1}$ に等しく、命題2.2(i)よりすべての企業の資本・労働比率が同じなので、集計しても(2.19)がそのまま成り立ちます。

集計された生産　中間財の生産を集計すると

$$Y_t \, \Delta_t^p = A_t \, (K_t^s)^{\alpha} N_t^{1-\alpha}, \qquad \Delta_t^p \equiv \int_0^1 \left(\frac{P_t(f)}{P_t} \right)^{-\varepsilon_p} df \tag{2.28}$$

となります。$\Delta_t^p \geq 1$ は価格のばらつきによる効率の損失です。同様に、家計の労働時間と企業が使う労働の間にも $N_t^h = \Delta_t^w N_t$ という関係があり、Δ_t^w は賃金のばらつきを表します。

補足：ばらつきの項は線形化で消える

NK編第7章で示したように、価格のばらつき Δ_t^p はインフレ率ゼロの定常状態の周りでは**2次の大きさ**です。したがって1次の近似（対数線形化）では $\hat{\Delta}_t^p = 0$ とみなせます。賃金のばらつき Δ_t^w も同じです。第4章ではこの性質を使います。ただし、厚生評価のように2次の項が重要になる分析では、これらを無視できません。

債券市場　家計は同質で、政府の債務は均衡に影響しないので、民間の債券の純供給はゼロとして扱えます。

2.8　7つの構造ショック

モデルには7種類のショックがあります。どれも対数をとった値（またはそれに準じる変数）が1次の自己回帰過程に従うとします。たとえば技術ショックなら

$$\ln A_t = \rho_a \ln A_{t-1} + \varepsilon_t^a, \qquad \varepsilon_t^a \sim \text{i.i.d.}\ (0, \sigma_a^2)$$

です。金融政策ショック v_t については、Smets and Wouters (2007) にならい、持続性をもたせる場合もあります。

ショック	入る式	経済学的な意味
技術 A_t	生産関数	同じ投入でより多く生産できる（供給側）
選好 ε_t^b	消費の限界効用	家計が今期の消費をより重視する（需要側）
投資固有の技術 μ_t	資本蓄積	投資財が資本に変わる効率が上がる（投資需要と供給能力の両方）
政府支出 G_t	資源制約	政府による財の需要（需要側）
金融政策 v_t	金利ルール	ルールから外れた金利の変更（需要側）
価格マークアップ μ_t^p	価格フィリップス曲線	企業が望むマークアップの変動（供給側）
賃金マークアップ μ_t^w	賃金フィリップス曲線	労働組合が望むマークアップの変動（供給側）

要点：なぜショックは7つなのか

第1章で触れたように、モデルを推定するときには、使う観測変数の数だけ（少なくとも）独立したショックが必要です。Smets and Wouters (2007) は産出・消費・投資・実質賃金・労働時間・インフレ率・金利の7系列を使ったので、ショックも7つ用意しました。どのショックを置くかは、どの変数のどんな動きを説明したいかと表裏一体です。この点は第6章で詳しく扱います。

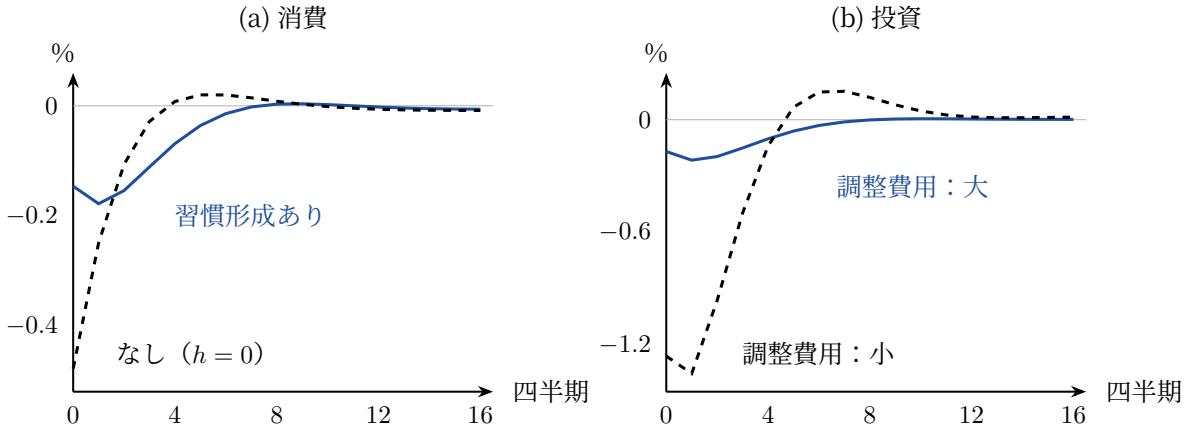
補足：選好ショックとリスク・プレミアム・ショック

Smets and Wouters (2007) は、選好ショックの代わりに、家計が保有する債券の利回りに上乗せされる「リスク・プレミアム・ショック」を使っています。線形化すると、どちらも消費のオイラー方程式に同じような形で入り、今期の需要を動かします。本書では解釈しやすい選好ショックを使います。

2.9　摩擦は何をしているのか

各摩擦の役割を、第4章で導く線形化モデルを使って確かめておきます。下の図は、第1章と同じ金融政策ショックに対する消費と投資の反応を、摩擦がある場合とない場合で比べたものです。

図 2.3　摩擦の役割：習慣形成と投資の調整費用



名目金利を1期だけ0.25%ポイント引き上げるショックへの反応。(a) は習慣形成の有無、(b) は調整費用のパラメータ ψ の大小（5.5と0.5）だけを変え、ほかのパラメータは共通にした。

図の読み方

- (a) 習慣形成がないと、消費はショックの当たった期に最も大きく下がり、その後すばやく戻ります。習慣形成があると、消費の変化が何期かに分散され、最大の反応が1期後にずれます。反応の大きさも小さくなります。
- (b) 調整費用が小さいと、投資は金利の変化に非常に大きく反応します（約1.3%の減少）。調整費用が大きいと、反応は6分の1程度に抑えられ、ゆっくりと戻ります。データで観察される投資の変動の大きさに合わせるには、かなり大きな調整費用が必要だということです。
- どちらの摩擦も、**家計が変化を嫌う**という同じ性質をモデルに持ち込んでいます。習慣形成は消費の変化を、調整費用は投資の変化を嫌わせます。

要点：この章のまとめ

- 家計は、習慣形成をもつ効用のもとで、消費・労働・債券・投資・稼働率を選ぶ。資本蓄積式の乗数 Q_t はトービンの限界 q であり、資本の将来収益の割引現在価値に等しい。
- 投資の調整費用は投資の**変化**にかかり、投資のこぶ型の反応を生む。稼働率の変動は限界費用の反応を穏やかにする。
- 労働組合を置くことで、賃金の硬直性を入れつつ家計を同質に保てる。賃金設定は価格設定と同じ構造をもち、インデクセーション付きのカルボ型設定は一つの命題（命題2.3）でまとめて線形化できる。
- 中央銀行は平滑化を伴うテイラー型ルールに従う。モデルには7つの構造ショックがある。

次の章へ　これで、モデルを構成する一階条件と均衡条件がすべて揃いました。次章ではそれらを一覧に整理し、すべての変数が一定になる定常状態を計算します。定常状態は、線形化の「基準点」になると同時に、パラメータをデータに合わせて決める（カリブレーションする）ための手がかりにもなります。

第3章

均衡条件と定常状態

> **ここまでの流れ**　第2章で、家計・労働組合・企業・政府・中央銀行の最適化問題を解き、均衡条件を導きました。
> **この章の問い**　すべてのショックが平均値にとどまり、経済が静止しているとき、各変数はどんな値をとるのでしょうか。そして、その値はパラメータの決め方にどう役立つのでしょうか。
> **この章で分かること**　均衡条件の全体像。定常状態を「上から順に」計算する手順。消費・投資・資本の産出に対する比率が、選好のパラメータに依存しないという重要な性質。経済成長がある場合の扱い方。そして、カリブレーションで決めるパラメータと推定で決めるパラメータの役割分担。

3.1　均衡条件の全体像

第2章で得た条件を、ブロックごとに整理しておきます。価格と賃金の設定については、第2章で線形化した形（命題2.3）を使うので、ここでは定常状態で成り立つ関係だけを書いておきます。

ブロック	条件	式番号
家計	限界効用、債券のオイラー方程式、労働供給、稼働率、資本、投資の一階条件	(2.5)〜(2.10)
資本	資本蓄積、資本サービス	(2.4)、(2.3)
企業	生産関数、資本・労働比率、実質限界費用	(2.28)、(2.19)、(2.20)
価格・賃金	価格の設定、賃金の設定	(2.22)、(2.16)
政策	金利ルール、政府支出	(2.26)
市場均衡	財市場の資源制約	(2.27)

この体系が決める内生変数は、消費 C_t、労働 N_t、投資 I_t、資本 K_t、資本サービス K_t^s、稼働率 u_t、トービンの q（Q_t）、レンタル料 r_t^k、実質賃金 w_t と w_t^h、限界費用 mc_t、産出

Y_t、インフレ率 Π_t、名目金利 i_t などです。

3.2　定常状態とは何か

定義 3.1 (定常状態)　すべてのショックが平均値にとどまり（$A_t = \mu_t = \varepsilon_t^b = 1$、$v_t = 0$、マークアップは平均値、$G_t = G$）、すべての内生変数が時間を通じて一定になる状態を**定常状態**（steady state）と呼ぶ。本書では、定常状態のインフレ率をゼロ（$\Pi = 1$）とする。

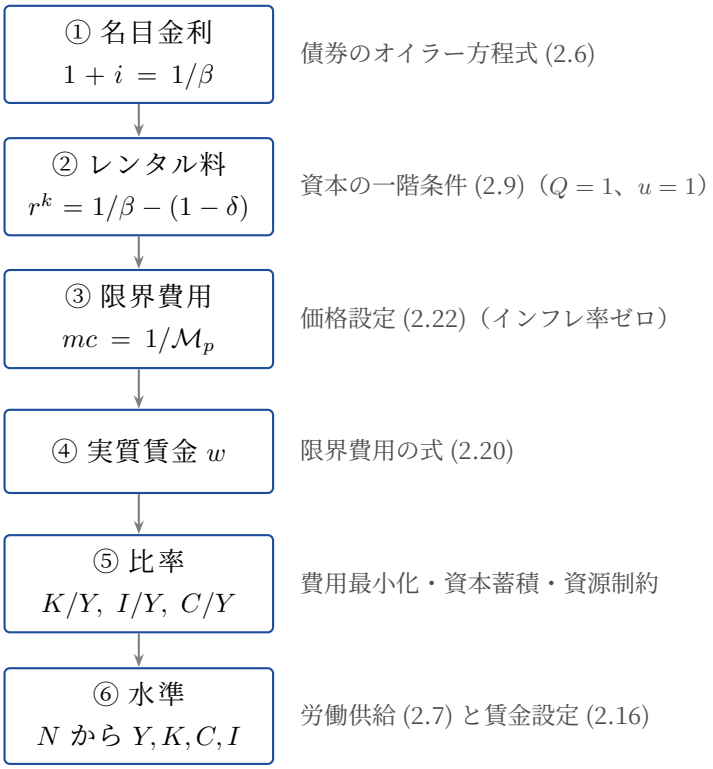
定常状態は、確率的な経済の「平均的な姿」の近似と考えることができます。そして第4章の線形化は、この点の周りで行います。定常状態の計算を誤ると、その後の分析すべてが狂うので、ここは丁寧に進めます。

定常状態では、調整費用・稼働率・インデクセーションといった**摩擦はすべて効かなくなる**ことに注意してください。$S(1) = S'(1) = 0$ なので調整費用はゼロ、稼働率は $u = 1$ で稼働費用もゼロ、インフレ率がゼロなのでカルボ型の硬直性があってもすべての企業が同じ価格をつけています。摩擦が効いてくるのは、経済が定常状態から外れて動くときだけです。

3.3　定常状態を計算する手順

定常状態の計算には、決まった順番があります。「金利 → 資本の収益率 → 要素価格 → 比率 → 水準」と、上流から下流へ流れるように解いていきます。

図 3.1　定常状態を計算する順序



①〜⑤は選好のパラメータ σ、h、φ、χ をまったく使わない。選好が効いてくるのは最後の⑥だけである。

順に見ていきます。

① 名目金利　定常状態では $\lambda_{t+1}=\lambda_t$、$\Pi=1$ なので、債券のオイラー方程式(2.6)は $1=\beta(1+i)$ となります。定常状態の金利は $1+i=1/\beta$、すなわち $i=\rho\equiv 1/\beta-1$ です。インフレ率がゼロなので、これは実質金利でもあります。

② トービンの q とレンタル料　投資の一階条件(2.10)に $x=1$、$\mu=1$、$S(1)=S'(1)=0$ を代入すると $Q=1$ です。資本の一階条件(2.9)に $Q=1$、$u=1$、$a(1)=0$ を代入すると $1=\beta(r^k+1-\delta)$ なので、

$$r^k=\frac{1}{\beta}-(1-\delta) \tag{3.1}$$

です。資本1単位を持つことの収益（レンタル料と減耗後の残存価値）が、債券の収益 $1/\beta$ と等しくなっています。なお、稼働率の一階条件(2.8)から $a'(1)=r^k$ となり、これが稼働費用関数 $a(\cdot)$ の傾きを決めます。

③ 限界費用　インフレ率ゼロの定常状態では、改定した企業もしなかった企業も同じ価格 $P^* = P$ をつけています。(2.22)より $P = \mathcal{M}_p P \cdot mc$、すなわち

$$mc = \frac{1}{\mathcal{M}_p} = \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p} \tag{3.2}$$

です。価格は限界費用にマークアップ $\mathcal{M}_p$ を上乗せした水準になっています。

④ 実質賃金　限界費用の式(2.20)に $A = 1$ と②③の結果を代入し、w について解くと

$$w = (1-\alpha)\left[mc\left(\frac{\alpha}{r^k}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.3}$$

を得ます。

⑤ 産出に対する比率　ここが定常状態の計算の山場です。

命題 3.2 (大比率は選好に依存しない)　定常状態において、資本・産出比率、投資・産出比率、消費・産出比率は

$$\frac{K}{Y} = \frac{\alpha\, mc}{r^k}, \qquad \frac{I}{Y} = \delta\,\frac{K}{Y}, \qquad \frac{C}{Y} = 1 - \frac{I}{Y} - \frac{G}{Y} \tag{3.4}$$

で与えられる。これらは β、δ、α、$\mathcal{M}_p$、G/Y だけで決まり、選好のパラメータ σ、h、φ、χ にも賃金マークアップ $\mathcal{M}_w$ にも依存しない。

証明. 費用最小化の一階条件（命題2.2の証明）より $r^k = mc \cdot \alpha Y / K^s$ である。定常状態では $u = 1$ なので $K^s = K$ であり、$K/Y = \alpha\, mc / r^k$ を得る。資本蓄積式(2.4)は定常状態で $K = (1-\delta)K + I$ となるから $I = \delta K$、両辺を Y で割れば $I/Y = \delta K/Y$ である。最後に、資源制約(2.27)を $a(1) = 0$ のもとで Y で割ると C/Y の式を得る。②③より r^k と mc は β、δ、$\mathcal{M}_p$ だけで決まるので、主張が従う。 □

数式の読み方：$K/Y = \alpha\, mc / r^k$ の読み方

両辺に r^k を掛けると $r^k K = \alpha \cdot mc \cdot Y$ です。左辺は資本への支払い総額、右辺は「産出のうち資本の取り分」です。完全競争なら $mc = 1$ で資本分配率は α ですが、独占的競争では $mc < 1$ なので、資本と労働への支払いの合計は産出より小さく、差額 $(1-mc)Y$ が企業の利潤になります。

この式から、資本・産出比率を決めるのは「資本の取り分」と「資本の要求収益率」の比であることが分かります。人々がせっかちで β が小さければ、要求収益率 r^k が高くなり、資本は少なくなります。

要点：命題3.2がカリブレーションに役立つ理由

消費・投資・資本の産出に対する比率は、実際のデータで比較的安定して観測される量です（**大比率**、great ratios と呼ばれます）。命題3.2によれば、これらの比率は少数のパラメータだけで決まります。したがって逆に、**データの大比率からそれらのパラメータの値を決める**ことができます。たとえば平均的な実質金利から β を、投資・資本比率から δ を、労働分配率から α を決める、という具合です。
しかも選好のパラメータはこれらの比率に影響しないので、比率を合わせる作業と、動学に関わるパラメータを推定する作業を、別々に進めることができます。

⑥ **水準**　最後に、労働の水準を決めます。家計の労働供給(2.7)と、賃金設定(2.16)の定常状態 $w = \mathcal{M}_w\, w^h$ を組み合わせると

$$\frac{w}{\mathcal{M}_w} = \chi N^{\varphi}\big[(1-h)C\big]^{\sigma} \tag{3.5}$$

となります。$C = (C/Y)\cdot Y$、$Y = (K/N)^{\alpha}N$ はどちらも N に比例するので、この式は N についての1本の方程式です。

実際には、この式を N について解くよりも、**逆向きに使う**ほうが便利です。データに合わせて労働時間の定常値 N（たとえば利用可能な時間の3分の1）を先に決め、(3.5)を満たすように χ を逆算するのです。χ は労働の不効用の水準を表すだけのパラメータで、線形化したモデルの動学にはまったく現れないので、このように扱っても何も失われません。

計算例：代表的な値で比率を求める

四半期のモデルで $\beta = 0.99$、$\delta = 0.025$、$\alpha = 0.33$、$\varepsilon_p = 6$（$mc = 5/6$）、$G/Y = 0.18$ とします。

- ② $r^k = 1/0.99 - 0.975 \simeq 0.0351$（年率でおよそ14%の粗収益率）
- ⑤ $K/Y = 0.33 \times (5/6)/0.0351 \simeq 7.8$（四半期の産出の7.8倍、年間の産出のおよそ2倍）
- ⑤ $I/Y = 0.025 \times 7.8 \simeq 0.20$、$C/Y = 1 - 0.20 - 0.18 \simeq 0.62$

投資が産出の約2割、消費が約6割という値は、米国のデータとおおむね整合的です。

3.4　経済成長がある場合

ここまでは、定常状態で変数が一定になる経済を考えてきました。しかし実際のデータでは、産出・消費・投資は長期的に成長しています。成長する経済を扱うには、**トレンドで割って定常化する**という操作が必要です。

労働増大的な技術 Z_t が、毎期一定の粗成長率 $\gamma > 1$ で成長するとします（$Z_t = \gamma Z_{t-1}$）。生産関数を $Y_t = A_t K_t^{s\alpha}(Z_t N_t)^{1-\alpha}$ とすると、均斉成長経路では Y_t、C_t、I_t、K_t、w_t がすべ

て率 γ で成長し、N_t、r_t^k、Q_t は一定にとどまります。そこで、成長する変数をすべて Z_t で割った変数

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{Z_t}, \quad c_t \equiv \frac{C_t}{Z_t}, \quad \tilde{\imath}_t \equiv \frac{I_t}{Z_t}, \quad k_t \equiv \frac{K_t}{Z_t}, \quad \dots$$

を定義すると、これらは定常状態で一定になります。

定常化した変数で均衡条件を書き直すと、いくつかの式に γ が現れます。代表的なものを挙げます。

	成長なし	成長あり（定常化後）
習慣の基準点	$C_t - hC_{t-1}$	$c_t - \frac{h}{\gamma}c_{t-1}$
定常状態の実質金利	$1+r = \frac{1}{\beta}$	$1+r = \frac{\gamma^\sigma}{\beta}$
定常状態のレンタル料	$r^k = \frac{1}{\beta} - (1-\delta)$	$r^k = \frac{\gamma^\sigma}{\beta} - (1-\delta)$
投資・資本比率	$\frac{I}{K} = \delta$	$\frac{I}{K} = 1 - \frac{1-\delta}{\gamma} \simeq \delta + (\gamma - 1)$

数式の読み方：なぜ金利が上がるのか

2行目の結果を確かめておきます。限界効用は $\lambda_t = (C_t - hC_{t-1})^{-\sigma}$ なので、消費が率 γ で成長すると、限界効用は率 $\gamma^{-\sigma}$ で**低下**していきます。オイラー方程式 $\lambda_t = \beta(1+r)\lambda_{t+1}$ に $\lambda_{t+1} = \gamma^{-\sigma}\lambda_t$ を代入すると、$1+r = \gamma^\sigma/\beta$ を得ます。
直感的には、将来はいまより豊かになるので、家計は将来の消費を今ほどありがたく思いません。それでも貯蓄させるには、より高い金利が必要になります。σ が大きい（消費の平準化を強く望む）ほど、その効果は大きくなります。

補足：投資の調整費用の基準点

成長する経済では、定常状態でも投資は毎期 γ 倍に増えています。そのため調整費用関数も $S(\gamma) = S'(\gamma) = 0$ となるように基準点をずらし、「定常的な成長率からの乖離」にだけ費用がかかるように定式化します。

補足：労働時間が一定になるための条件

本書の効用関数(2.1)は消費と労働について分離しているので、消費が成長し続けても労働時間 N_t が一定にとどまるのは、厳密には $\sigma = 1$（対数効用）の場合だけです。$\sigma \neq 1$ でも均斉成長経路と両立させるには、消費と労働が分離しない形の効用関数を使います。Smets and Wouters (2007) がそのような効用関数を採用しているのは、このためです。

成長を入れても、第4章の線形化と第5章の解法の手順は変わりません。違いが本質的にな

るのは、モデルとデータをつなぐ段階です。データは成長しているのに、モデルの変数は定常化されているからです。その対応のつけ方（観測方程式）は第6章で扱います。以下、本書の第I部では、表記を簡単にするために成長のない経済（$\gamma = 1$）で議論を進めます。

3.5 カリブレーションと推定の役割分担

DSGEモデルのパラメータは、大きく二つのグループに分かれます。

一つは、**定常状態に効くパラメータ**です。命題3.2で見たように、これらはデータの長期的な平均（大比率）から値を決めることができます。このように、モデルの性質をデータの特定の統計量に合わせてパラメータの値を決めることを**カリブレーション**と呼びます。

もう一つは、**動学に効くパラメータ**です。習慣形成 h、調整費用 ψ、カルボ・パラメータ ω_p, ω_w、インデクセーション ι_p, ι_w、金利ルールの係数、ショックの持続性と分散などがこれにあたります。これらは定常状態にまったく影響しないので、大比率からは決められません。データの時系列としての動き（変動の大きさや持続性、変数間の連動）から推定する必要があります。

パラメータ	主な決め方	本書の値の目安
β（割引因子）	平均的な実質金利	0.99
δ（資本減耗率）	投資・資本比率	0.025
α（資本の生産弾力性）	労働分配率	0.33
G/Y（政府支出比率）	国民経済計算の平均	0.18
ε_p、ε_w（マークアップ）	利潤率などの外部情報	固定することが多い
χ（労働の不効用）	平均労働時間に合わせて逆算	—
h、ψ、ϑ、ω_p、ω_w、ι_p、ι_w	時系列データから推定	第III部
σ、φ	時系列データから推定（外部情報で固定することもある）	第III部
ρ_i、ϕ_π、ϕ_y	時系列データから推定	第III部
ショックの持続性・分散	時系列データから推定	第III部

補足：なぜマークアップは固定するのか

価格マークアップ ε_p は定常状態の mc を通じて大比率に効きますが、線形化したモデルの動学には（λ_p の中に現れないので）ほとんど影響しません。賃金マークアップ ε_w に至っては、本書の定式化では定常状態の労働時間にしか効かず、それも χ の逆算で吸収されます。データの動きから識別することが難しいので、多くの研究では外部の情報に基づいて固定しています。Smets and Wouters (2007) も、賃金マークアップの定常値を固定しています。このように「データから識別できないパラメータ」の問題は、第8章で識別の問題として改めて扱います。

要点：この章のまとめ

- 定常状態では摩擦はすべて効かなくなる。計算は「金利 → レンタル料 → 限界費用 → 賃金 → 比率 → 水準」の順に進める。
- 資本・投資・消費の産出に対する比率は、β、δ、α、$\mathcal{M}_p$、G/Y だけで決まり、選好のパラメータに依存しない（命題3.2）。
- 経済成長がある場合は、トレンドで割って定常化する。定常状態の金利は γ^{σ}/β に上がる。
- 定常状態に効くパラメータはカリブレーションで、動学に効くパラメータは推定で決めるという役割分担がある。

次の章へ　定常状態という基準点が手に入りました。次章では、この点の周りで均衡条件を1次近似し、中規模モデルを線形の方程式体系にまとめます。

第4章

対数線形化

> **ここまでの流れ**　第2章で均衡条件を導き、第3章で定常状態を計算しました。
> **この章の問い**　非線形の均衡条件を、どうすれば解ける形にできるのでしょうか。そして、線形化した一本一本の式は、経済学的に何を表しているのでしょうか。
> **この章で分かること**　対数線形化の手順と、率や比率の変数を扱うときの注意。中規模モデルを構成する15本の線形方程式。金融政策が経済に波及する経路の全体像。そして、小さなRBCモデルで手順を一通り練習すること。

4.1　線形化の目的と基本ルール

第2章の均衡条件は非線形で、しかも将来の期待値を含んでいます。このままでは一般に解析的に解けません。そこで定常状態の周りで1次近似し、変数の**定常状態からの乖離**についての線形の方程式体系に置き換えます。1次近似は、ショックが十分小さく、経済が定常状態の近くにとどまっている限りよい近似になります。

基本的な技法はNK編の付録Aで扱ったとおりです。要点だけ再掲しておきます。

もとの形	線形化した形
$Z_t = X_t Y_t$	$\hat{z}_t = \hat{x}_t + \hat{y}_t$
$Z_t = X_t^a$	$\hat{z}_t = a\hat{x}_t$
$Z_t = X_t + Y_t$	$Z\hat{z}_t = X\hat{x}_t + Y\hat{y}_t$
$Z_t = f(X_t)$	$\hat{z}_t = \dfrac{f'(X)X}{f(X)}\hat{x}_t$

中規模モデルでは、これに加えて次の三つの注意が必要になります。

率の変数は「差」で測る

インフレ率や金利は、もともと「率」です。$\ln(1+i_t) \simeq i_t$ という近似を使い、定常値からの**差**（パーセント・ポイント）で乖離を測ります。本書では $\hat{\imath}_t \equiv i_t - \rho$、$\pi_t \equiv \ln \Pi_t$ と書きます。

ゼロになりうる変数は産出との比で測る

政府支出のように、定常値がゼロになりうる（あるいは符号が変わりうる）変数は、対数がとれません。こうした変数は $g_t \equiv (G_t - G)/Y$ のように、**産出の定常値で割った差**で測ります。

定常状態で1になる変数に注意する

稼働率 u_t やトービンの q（Q_t）は定常状態で1です。乖離 $\hat{u}_t = \ln u_t$ は、$u_t - 1$ とほぼ同じものです。

4.2　家計ブロックの線形化

4.2.1　消費：習慣形成をもつオイラー方程式

限界効用の式(2.5)から始めます。均衡では $\bar{C}_{t-1} = C_{t-1}$ であり、定常状態では $C_t - hC_{t-1} = (1-h)C$ です。$C_t - hC_{t-1}$ を線形化すると $C\hat{c}_t - hC\hat{c}_{t-1}$ なので、その対数乖離は $(\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1})/(1-h)$ です。したがって

$$\hat{\lambda}_t = \hat{\varepsilon}^b_t - \frac{\sigma}{1-h}\left(\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1}\right) \tag{4.1}$$

です。債券のオイラー方程式(2.6)は

$$\hat{\lambda}_t = E_t\hat{\lambda}_{t+1} + \hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1} \tag{4.2}$$

となります。(4.1)を(4.2)に代入して整理すると、次の式を得ます。

命題 4.1 (習慣形成をもつ消費のオイラー方程式)

$$\hat{c}_t = \frac{h}{1+h}\hat{c}_{t-1} + \frac{1}{1+h}E_t\hat{c}_{t+1} - \frac{1-h}{\sigma(1+h)}\left(\hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1}\right) + \frac{1-h}{\sigma(1+h)}\left(\hat{\varepsilon}^b_t - E_t\hat{\varepsilon}^b_{t+1}\right) \tag{4.3}$$

証明. (4.1)を t 期と $t+1$ 期について(4.2)に代入すると

$$\hat{\varepsilon}^b_t - \frac{\sigma}{1-h}(\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1}) = E_t\hat{\varepsilon}^b_{t+1} - \frac{\sigma}{1-h}(E_t\hat{c}_{t+1} - h\hat{c}_t) + \hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1}.$$

$\hat{c}$ の項を左辺に集めると

$$\frac{\sigma}{1-h}\Big[(1+h)\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1} - E_t\hat{c}_{t+1}\Big] = -(\hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1}) + (\hat{\varepsilon}^b_t - E_t\hat{\varepsilon}^b_{t+1})$$

となる。両辺に $(1-h)/[\sigma(1+h)]$ を掛けて $\hat{c}_t$ について解けばよい。 □

数式の読み方：NK編の動学IS曲線との比較

- $h=0$ とおくと $\hat{c}_t = E_t\hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(\hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1}) + \dots$ となり、NK編の動学IS曲線の形に戻ります。
- $h>0$ だと、**前期の消費** $\hat{c}_{t-1}$ が右辺に入ります。今期の消費は、前期の消費と来期の予想消費の加重平均を中心に決まり、重みは $h/(1+h)$ と $1/(1+h)$ です。これが消費の慣性の正体です。
- 実質金利への反応の大きさは $(1-h)/[\sigma(1+h)]$ で、h が大きいほど小さくなります。$h=0.7$ なら $h=0$ のときの約6分の1です。習慣形成は、消費を金利に反応しにくくする働きももっています。
- 選好ショックは $\hat{\varepsilon}^b_t - E_t\hat{\varepsilon}^b_{t+1}$ の形で入ります。今期の消費の価値が**来期と比べて**一時的に高まったときに、消費が増えるということです。

4.2.2　労働供給：限界代替率

労働供給の一階条件(2.7)を線形化すると $\hat{\varepsilon}^b_t + \varphi\hat{n}_t = \hat{\lambda}_t + \hat{w}^h_t$ です。(4.1)を代入すると選好ショックが打ち消し合い、家計の受け取る実質賃金、すなわち労働と消費の限界代替率は

$$\widehat{mrs}_t = \varphi\hat{n}_t + \frac{\sigma}{1-h}\left(\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1}\right) \tag{4.4}$$

となります。ここで、賃金のばらつきが2次の大きさであること（第2章）から、家計の労働時間と企業が使う労働の乖離は等しい（$\hat{n}^h_t = \hat{n}_t$）としました。

4.2.3　投資とトービンの q

投資の一階条件(2.10)は少し手間がかかります。$x_t = I_t/I_{t-1}$ の対数乖離は $\hat{x}_t = \hat{I}_t - \hat{I}_{t-1}$ です。

右辺第1項の角括弧 $1 - S(x_t) - S'(x_t)x_t$ は、定常状態 $x=1$ で1であり、x についての微分は $-S'(1) - S''(1) - S'(1) = -\psi$ です。したがって線形化すると $1 - \psi\hat{x}_t$ になります。右辺第2項の $S'(x_{t+1})x^2_{t+1}$ は、定常状態でゼロ、微分は $S''(1)=\psi$ なので $\psi\hat{x}_{t+1}$ です。第2項はもともと小さい量（定常状態でゼロ）に掛かっているので、他の因子 $\beta\lambda_{t+1}Q_{t+1}\mu_{t+1}/\lambda_t$ は定常値 β で置き換えてかまいません。以上より

$$0 = \hat{q}_t + \hat{\mu}_t - \psi\hat{x}_t + \beta\psi E_t\hat{x}_{t+1}$$

を得ます。$\hat{x}_t = \hat{I}_t - \hat{I}_{t-1}$ を代入して $\hat{I}_t$ について解くと、

$$\hat{I}_t = \frac{1}{1+\beta}\hat{I}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta}E_t\hat{I}_{t+1} + \frac{1}{\psi(1+\beta)}\left(\hat{q}_t + \hat{\mu}_t\right) \tag{4.5}$$

となります。

資本の一階条件(2.9)は、稼働率の項 $r_t^k u_t - a(u_t)$ の u についての微分が定常状態で $r^k - a'(1) = 0$ となって消えることに注意すると、

$$\hat{q}_t = -\big(\hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1}\big) + \big[1-\beta(1-\delta)\big]E_t\hat{r}^k_{t+1} + \beta(1-\delta)E_t\hat{q}_{t+1} \tag{4.6}$$

となります。ここで $E_t\hat{\lambda}_{t+1} - \hat{\lambda}_t = -(\hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1})$（(4.2)）と、定常状態の関係 $\beta r^k = 1-\beta(1-\delta)$（(3.1)）を使いました。

数式の読み方：投資の式と q の式の読み方

- (4.5)は、消費のオイラー方程式(4.3)とよく似た形をしています。今期の投資は、前期の投資と来期の予想投資の加重平均に、q の動きを加えたものです。調整費用が投資の「変化」にかかるので、投資に慣性が生まれています。
- 投資を動かすのは $\hat{q}_t$、すなわち資本の価値です。その反応の大きさ $1/[\psi(1+\beta)]$ は、調整費用 ψ が大きいほど小さくなります。
- (4.6)は、資本の価値 $\hat{q}_t$ が、実質金利（割引率）が上がると下がり、来期のレンタル料と来期の資本の価値が上がると上がることを示しています。株価の決定式と同じ構造で、Q_t は資本の「株価」のようなものです。
- 金融政策は、実質金利を通じて $\hat{q}_t$ を動かし、それが投資を動かします。消費への経路（(4.3)）と並ぶ、もう一つの重要な波及経路です。

4.2.4 稼働率と資本

稼働率の一階条件(2.8)を線形化すると $a'(1)\hat{r}^k_t = a''(1)\hat{u}_t$ なので、$\vartheta \equiv a''(1)/a'(1)$ と置くと

$$\hat{u}_t = \frac{1}{\vartheta}\,\hat{r}^k_t \tag{4.7}$$

です。ϑ は稼働費用関数の曲率で、小さいほど稼働率を変えやすく、レンタル料が少し上がっただけで稼働率が大きく上がります。

資本サービスと資本蓄積は

$$\hat{k}^s_t = \hat{u}_t + \hat{k}_{t-1} \tag{4.8}$$

$$\hat{k}_t = (1-\delta)\hat{k}_{t-1} + \delta\big(\hat{I}_t + \hat{\mu}_t\big) \tag{4.9}$$

です。(4.9)では定常状態の $I/K = \delta$ を使いました。

4.3 企業ブロックの線形化

生産関数(2.28)、資本・労働比率(2.19)、限界費用(2.20)は、どれも積とべき乗だけでできているので、線形化は機械的です。価格のばらつきは1次の近似では消えます。

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + \alpha \hat{k}^s_t + (1-\alpha)\hat{n}_t \tag{4.10}$$

$$\hat{k}^s_t - \hat{n}_t = \hat{w}_t - \hat{r}^k_t \tag{4.11}$$

$$\widehat{mc}_t = \alpha \hat{r}^k_t + (1-\alpha)\hat{w}_t - \hat{a}_t \tag{4.12}$$

価格と賃金のフィリップス曲線は、第2章で命題2.3からすでに導いてあります（(2.24)、(2.25)）。名目賃金上昇率は、実質賃金の変化とインフレ率の和です。

$$\pi^w_t = \hat{w}_t - \hat{w}_{t-1} + \pi_t \tag{4.13}$$

4.4 資源制約と金利ルール

資源制約(2.27)は和の形をしているので、構成比が重みになります。稼働費用 $a(u_t)K_{t-1}$ は定常状態でゼロですが、その微分は $a'(1)K = r^k K$ なので1次の項が残ります。

$$\hat{y}_t = \frac{C}{Y}\hat{c}_t + \frac{I}{Y}\hat{I}_t + g_t + r^k \frac{K}{Y}\hat{u}_t \tag{4.14}$$

金利ルール(2.26)は

$$\hat{\imath}_t = \rho_i \hat{\imath}_{t-1} + (1-\rho_i)\big(\phi_\pi \pi_t + \phi_y \hat{y}_t\big) + v_t \tag{4.15}$$

です。

4.5 線形化モデルの全体

以上で、中規模DSGEモデルの線形化が完成しました。一覧にまとめておきます。

	式	番号
消費	$\hat{c}_t = \frac{h}{1+h}\hat{c}_{t-1} + \frac{1}{1+h}E_t\hat{c}_{t+1} - \frac{1-h}{\sigma(1+h)}(\hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1}) +$ (選好ショック)	(4.3)
投資	$\hat{I}_t = \frac{1}{1+\beta}\hat{I}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta}E_t\hat{I}_{t+1} + \frac{1}{\psi(1+\beta)}(\hat{q}_t + \hat{\mu}_t)$	(4.5)
トービンの q	$\hat{q}_t = -(\hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1}) + [1-\beta(1-\delta)]E_t\hat{r}^k_{t+1} + \beta(1-\delta)E_t\hat{q}_{t+1}$	(4.6)
稼働率	$\hat{u}_t = \hat{r}^k_t/\vartheta$	(4.7)
資本サービス	$\hat{k}^s_t = \hat{u}_t + \hat{k}_{t-1}$	(4.8)
資本蓄積	$\hat{k}_t = (1-\delta)\hat{k}_{t-1} + \delta(\hat{I}_t + \hat{\mu}_t)$	(4.9)
生産	$\hat{y}_t = \hat{a}_t + \alpha\hat{k}^s_t + (1-\alpha)\hat{n}_t$	(4.10)
要素比率	$\hat{k}^s_t - \hat{n}_t = \hat{w}_t - \hat{r}^k_t$	(4.11)
限界費用	$\widehat{mc}_t = \alpha\hat{r}^k_t + (1-\alpha)\hat{w}_t - \hat{a}_t$	(4.12)
価格PC	$\pi_t - \iota_p\pi_{t-1} = \beta E_t(\pi_{t+1} - \iota_p\pi_t) + \lambda_p\widehat{mc}_t + u^p_t$	(2.24)
賃金PC	$\pi^w_t - \iota_w\pi_{t-1} = \beta E_t(\pi^w_{t+1} - \iota_w\pi_t) - \lambda_w(\hat{w}_t - \widehat{mrs}_t) + u^w_t$	(2.25)
賃金上昇率	$\pi^w_t = \hat{w}_t - \hat{w}_{t-1} + \pi_t$	(4.13)
限界代替率	$\widehat{mrs}_t = \varphi\hat{n}_t + \frac{\sigma}{1-h}(\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1})$	(4.4)
資源制約	$\hat{y}_t = \frac{C}{Y}\hat{c}_t + \frac{I}{Y}\hat{I}_t + g_t + r^k\frac{K}{Y}\hat{u}_t$	(4.14)
金利ルール	$\hat{\imath}_t = \rho_i\hat{\imath}_{t-1} + (1-\rho_i)(\phi_\pi\pi_t + \phi_y\hat{y}_t) + v_t$	(4.15)

要点：方程式と変数の数

内生変数は、$\hat{c}_t$、$\hat{I}_t$、$\hat{q}_t$、$\hat{u}_t$、$\hat{r}^k_t$、$\hat{k}^s_t$、$\hat{k}_t$、$\hat{y}_t$、$\hat{n}_t$、$\hat{w}_t$、$\widehat{mc}_t$、π_t、π^w_t、$\widehat{mrs}_t$、$\hat{\imath}_t$ の15個で、方程式も15本あります。外生のショックは $\hat{a}_t$、$\hat{\varepsilon}^b_t$、$\hat{\mu}_t$、g_t、v_t、u^p_t、u^w_t の7つです。

方程式と変数の数が一致していることは、モデルが「閉じている」ための必要条件です。線形化した後は、まず最初にこの数を確認する習慣をつけてください。

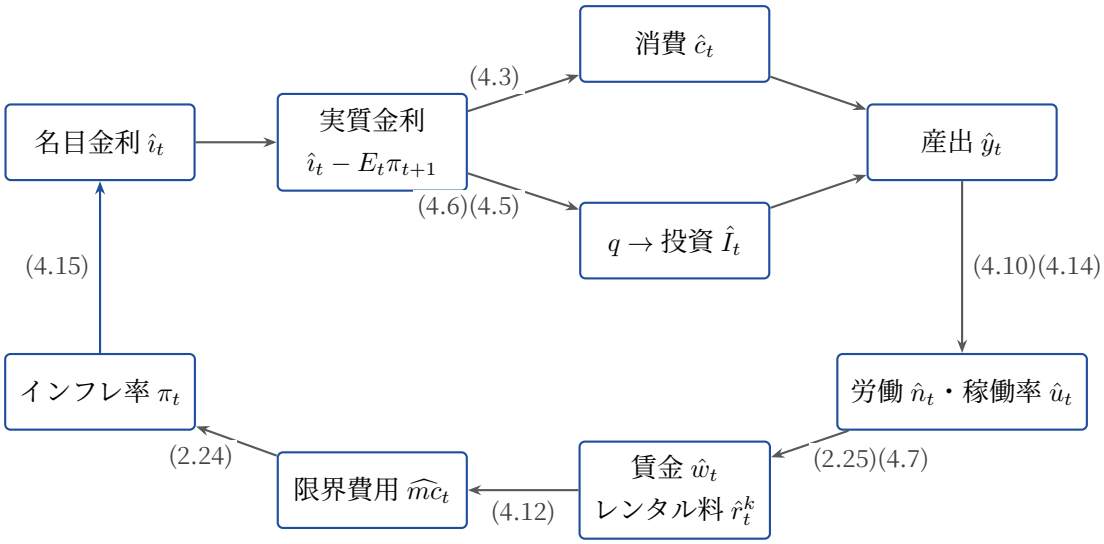
数式の読み方：パラメータはどこに現れるか

この一覧から、第3章の役割分担がもう一度確認できます。選好のパラメータ σ、h、φ や摩擦のパラメータ ψ、ϑ、ω_p、ω_w は式の係数として直接現れ、動学を左右します。一方、χ や ε_w はどこにも現れません。β、δ、α、ε_p、G/Y は、係数 C/Y、I/Y、r^kK/Y を通じて現れます。

4.6　金融政策はどう波及するのか

15本の式は互いに複雑に結びついていますが、金融政策の効果に注目すると、一つの循環として読むことができます。

図 4.1　線形化モデルにおける金融政策の波及経路



矢印の横の番号は、その経路を担う式。最後の青い矢印は、インフレ率の変化に中央銀行が反応して金利を動かすという、政策ルールによるフィードバックを表す。

図の読み方

- 上半分は**需要側**の経路です。金利の引き上げは実質金利を上げ、消費（オイラー方程式）と投資（q の低下）を減らし、産出を減らします。
- 下半分は**供給側**の経路です。産出が減ると、企業は労働と資本サービスを減らします。労働需要の減少は賃金の上昇を抑え、稼働率の低下はレンタル料を下げます。その結果、限界費用が下がり、価格フィリップス曲線を通じてインフレ率が下がります。
- 経路の途中にある**習慣形成・調整費用・賃金の硬直性・稼働率**が、それぞれの段階で反応を遅らせたり和らげたりします。第1章の図で見たこぶ型の反応は、この遅れが積み重なった結果です。
- 最後に、インフレ率の低下を見た中央銀行は、ルールに従って金利を下げます。この循環が、ショックの効果を時間とともに打ち消していきます。

4.7　練習：RBCモデルで手順を通す

中規模モデルの線形化は、式の数が多くて全体像を見失いがちです。ここで一度、小さなモデルで手順を通しておきましょう。題材はRBCモデルです。

代表的家計が $E_0 \sum_t \beta^t \left[\ln C_t - \chi N_t^{1+\varphi}/(1+\varphi)\right]$ を最大化し、生産関数 $Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$、資本蓄積 $K_t = (1-\delta)K_{t-1} + I_t$、資源制約 $Y_t = C_t + I_t$ のもとにあるとします。市場は完全競争で、均衡条件は生産関数のほかに次の4本です。

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t\left[\frac{1}{C_{t+1}}\left(\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta\right)\right], \qquad \chi N_t^{\varphi} C_t = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t},$$

$$Y_t = C_t + I_t, \qquad K_t = (1-\delta)K_{t-1} + I_t.$$

問1　オイラー方程式を線形化してください。

問2　本章の中規模モデルで、どのパラメータをどう置けばこのRBCモデルになるかを答えてください。

問3　本章の中規模モデルには、過去の値が今期の式に現れる変数（状態変数）がいくつありますか。

補足：解答

問1　$\hat{r}^k_t \equiv \hat{y}_t - \hat{k}_{t-1}$（資本の限界生産物の乖離）と置き、定常状態の $\beta(\alpha Y/K) = 1-\beta(1-\delta)$ を使うと

$$\hat{c}_t = E_t\hat{c}_{t+1} - \big[1-\beta(1-\delta)\big]E_t\hat{r}^k_{t+1}$$

です。資本の収益率が上がると予想されると、今期の消費を減らして貯蓄に回すことを表しています。

問2　$h=0$、$\sigma=1$（対数効用）、$\psi \to 0$（調整費用なし）、$\vartheta \to \infty$（稼働率は1に固定）、$\omega_p, \omega_w \to 0$（価格・賃金は伸縮的）、$\varepsilon_p, \varepsilon_w \to \infty$（マークアップなし）とします。このとき、$\psi \to 0$ で投資の式(4.5)は $\hat{q}_t = -\hat{\mu}_t$ となり、ショックがなければ q は1に固定されます。すると(4.6)は「実質金利＝来期のレンタル料の予想」という裁定条件になり、これを消費のオイラー方程式(4.3)（$h=0$、$\sigma=1$）に代入したものが問1の式です。また、$\lambda_p \to \infty$ なので価格PCからは $\widehat{mc}_t = 0$（実質限界費用は一定）が出てきます。名目変数（インフレ率と金利）は実物の配分に影響しなくなり、NK編第1章で見た古典派の二分法が成り立ちます。

問3　$\hat{c}_{t-1}$（習慣形成）、$\hat{I}_{t-1}$（調整費用）、$\hat{k}_{t-1}$（資本蓄積）、π_{t-1}（インデクセーション）、$\hat{w}_{t-1}$（賃金上昇率の定義）、$\hat{\imath}_{t-1}$（金利の平滑化）の6つです。これらはどれも、第2章で加えた資本蓄積と摩擦によって入ってきたものです。3方程式モデルには一つもなかったことを思い出してください。第5章では、この状態変数の数が、解の一意性を判定するブランシャール＝カーン条件で重要な役割を果たします。

要点：この章のまとめ

- 対数線形化では、率の変数は差で、ゼロになりうる変数は産出との比で測る。
- 習慣形成は消費のオイラー方程式に前期の消費を、調整費用は投資の式に前期の投資を持ち込む。どちらも慣性の源である。
- トービンの q の式は資本の価値の決定式であり、金融政策は実質金利を通じて q を動かし、投資を動かす。
- 中規模モデルは15本の線形方程式と7つのショックからなる。状態変数は6つあり、これが3方程式モデルとの最大の違いである。

第II部へ　第I部では、中規模DSGEモデルを「作る」作業を終えました。手元には、期待値と過去の値を含む15本の線形方程式があります。第II部では、この体系を合理的期待のもとで解き、$\mathbf{x}_t = \mathbf{P}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\epsilon}_t$ という状態空間表現に直します。NK編第6章で状態変数のない場合を扱ったブランシャール＝カーン条件を、状態変数のある一般的な場合に拡張するところから始めます。

第II部

モデルを解く

第5章

第II部のはじめに

第I部では、中規模DSGEモデルを組み立て、15本の線形方程式にまとめました。その中には、来期の予想 $E_t\hat{c}_{t+1}$、$E_t\pi_{t+1}$ と、前期の値 $\hat{c}_{t-1}$、$\hat{k}_{t-1}$ が混在しています。今期の消費は来期の予想に依存し、来期の予想は来期の状態に依存し、来期の状態は今期の消費に依存する。このままでは、どの変数がいくらになるのかが分かりません。

第II部の目的は、この体系を**合理的期待のもとで解く**ことです。解くとは、モデルの変数を「いま経済がどんな状態にあるか」だけの関数として書き表すことです。そうして得られる形

$$\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{s}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \qquad \mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{s}_t$$

を**状態空間表現**と呼びます。第I部の図で示したインパルス応答も、第III部で行う推定も、すべてこの形から出発します。

NK編第6章では、状態変数をもたない3方程式モデルについて、ブランシャール＝カーン条件と未定係数法を学びました。第II部はその一般化です。状態変数があると何が変わるのかを、2変数のRBCモデルで手を動かして確かめてから（5.2節）、一般的な定理に進み（5.3節）、実際の計算で使われるQZ分解に至ります（5.4節）。最後に第I部の中規模モデルに当てはめ、テイラー原理が中規模モデルでも成り立つかどうかを確かめます（5.5節）。

記号と枠の色の約束は、第I部と同じです。第I部の式を引用するときは「第I部の式(4.3)」のように書きます。

第5章

合理的期待モデルの解法

> **ここまでの流れ**　第I部で、中規模DSGEモデルの線形化された方程式体系が手に入りました。NK編第6章では、状態変数のない3方程式モデルの解き方を学んでいます。
> **この章の問い**　過去を引きずる状態変数と、将来を見越して決まるジャンプ変数が混在する体系は、どうすれば解けるのでしょうか。解がただ一つに決まるのは、どんなときでしょうか。
> **この章で分かること**　先決変数とジャンプ変数の区別。RBCモデルの鞍点経路。状態変数を含む場合のブランシャール＝カーン条件とその証明。QZ分解による解法。中規模モデルでのテイラー原理。そして、インパルス応答と分散を計算するための状態空間表現。

5.1　「解く」とは何をすることか

5.1.1　先決変数とジャンプ変数

線形化したモデルの変数は、性格の異なる二つのグループに分かれます。

定義 5.1 (先決変数とジャンプ変数)　t 期の値が $t-1$ 期までの情報だけで決まっている変数を**先決変数**（predetermined variable）と呼ぶ。資本ストック $\hat{k}_{t-1}$ や前期の消費 $\hat{c}_{t-1}$ がその例である。外生ショックも、t 期の値が実現したあとは先決変数として扱う。これに対して、t 期の情報が明らかになってから自由に値が決まる変数を**ジャンプ変数**（非先決変数）と呼ぶ。消費 $\hat{c}_t$、インフレ率 π_t、トービンの q がその例である。

以下では、先決変数をまとめたベクトルを $\mathbf{s}_t$（n_s 次元）、ジャンプ変数をまとめたベクトルを $\mathbf{y}_t$（n_y 次元）と書き、全体を $\mathbf{X}_t = (\mathbf{s}_t', \mathbf{y}_t')'$（$n = n_s + n_y$ 次元）とします。線形化したモデルは、ショックの項を除けば

$$\mathbf{A}\, E_t \mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{B}\, \mathbf{X}_t \tag{5.1}$$

という形に書けます。ショックは自己回帰過程に従う外生の先決変数として $\mathbf{s}_t$ に含め、その新しい撹乱（イノベーション）ε_{t+1} だけが予想できない部分として先決変数の式に加わる、と考えます。

数式の読み方：なぜ前期の消費まで「状態」に入るのか

第I部の式(4.3)の消費のオイラー方程式には、$\hat{c}_{t-1}$ が入っていました。t 期の時点で $\hat{c}_{t-1}$ はすでに決まっているので、先決変数です。そこで $\hat{c}_t^{\text{lag}} \equiv \hat{c}_{t-1}$ という変数を新しく定義し、恒等式 $\hat{c}_{t+1}^{\text{lag}} = \hat{c}_t$ を体系に加えます。こうすると、すべての式が「$t+1$ 期の値」と「t 期の値」だけを含む(5.1)の形になります。習慣形成やインデクセーションのように1期前の値が入る摩擦は、このようにして状態変数を一つずつ増やします。

5.1.2 解の意味

定義 5.2 (解)　(5.1)の**解**とは、すべての期で(5.1)を満たし、発散しない（すべての変数の条件付き期待値が有界にとどまる）確率過程 $\{\mathbf{X}_t\}$ のことである。とくに、ジャンプ変数が状態の線形関数として $\mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{s}_t$ と書けるとき、$\mathbf{F}$ を**政策関数**（policy function）と呼ぶ。

発散する経路を除外するのは、それが家計の横断性条件や、線形近似が有効な範囲（定常状態の近く）と両立しないからです。この「発散しない」という要請が、ジャンプ変数の値を一つに絞り込む役割を果たします。その仕組みを、まず小さな例で見ましょう。

5.2 2変数の例：RBCモデルの鞍点経路

5.2.1 モデルと線形化

第I部第4章の練習で扱ったRBCモデルを、さらに簡単にします。労働を1に固定し、ショックもないとします。均衡条件は、オイラー方程式と資源制約の2本です。

$$\frac{1}{C_t} = \beta \frac{1}{C_{t+1}}\left(\alpha K_t^{\alpha-1} + 1 - \delta\right), \qquad K_t = K_{t-1}^{\alpha} + (1-\delta)K_{t-1} - C_t$$

定常状態の関係 $\alpha K^{\alpha-1} + 1 - \delta = 1/\beta$ を使って線形化すると、

$$\hat{k}_t = \frac{1}{\beta}\hat{k}_{t-1} - \gamma\,\hat{c}_t \tag{5.2}$$

$$\hat{c}_{t+1} = \hat{c}_t - \theta\,\hat{k}_t \tag{5.3}$$

となります。ここで $\gamma \equiv C/K > 0$、$\theta \equiv (1-\alpha)\big[1-\beta(1-\delta)\big] > 0$ です。

数式の読み方：2本の式の読み方

- (5.2)は資源制約です。資本が多ければ生産も増えるので来期の資本が増え（係数 $1/\beta > 1$）、今期の消費を増やせばその分だけ資本が減ります。
- (5.3)はオイラー方程式です。資本が多いと資本の限界生産物が低く（$\alpha < 1$ のため）、貯蓄の収益率が低いので、消費は伸びません。資本が定常値を上回る（$\hat{k}_t > 0$）と消費は減っていき、下回ると増えていきます。

$\hat{k}_{t-1}$ が先決変数、$\hat{c}_t$ がジャンプ変数です。(5.2)を(5.3)に代入して $\mathbf{X}_t = (\hat{k}_{t-1},\ \hat{c}_t)'$ についての式にまとめると

$$\begin{pmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_{t+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \hat{k}_{t-1} \\ \hat{c}_t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/\beta & -\gamma \\ -\theta/\beta & 1+\theta\gamma \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

を得ます。

5.2.2　固有値は必ず一つが安定、一つが不安定

命題 5.3 (RBCモデルの鞍点性)　$\mathbf{M}$ の固有値 λ_1, λ_2 は実数で、$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ を満たす。

証明. 特性多項式は $p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M})$ である。$\det(\mathbf{M}) = \frac{1}{\beta}(1+\theta\gamma) - \frac{\theta\gamma}{\beta} = \frac{1}{\beta}$、$\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \frac{1}{\beta} + 1 + \theta\gamma$ より

$$p(0) = \frac{1}{\beta} > 0, \qquad p(1) = 1 - \left(\frac{1}{\beta} + 1 + \theta\gamma\right) + \frac{1}{\beta} = -\theta\gamma < 0$$

である。p は連続で $\lambda \to \infty$ のとき $p(\lambda) \to \infty$ なので、中間値の定理により $(0,1)$ と $(1,\infty)$ にそれぞれ一つずつ実根がある。 □

第I部と同じ $\beta = 0.99$、$\delta = 0.025$、$\alpha = 0.33$ では、$\lambda_1 \simeq 0.962$、$\lambda_2 \simeq 1.050$ です。

5.2.3　発散しない経路はただ一つ

$\mathbf{M}$ の固有ベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とすると、任意の初期値は $\mathbf{X}_0 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ と分解でき、t 期後には

$$\mathbf{X}_t = a_1\lambda_1^t\,\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2^t\,\mathbf{v}_2$$

となります。$\lambda_2 > 1$ なので、$a_2 \neq 0$ である限り経路は発散します。発散しない経路は $a_2 = 0$、すなわち**初期値が安定な固有ベクトル $\mathbf{v}_1$ の方向にある**ものだけです。

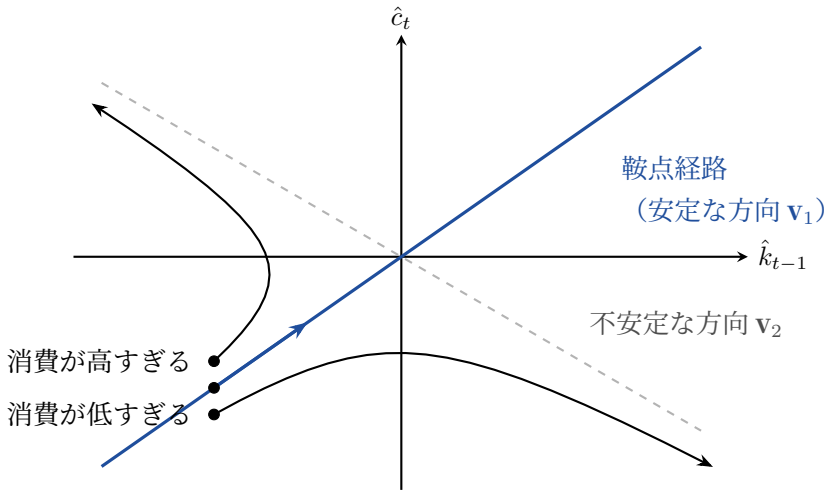
資本 $\hat{k}_{-1}$ は過去から与えられていて動かせません。動かせるのはジャンプ変数 $\hat{c}_0$ だけです。$\mathbf{v}_1$ の方向に乗るように $\hat{c}_0$ を選ぶ方法は、ちょうど一通りあります。$\mathbf{M}$ の第1行に $\hat{c}_t = f\hat{k}_{t-1}$ を代入すると $\hat{k}_t = (1/\beta - \gamma f)\hat{k}_{t-1}$ であり、これが $\lambda_1\hat{k}_{t-1}$ に等しくなければなら

ないので、

$$\hat{c}_t = f\,\hat{k}_{t-1}, \qquad f = \frac{1/\beta - \lambda_1}{\gamma} \tag{5.5}$$

が政策関数です。数値では $f \simeq 0.59$ となります。

図 5.1　RBCモデルの鞍点経路



資本が定常値を1%下回る状態（$\hat{k}_{-1} = -1$）から出発した三つの経路。消費の初期値だけが異なる。黒い矢印は実際にモデルを繰り返し計算した軌道で、表示範囲を出たところで止めてある。

図の読み方

- 青い直線が鞍点経路です。消費をちょうどこの線の上に選ぶと（青い矢印）、資本と消費はこの線に沿って原点（定常状態）に近づいていきます。
- 消費を少しでも高く選ぶと、資本の蓄積が足りず、資本はどんどん減っていきます（左上へ向かう黒い経路）。やがて資本を食いつぶし、資源制約を満たせなくなります。
- 消費を少しでも低く選ぶと、資本が過剰に蓄積され続けます（右下へ向かう経路）。これは横断性条件に反し、家計にとって最適ではありません。
- 灰色の破線は不安定な固有ベクトルの方向です。鞍点経路から外れた経路は、時間とともにこの方向に引き寄せられながら発散していきます。

要点：2変数の例から分かること

先決変数が1つ、ジャンプ変数が1つ、安定な固有値が1つ、不安定な固有値が1つ。この**個数の一致**が、発散しない経路をただ一つに決めています。

不安定な固有値1つにつき、「その方向の成分をゼロにせよ」という制約が1本生まれます。その制約を満たすために、ジャンプ変数が1つ使われます。制約の数とジャンプ変数の数が一致するとき、解はちょうど一つに決まります。この考え方が、次節の一般的な定理の核心です。

ラムゼイモデルの攻略マニュアルで連続時間の位相図として描いた鞍点経路と、まったく同じ構造であることに気づいたでしょうか。離散時間・線形近似でも、構造は変わりません。

5.3　ブランシャール＝カーン条件：一般の場合

5.3.1　定理

この節の条件は、Blanchard and Kahn (1980) にちなんでブランシャール＝カーン条件（Blanchard–Kahn条件）と呼ばれます。(5.1)で $\mathbf{A}$ が正則な場合を考えます。$\mathbf{M} \equiv \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ とおくと $E_t \mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_t$ です。$\mathbf{M}$ の固有値のうち、絶対値が1より小さいもの（安定）が n_1 個、1より大きいもの（不安定）が n_2 個あるとし、絶対値がちょうど1の固有値はないとします。

命題 5.4 (ブランシャール＝カーン条件)　$\mathbf{M}$ が対角化可能であるとし、$\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$、$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2)$ と、安定な固有値を先に並べる。$\mathbf{W} \equiv \mathbf{V}^{-1}$ の下側 n_2 行を、先決変数とジャンプ変数に対応する列に分けて $(\mathbf{W}_{2s} \;\; \mathbf{W}_{2y})$ と書く。

(i) $n_2 = n_y$ かつ $\mathbf{W}_{2y}$ が正則ならば、発散しない解がただ一つ存在し、

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{s}_t, \qquad \mathbf{F} = -\mathbf{W}_{2y}^{-1}\mathbf{W}_{2s} \tag{5.6}$$

で与えられる。

(ii) $n_2 < n_y$ ならば、発散しない解は、存在するときには無数に存在する（不決定）。

(iii) $n_2 > n_y$ ならば、一般に（初期の状態 $\mathbf{s}_0$ が特殊な値でない限り）発散しない解は存在しない。

証明. $\mathbf{w}_t \equiv \mathbf{W}\mathbf{X}_t$ と変数を変換すると、$E_t \mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{w}_t = \mathbf{\Lambda}\mathbf{w}_t$ となり、体系は互いに独立な成分に分かれる。不安定な成分 $\mathbf{w}_{2,t}$（n_2 次元）について、$E_t \mathbf{w}_{2,t+1} = \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{w}_{2,t}$ を繰り返し使うと、任意の $k \geq 1$ について

$$\mathbf{w}_{2,t} = \mathbf{\Lambda}_2^{-k}\, E_t \mathbf{w}_{2,t+k}$$

が成り立つ。$\mathbf{\Lambda}_2^{-1}$ の対角成分の絶対値は1より小さいので、$E_t \mathbf{w}_{2,t+k}$ が有界なら右辺は $k \to \infty$ でゼロに収束する。したがって、発散しない解は**すべての** t **で** $\mathbf{w}_{2,t} = \mathbf{0}$ を満たさなければならない。これを元の変数で書くと

$$\mathbf{W}_{2s}\mathbf{s}_t + \mathbf{W}_{2y}\mathbf{y}_t = \mathbf{0} \tag{$*$}$$

である。これは $\mathbf{y}_t$（n_y 個の未知数）についての n_2 本の線形方程式である。

(i) $n_2 = n_y$ で $\mathbf{W}_{2y}$ が正則なら、$(*)$は $\mathbf{y}_t = -\mathbf{W}_{2y}^{-1}\mathbf{W}_{2s}\mathbf{s}_t$ とただ一通りに解ける。逆に、こ

のように $\mathbf{y}_t$ を選べば $\mathbf{w}_{2,t}=\mathbf{0}$ であり、残る成分は $\mathbf{w}_{1,t+1}=\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{w}_{1,t}$（にショックを加えたもの）に従うので発散しない。

(ii) $n_2<n_y$ なら、(∗)は $\mathbf{y}_t$ を決めるのに n_y-n_2 本足りない。足りない自由度の分だけ、期待の変化（サンスポット）によって解が動きうる。

(iii) $n_2>n_y$ なら、(∗)は未知数より式が多い。与えられた $\mathbf{s}_t$ に対して一般にこれを満たす $\mathbf{y}_t$ は存在しない。 □

数式の読み方：定理の読み方

- 「不安定な固有値の数＝ジャンプ変数の数」が条件です。言い換えると「**安定な固有値の数＝先決変数の数**」です（$n_1=n-n_2=n-n_y=n_s$）。後者の言い方のほうが、数値計算では確認しやすいことが多いです。
- (i)の「$\mathbf{W}_{2y}$ が正則」は**階数条件**と呼ばれます。個数が合っていても、不安定な方向がジャンプ変数でうまく打ち消せない特殊な場合を除外するものです。実際のモデルではほとんど常に満たされますが、満たされない場合は「解なし」になります。
- NK編第6章の3方程式モデルは、$n_s=0$（先決変数なし）、$n_y=2$ の場合でした。NK編ではモデルを $\mathbf{x}_t=\mathbf{A}_{\mathrm{NK}}E_t\mathbf{x}_{t+1}$ の形に書いたので、本章の $\mathbf{M}$ は $\mathbf{A}_{\mathrm{NK}}^{-1}$ にあたります。条件は「$\mathbf{M}$ の不安定な固有値が2つ」、すなわち「$\mathbf{A}_{\mathrm{NK}}$ の固有値が2つとも単位円の内側」で、NK編の結果と一致します。

5.3.2　解の動学

政策関数が求まれば、状態の動きも決まります。$\mathbf{M}$ を先決変数とジャンプ変数に対応して区分けし、先決変数の行 $E_t\mathbf{s}_{t+1}=\mathbf{M}_{ss}\mathbf{s}_t+\mathbf{M}_{sy}\mathbf{y}_t$ に(5.6)を代入すると

$$\mathbf{s}_{t+1}=\mathbf{P}\mathbf{s}_t+\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1},\qquad \mathbf{P}=\mathbf{M}_{ss}+\mathbf{M}_{sy}\mathbf{F} \tag{5.7}$$

です。$\mathbf{R}$ は、外生ショックの新しい撹乱がどの状態変数に入るかを表す行列です。

命題 5.5 (解の固有値)　命題5.4(i)の状況で、$\mathbf{P}$ の固有値は $\mathbf{M}$ の安定な固有値 $\mathbf{\Lambda}_1$ に一致する。

証明. 発散しない解では $\mathbf{w}_{2,t}=\mathbf{0}$ なので、$\mathbf{X}_t=\mathbf{V}\mathbf{w}_t=\mathbf{V}_{\cdot 1}\mathbf{w}_{1,t}$（$\mathbf{V}$ の左側 n_1 列）である。その先決変数の部分を $\mathbf{s}_t=\mathbf{V}_{s1}\mathbf{w}_{1,t}$ と書く。$\mathbf{V}_{s1}$ は $n_s\times n_s$ の正方行列で、階数条件のもとで正則である。ショックを除けば $\mathbf{w}_{1,t+1}=\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{w}_{1,t}$ なので、$\mathbf{s}_{t+1}=\mathbf{V}_{s1}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{V}_{s1}^{-1}\mathbf{s}_t$ となる。よって $\mathbf{P}=\mathbf{V}_{s1}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{V}_{s1}^{-1}$ は $\mathbf{\Lambda}_1$ と相似である。 □

この命題は、解の性質を読むうえで重要です。**経済がショックからどれだけ速く回復するか**は、安定な固有値の大きさで決まります。絶対値が1に近い固有値があれば回復は遅く、

複素数の固有値があれば振動しながら回復します。

5.4　A が正則でないとき：QZ分解

5.4.1　なぜ A は正則にならないのか

命題5.4は $\mathbf{A}$ が正則であることを仮定していました。ところが、実際のDSGEモデルでは、$\mathbf{A}$ はほとんどの場合**正則になりません**。

理由は単純です。第I部の15本の式の多くは、期待値を含まない**静的な式**でした。生産関数、要素比率、限界費用、資源制約などです。これらの式に対応する $\mathbf{A}$ の行は、すべての成分がゼロになります。ゼロの行があれば、行列式はゼロです。

静的な式を使って変数を手で消去していけば、$\mathbf{A}$ を正則にすることはできます。しかし、15本の式で手作業の消去をするのは骨が折れ、誤りのもとになります。そこで、$\mathbf{A}$ が正則でなくてもそのまま扱える方法が使われます。それがQZ分解です。

5.4.2　一般化固有値

定義 5.6 (一般化固有値)　正方行列の組 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ に対して、$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0$ を満たす λ を**一般化固有値**と呼ぶ。$\mathbf{A}$ が正則なら、これは $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ の通常の固有値に一致する。$\mathbf{A}$ が正則でないとき、$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A})$ は λ について n 次より低い多項式になり、足りない次数の分を**無限大の固有値**と数える。

数式の読み方：無限大の固有値の意味

静的な式 $\mathbf{0} = \mathbf{b}'\mathbf{X}_t$ を考えます。これは「$E_t\mathbf{X}_{t+1}$ の0倍が $\mathbf{X}_t$ の何かに等しい」と読めるので、$\mathbf{X}_t$ の側から見れば「来期の値を無限大倍したもの」と釣り合っている、と考えることができます。無限大の固有値は、究極の「不安定な固有値」です。その方向の成分は、来期を待たずに**今期のうちにゼロ**でなければなりません。
実際、静的な式は「今期の変数どうしの関係」をその場で決めるだけの式です。そのため、一般化固有値を数えるときは**無限大の固有値を不安定な側に数えます**。

5.4.3　QZ分解（一般化シューア分解）

命題 5.7 (QZ分解)　任意の $n \times n$ 複素行列 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ に対して、ユニタリ行列 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{Z}$ と上三角行列 $\mathbf{S}$、$\mathbf{T}$ が存在して

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Z}^{H}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Z}^{H}$$

と書ける（^{H} は共役転置）。一般化固有値は t_{ii}/s_{ii}（$s_{ii} = 0$ なら無限大）であり、その並び順は任意に指定できる。

証明は数値線形代数の教科書（Golub and Van Loan, 2013）に譲ります。ここで大切なのは、**$\mathbf{A}$ が正則でなくても分解が存在する**こと、そして**固有値の並び順を自由に選べる**ことの二つです。この分解は、通常の固有値分解とは違って、数値的にも安定に計算できます。

5.4.4 Kleinの方法

QZ分解を使った解法は、Klein (2000) によって整理されました。

命題 5.8 (QZ分解による解)　$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ のQZ分解を、安定な固有値（$|t_{ii}| < |s_{ii}|$）が先に来るように並べ、その個数を n_1 とする。$\mathbf{Z}$ を先決変数・ジャンプ変数の別と、安定・不安定の別に応じて区分けし、

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow n_s \text{ 行} \\ \leftarrow n_y \text{ 行} \end{matrix}$$

と書く（列は左が安定な n_1 列）。$n_1 = n_s$ で $\mathbf{Z}_{11}$ が正則ならば、発散しない解がただ一つ存在し、

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z}_{21}\mathbf{Z}_{11}^{-1}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{T}_{11}\mathbf{Z}_{11}^{-1} \tag{5.8}$$

で与えられる。

証明. $\mathbf{w}_t \equiv \mathbf{Z}^H \mathbf{X}_t$ とおくと $\mathbf{X}_t = \mathbf{Z}\mathbf{w}_t$ である。(5.1)に代入して左から $\mathbf{Q}^H$ を掛けると

$$\mathbf{S}\, E_t \mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{T}\, \mathbf{w}_t$$

を得る。$\mathbf{S}$、$\mathbf{T}$ は上三角なので、下側のブロックだけを取り出すと $\mathbf{S}_{22} E_t \mathbf{w}_{2,t+1} = \mathbf{T}_{22}\mathbf{w}_{2,t}$ である。

$\mathbf{T}_{22}$ の対角成分は、不安定または無限大の固有値に対応するので $|t_{ii}| > |s_{ii}| \geq 0$ を満たし、すべてゼロでない。よって $\mathbf{T}_{22}$ は正則であり、$\mathbf{w}_{2,t} = \mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{22} E_t \mathbf{w}_{2,t+1}$ と書ける。$\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{22}$ は上三角で、対角成分 s_{ii}/t_{ii} の絶対値は1より小さいから、そのスペクトル半径は1より小さい。これを繰り返し代入すれば、命題5.4の証明と同じく、発散しない解では $\mathbf{w}_{2,t} = \mathbf{0}$ でなければならない。

すると $\mathbf{X}_t = \mathbf{Z}\mathbf{w}_t$ の先決変数とジャンプ変数の部分は

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{w}_{1,t}, \qquad \mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_{21}\mathbf{w}_{1,t}$$

となる。$\mathbf{Z}_{11}$ が正則なら $\mathbf{w}_{1,t} = \mathbf{Z}_{11}^{-1}\mathbf{s}_t$ であり、$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_{21}\mathbf{Z}_{11}^{-1}\mathbf{s}_t$ を得る。

最後に上側のブロックは、$\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ のもとで $\mathbf{S}_{11} E_t \mathbf{w}_{1,t+1} = \mathbf{T}_{11}\mathbf{w}_{1,t}$ である。安定な固有値では $|s_{ii}| > |t_{ii}| \geq 0$ なので $\mathbf{S}_{11}$ は正則で、$E_t \mathbf{w}_{1,t+1} = \mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{T}_{11}\mathbf{w}_{1,t}$ となる。$\mathbf{s}_{t+1}$ は先決変数なので、その予想できない部分はショックの撹乱だけであり、$\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{T}_{11}\mathbf{Z}_{11}^{-1}\mathbf{s}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ を得る。 □

要点：QZ分解による解法の手順

1. 線形化した式を、先決変数を前、ジャンプ変数を後ろに並べて $\mathbf{A}E_t\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{B}\mathbf{X}_t$ の形に書く。
2. $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ をQZ分解し、安定な固有値が先に来るように並べ替える。
3. 安定な固有値の数が先決変数の数 n_s に等しいことを確かめる（ブランシャール＝カーン条件）。
4. (5.8)で $\mathbf{F}$ と $\mathbf{P}$ を計算する。

多くのソフトウェア（Dynareなど）の1次近似の解法は、細部は異なるものの、この考え方に基づいています。

5.5　中規模モデルに当てはめる

5.5.1　体系の形に書く

第I部の中規模モデルを(5.1)の形に書いてみます。

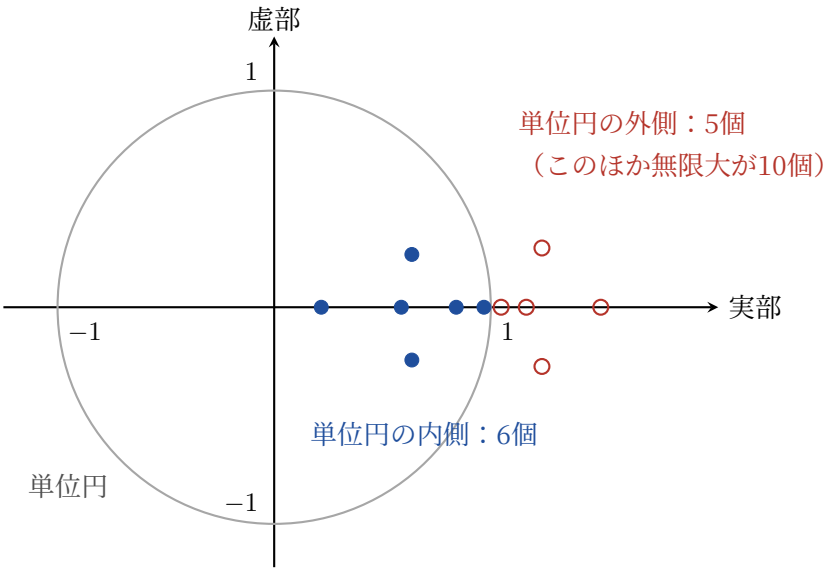
先決変数は、第I部の練習問題3で数えた6つの前期の値（$\hat{k}_{t-1}$、$\hat{c}_{t-1}$、$\hat{I}_{t-1}$、π_{t-1}、$\hat{w}_{t-1}$、$\hat{\imath}_{t-1}$）と、7つの外生ショック（$\hat{a}_t$、$\hat{\varepsilon}^b_t$、$\hat{\mu}_t$、g_t、v_t、u^p_t、u^w_t）です。ジャンプ変数は15個の内生変数です。全体で $n = 13 + 15 = 28$ 次元になります。

式は、15本のモデルの式、6本の恒等式（$\hat{c}^{\text{lag}}_{t+1} = \hat{c}_t$ など）、7本のショックの自己回帰式で、合計28本です。

5.5.2　固有値を見る

ショックの部分を除いた21次元の体系について、一般化固有値を計算すると次のようになります。$\mathbf{A}$ の階数は11なので、無限大の固有値が10個あります。残る11個の有限な固有値を複素平面に描いたのが次の図です。

図 5.2　中規模モデルの一般化固有値



第I部の代表的なパラメータ値で計算した。塗りつぶしの点が安定な固有値、白抜きの点が不安定な固有値。

図の読み方

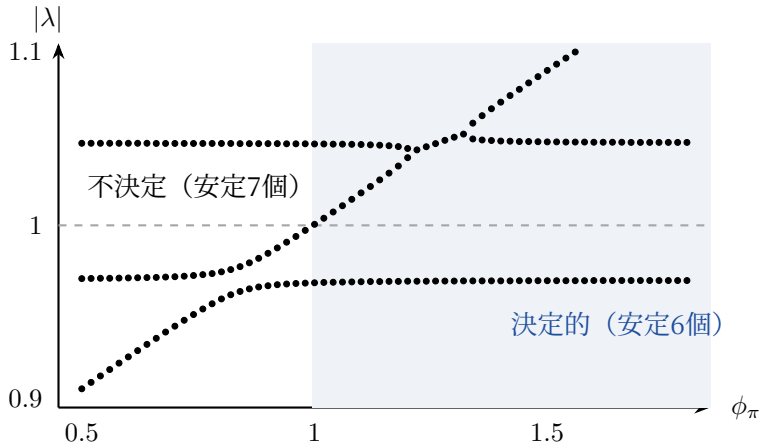
- 単位円の内側にある固有値は6個で、先決変数の数（6）に一致します。ブランシャール＝カーン条件が満たされ、解はただ一つに決まります。
- 不安定な側には、有限の固有値5個と無限大の固有値10個、合わせて15個があり、ジャンプ変数の数（15）に一致します。
- 安定な固有値の中に、0.97程度と1に近いものがあります。命題5.5により、この固有値がショックからの回復の遅さを決めます。資本ストックの調整は、減耗率が小さいためにゆっくりとしか進みません。
- 複素数の固有値の組（実部0.64前後）もあります。こうした固有値は、インパルス応答が一度ゼロを越えて反対側に振れる（第I部の図1.1(b)で見たような）動きを生みます。

5.5.3　テイラー原理は中規模モデルでも成り立つか

NK編第6章では、3方程式モデルの決定性の条件が、ほぼ $\phi_\pi > 1$（テイラー原理）であることを証明しました。資本や習慣形成、金利の平滑化が加わった中規模モデルでも、同じことが言えるでしょうか。

中規模モデルでは手で固有値を求めることはできませんが、数値的に調べることはできます。金利ルールのインフレ反応 ϕ_π を動かしながら、1の近くにある固有値の絶対値を描いたのが次の図です。

図 5.3　インフレ反応 ϕ_π と固有値の絶対値



ϕ_π 以外のパラメータは第I部の値に固定し、絶対値が0.9から1.1の範囲にある一般化固有値だけを描いた。

図の読み方

- ϕ_π が小さいときに単位円の内側（$|\lambda| < 1$）にあった固有値の一つが、ϕ_π を上げていくと右上がりに動き、$\phi_\pi \simeq 1$ のところで1を越えて外側に出ます。
- $\phi_\pi < 1$ では安定な固有値が7個で、先決変数の数（6）より多くなります。命題5.4(ii)の不決定の場合です。
- 境界の位置は、中規模モデルでも**ほぼ** $\phi_\pi = 1$ です。テイラー原理は、資本や各種の摩擦を加えても、このパラメータの範囲では頑健に成り立っています。
- 図には他の固有値も描かれていますが、それらはほとんど ϕ_π に反応しません。金融政策のルールが動かすのは、主にインフレの決定に関わる一つの固有値です。

補足：資本があると決定性は変わりうる

ここでの結果は、第I部のパラメータ値のもとでの数値的な確認であり、一般的な証明ではありません。資本をもつモデルでは、中央銀行が今期のインフレ率に反応するか、来期の予想インフレ率に反応するかで決定性の条件が大きく変わることが知られています（Carlstrom and Fuerst, 2005）。推定の際に決定性の領域をどう扱うかは、第8章で取り上げます。

5.5.4　第I部の図との照合

第I部の図1.1(b)と図2.3は、(5.8)とは別の方法（十分に長い期間の連立方程式を、最終期に定常状態に戻るという条件のもとで一度に解く方法）で計算していました。QZ分解で求めた $\mathbf{F}$、$\mathbf{P}$ から同じインパルス応答を計算すると、両者は表示した桁まで一致します。線形モデルでは、解が一意である限り、どの方法で解いても同じ答えになるはずです。異なる方法

で解いて結果を照合することは、プログラムの誤りを見つける有効な手段です。

5.6 ほかの解法との関係

(5.8)以外にも、よく使われる解法があります。どれも「不安定な方向の成分をゼロにする」という同じ考え方の、異なる表現です。

5.6.1 Simsの方法

Sims (2002) は、体系を

$$\mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{x}_t = \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{\Psi}\boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{\Pi}\boldsymbol{\eta}_t \tag{5.9}$$

と書きます。$\boldsymbol{\eta}_t$ は**予測誤差**で、たとえば $\eta_t^c \equiv \hat{c}_t - E_{t-1}\hat{c}_t$ です。$E_t\hat{c}_{t+1}$ のような期待値は、それ自体を新しい変数 $\xi_t \equiv E_t\hat{c}_{t+1}$ として $\mathbf{x}_t$ に含め、$\hat{c}_t = \xi_{t-1} + \eta_t^c$ という式を加えます。

この書き方の利点は、**変数を先決変数とジャンプ変数に分類する必要がない**ことです。どの変数の予測誤差がゼロでないかは、$\mathbf{\Pi}$ の形で表されます。解の存在と一意性は、「不安定な方向に入ってくるショックを、予測誤差 $\boldsymbol{\eta}_t$ の選び方でちょうど打ち消せるか」という条件で判定されます。不決定のときに、どんなサンスポット均衡がありうるかを記述するのにも便利です。Lubik and Schorfheide (2003) はこの枠組みでサンスポット均衡を整理し、Lubik and Schorfheide (2004) はそれを使って不決定なモデルの推定を行っています。

5.6.2 未定係数法

NK編第6章で使った未定係数法も、状態変数のある場合に拡張できます。最も簡単なスカラーの例で見てみましょう。

$$x_t = a\,E_t x_{t+1} + b\,x_{t-1}$$

解を $x_t = p\,x_{t-1}$ と推測すると、$E_t x_{t+1} = p x_t = p^2 x_{t-1}$ なので、

$$a\,p^2 - p + b = 0 \tag{5.10}$$

という p の2次方程式を得ます。根は二つあり、その積は b/a、和は $1/a$ です。発散しない解をつくるには $|p| < 1$ の根を選ばなければなりません。**条件を満たす根がちょうど一つのとき**、解は一意に決まります。

一方、$\mathbf{X}_t = (x_{t-1}, x_t)'$ として(5.1)の形に書けば、$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ の特性方程式はちょうど(5.10)になります（確かめてみてください）。つまり、未定係数法で「安定な根を選ぶ」ことは、ブランシャール＝カーン条件で「安定な固有値の方向を選ぶ」ことと同じなのです。

ベクトルの場合は、解を $\mathbf{x}_t = \mathbf{P}\mathbf{x}_{t-1}$ と推測すると、行列 $\mathbf{P}$ についての2次方程式 $\mathbf{F}_0\mathbf{P}^2 + \mathbf{G}_0\mathbf{P} + \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}$ になります。Uhlig (1999) は、これを一般化固有値問題に帰着させて解く方法を示しました。

補足：どの方法を使うべきか

三つの方法は数学的に同じ解を与えます。実務では、Dynareをはじめ多くのソフトウェアが、QZ分解に基づく方法を採用しています。数値的に安定で、$\mathbf{A}$ が正則でなくても使えるからです。本書の立場からは、ソフトウェアの内部で何が行われているのかを、命題5.8の水準で理解しておけば十分です。

5.7　状態空間表現

5.7.1　解の形

ここまでの結果をまとめると、線形DSGEモデルの解は

$$\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{s}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \sim \text{i.i.d.}\ (\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}) \tag{5.11}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{s}_t \tag{5.12}$$

という形にまとめられます。$\boldsymbol{\Omega}$ はショックの撹乱の分散共分散行列で、通常は対角行列です。(5.11)を**遷移方程式**と呼びます。

この形が手に入れば、モデルについて知りたいことの多くは、行列の掛け算だけで計算できます。

5.7.2　インパルス応答

命題 5.9 (インパルス応答)　t 期に j 番目のショックの撹乱が1単位だけ生じたとき（$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{e}_j$、それ以外の期の撹乱はゼロ）、$h$ 期後の状態とジャンプ変数の反応は

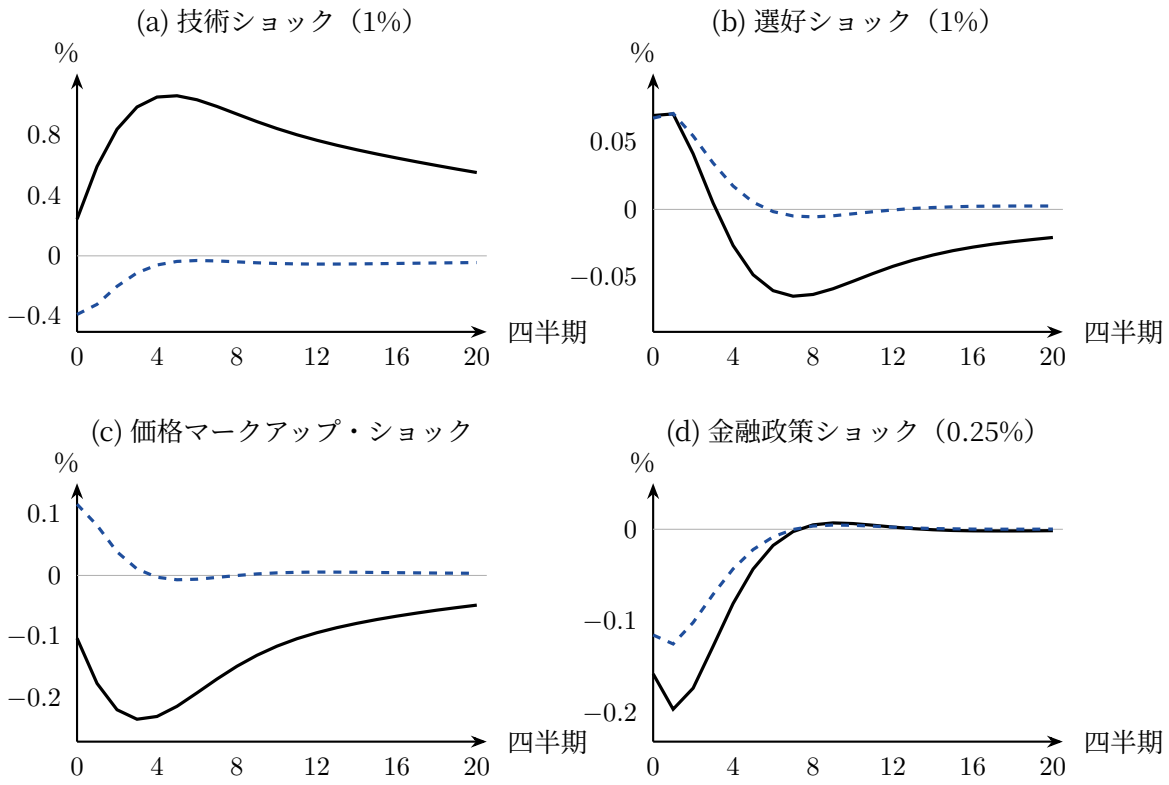
$$\frac{\partial \mathbf{s}_{t+h}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \mathbf{P}^h \mathbf{R}\mathbf{e}_j, \qquad \frac{\partial \mathbf{y}_{t+h}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \mathbf{F}\mathbf{P}^h \mathbf{R}\mathbf{e}_j$$

で与えられる。

証明. (5.11)を t 期から繰り返し代入すると $\mathbf{s}_{t+h} = \mathbf{P}^h \mathbf{s}_t + \sum_{k=1}^{h} \mathbf{P}^{h-k}\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}$ であり、$\mathbf{s}_t = \mathbf{P}\mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ である。$\varepsilon_{j,t}$ で偏微分すれば第1式を得る。第2式は(5.12)から従う。 □

線形モデルでは、インパルス応答はショックの大きさに比例し、ショックが当たる前の状態には依存しません。この性質は、非線形のモデルでは失われます（第V部）。

図 5.4　4つのショックに対する産出とインフレ率の反応



実線が産出、青の破線がインフレ率（四半期）。ショックの持続性は (a) 0.95、(b) 0.8、(c) 0.9、(d) 0 と置いた説明用の値で、推定値ではない。(c) は価格フィリップス曲線の右辺に0.1%ポイントの撹乱を与えた。

図の読み方

- (a) 技術ショックでは、産出が増え、インフレ率は下がります。生産性が上がって限界費用が下がるためです。産出がゆっくり増えていくのは、資本の蓄積に時間がかかるからです。
- (b) 選好ショックは典型的な需要ショックで、産出もインフレ率も上がります。ただし産出の増加は小さく、やがてマイナスに転じます。消費が増える一方で、需要の増加を受けて金利が上がり、投資が当初から減り続けるためです。
- (c) 価格マークアップ・ショックでは、インフレ率が上がり産出が下がります。NK編のコスト・プッシュ・ショックと同じく、中央銀行がインフレ安定と産出の安定の板ばさみになるショックです。
- 産出とインフレ率が**同じ方向に動くか、逆方向に動くか**が、需要ショックと供給ショックを見分ける手がかりになります。第III部で推定するとき、データがこの違いを通じてショックを識別することになります。

5.7.3 分散と自己共分散

状態空間表現からは、モデルが生み出す変数の分散や自己相関も計算できます。

命題 5.10 (無条件分散：リャプノフ方程式)　$\mathbf{P}$ の固有値の絶対値がすべて1より小さいとき、$\mathbf{s}_t$ の無条件分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}_s$ は

$$\mathbf{\Sigma}_s = \mathbf{P}\mathbf{\Sigma}_s\mathbf{P}' + \mathbf{R}\mathbf{\Omega}\mathbf{R}' \tag{5.13}$$

のただ一つの解であり、$\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_s) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}\otimes\mathbf{P})^{-1}\mathrm{vec}(\mathbf{R}\mathbf{\Omega}\mathbf{R}')$ で与えられる。さらに、h 期離れた自己共分散は

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{s}_{t+h}, \mathbf{s}_t) = \mathbf{P}^h\mathbf{\Sigma}_s, \qquad \mathrm{Cov}(\mathbf{y}_{t+h}, \mathbf{y}_t) = \mathbf{F}\mathbf{P}^h\mathbf{\Sigma}_s\mathbf{F}'$$

である。

証明. $\mathbf{s}_t$ は共分散定常なので、$\mathrm{Var}(\mathbf{s}_{t+1}) = \mathrm{Var}(\mathbf{s}_t) = \mathbf{\Sigma}_s$ である。$\mathbf{s}_t$ と ε_{t+1} は無相関なので、(5.11)の両辺の分散をとれば(5.13)を得る。$\mathrm{vec}(\mathbf{XYZ}) = (\mathbf{Z}'\otimes\mathbf{X})\mathrm{vec}(\mathbf{Y})$ を使えば $\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_s) = (\mathbf{P}\otimes\mathbf{P})\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_s) + \mathrm{vec}(\mathbf{R}\mathbf{\Omega}\mathbf{R}')$ であり、$\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}$ の固有値は $\mathbf{P}$ の固有値の積なので絶対値が1より小さく、$\mathbf{I}-\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}$ は正則である。自己共分散は、$\mathbf{s}_{t+h} = \mathbf{P}^h\mathbf{s}_t + (t$ 期より後の撹乱) と $\mathbf{s}_t$ の共分散をとれば得られる。 □

数式の読み方：この命題の使い道

- カリブレーションの時代（RBC研究）には、モデルが生み出す産出の標準偏差や、消費と産出の相関を、この命題で計算してデータと比べていました。
- 第III部のカルマンフィルタでは、フィルタを始めるときの初期値として、状態の無条件分散 $\mathbf{\Sigma}_s$ を使います。
- $\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}$ は $n_s^2 \times n_s^2$ の行列で、$n_s = 13$ でも169次元にすぎません。もっと大きなモデルでは、(5.13)を反復して解く方法がとられます。

5.7.4 推定への橋渡し

最後に、第III部への接続を述べておきます。データとして観測できるのは、$\mathbf{s}_t$ や $\mathbf{y}_t$ そのものではなく、それらの一部（産出の成長率、インフレ率、金利など）です。観測変数のベクトルを $\mathbf{z}_t$ と書くと、それはモデルの変数の線形関数として

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{d} + \mathbf{H}\mathbf{s}_t + (\text{測定誤差})$$

と表せます（$\mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{s}_t$ なので、ジャンプ変数の観測も状態で書けます）。これを**観測方程式**と呼びます。遷移方程式(5.11)と観測方程式の組が、カルマンフィルタの出発点です。

要点：この章のまとめ

- 線形DSGEモデルは $\mathbf{A}E_t\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{B}\mathbf{X}_t$ の形に書ける。解とは、発散しない経路のことである。
- 発散しない解がただ一つ存在するための条件は、**安定な固有値の数が先決変数の数に等しい**こと（ブランシャール＝カーン条件）である。RBCモデルの鞍点経路はその最も簡単な例である。
- $\mathbf{A}$ は静的な式のために正則でないことが多い。QZ分解を使えば、そのまま解ける。無限大の固有値は不安定な側に数える。
- 中規模モデルでも、決定性の境界はほぼ $\phi_\pi = 1$ であり、テイラー原理は頑健に成り立つ（第I部のパラメータ値のもとで）。
- 解は状態空間表現 $\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{s}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$、$\mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{s}_t$ にまとめられ、インパルス応答や分散は行列の計算で求まる。

5.8　練習問題

問1　スカラーのモデル $x_t = a\,E_t x_{t+1} + b\,x_{t-1}$ を、$\mathbf{X}_t = (x_{t-1},\, x_t)'$ として $E_t\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_t$ の形に書き、$\mathbf{M}$ の特性方程式が(5.10)に一致することを確かめてください（$a \neq 0$ とします）。

問2　問1のモデルで $a = 0.5$、$b = 0.4$ のとき、解は一意に決まりますか。$a = 0.5$、$b = 0.6$ のときはどうでしょうか。

問3　RBCモデル(5.4)で、資本減耗率を $\delta = 0.025$ から $\delta = 0.1$ に上げると、安定な固有値 λ_1 はどう変わると予想されますか。経済学的な意味も考えてください。

補足：解答

問1　1行目は恒等式 $x_t = x_t$、2行目は元の式を $E_t x_{t+1} = \frac{1}{a}x_t - \frac{b}{a}x_{t-1}$ と書き直したものなので、$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b/a & 1/a \end{pmatrix}$ です。特性方程式は $\lambda^2 - \frac{1}{a}\lambda + \frac{b}{a} = 0$ で、両辺に a を掛けると $a\lambda^2 - \lambda + b = 0$、すなわち(5.10)と同じ形になります。

問2　$a = 0.5$、$b = 0.4$ では $0.5p^2 - p + 0.4 = 0$ の根は $p = 1 \pm \sqrt{0.2}$、すなわち約0.553と約1.447です。安定な根が一つ（先決変数 x_{t-1} の数と同じ）なので、解は $x_t = 0.553\, x_{t-1}$ と一意に決まります。$b = 0.6$ では判別式 $1 - 4 \times 0.5 \times 0.6 = -0.2 < 0$ で根は複素数になり、絶対値は $\sqrt{b/a} = \sqrt{1.2} > 1$ です。安定な根がなく、発散しない解は（$x_{-1} = 0$ の場合を除いて）存在しません。

問3　数値で計算すると、λ_1 は約0.962から約0.882に下がります。命題5.5より、資本の乖離は毎期 λ_1 倍に縮んでいくので、乖離が半分になるまでの期間（半減期 $\ln 0.5 / \ln \lambda_1$）は約18四半期から約5.5四半期に短くなります。減耗率が高い経済では、毎期の投資が資本ストックに占める割合が大きいので、資本の水準を速く調整できる、ということです。なお β を0.98から0.999に動かしても λ_1 は0.953から0.970へと少し動くだけで、調整速度を主に決めているのは減耗率のほうです。

第III部へ　第II部では、中規模モデルを解いて、状態空間表現を得ました。パラメータの値さえ与えれば、モデルの動きは完全に計算できます。では、そのパラメータの値はどう決めればよいのでしょうか。第III部では、観測方程式を通じてモデルをデータと結びつけ（第6章）、カルマンフィルタで尤度を計算し（第7章）、ベイズ推定でパラメータを推定します（第8章）。

第III部

データで推定する

第6章〜第8章

第III部のはじめに

第II部の終わりで、中規模DSGEモデルは状態空間表現

$$\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{s}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \qquad \mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{s}_t$$

にまとめられました。パラメータの値さえ与えれば、モデルの動きはすべて計算できます。

では、そのパラメータの値はどう決めればよいのでしょうか。第3章で見たように、定常状態に効くパラメータはデータの長期平均からカリブレーションできます。しかし、習慣形成 h、カルボ・パラメータ ω_p、金利ルールの係数といった動学のパラメータは、データの**時系列としての動き**から推定するしかありません。

第III部では、そのための道具を三段階で組み立てます。

第6章 モデルとデータをつなぐ
: どのデータを使い、どう変換し、モデルの変数とどう対応させるか（観測方程式）。そして、観測変数の数とショックの数の関係（確率的特異性）。

第7章 カルマンフィルタと尤度関数
: モデルの状態は直接観測できません。観測できるデータから状態を推し量りながら、「このパラメータのもとで、いま手元にあるデータが得られる確率」（尤度）を計算する方法。

第8章 ベイズ推定
: 尤度と事前の知識を組み合わせて、パラメータの事後分布を求める方法。

統計学の予備知識は仮定せず、第7章では正規分布の性質から、第8章ではベイズの定理から説明します。第8章の終わりでは、真のパラメータが分かっている人工データを使って中規模モデルを実際に推定し、ここまでの道具が本当に働くことを確かめます。

第6章

モデルとデータをつなぐ

> **ここまでの流れ**　第II部で、モデルを状態空間表現に直しました。モデルの変数は、定常状態からの乖離として定義されています。
> **この章の問い**　一方、実際のデータは成長し、単位もまちまちで、モデルの変数と同じ形はしていません。両者をどう対応させればよいのでしょうか。また、何本のデータを使ってよいのでしょうか。
> **この章で分かること**　観測変数の選び方とデータの変換。観測方程式の書き方。観測変数の数がショックの数を超えると尤度が計算できなくなること（確率的特異性）と、その対処法。

6.1　何を観測するか

DSGEモデルには多くの変数がありますが、データとして手に入るものは限られています。トービンの q、限界費用、限界代替率は直接は観測できません。推定では、モデルの変数のうち**データと対応がつく少数の変数**を選び、それを観測変数とします。

Smets and Wouters (2007) は、米国の四半期データから次の7系列を使いました。本書の中規模モデルも、これに合わせて設計されています（第2章でショックを7つ置いたのはこのためでした）。

観測変数	データの例	変換
産出の成長率	実質GDP	人口1人当たり、対数階差
消費の成長率	実質個人消費	人口1人当たり、対数階差
投資の成長率	実質固定投資	人口1人当たり、対数階差
実質賃金の成長率	時間当たり名目賃金をGDPデフレーターで実質化	対数階差
労働時間	1人当たり総労働時間	対数
インフレ率	GDPデフレーターの変化率	対数階差
名目金利	短期の政策金利	四半期の率に換算

数式の読み方：変換の考え方

- **1人当たりにする**：モデルの家計は代表的家計なので、人口の増加による成長は取り除きます。
- **対数をとって階差をとる**：$100 \times (\ln Y_t - \ln Y_{t-1})$ は、前期比の成長率（%）とほぼ同じです。成長しているデータも、成長率にすれば平均の周りを変動する系列になります。
- **単位をそろえる**：モデルは四半期なので、年率で公表されている金利は4で割って四半期の率にします。インフレ率も四半期の変化率にします。

6.2　トレンドをどう扱うか

成長しているデータを、定常化されたモデルとどう対応させるかには、大きく二つの考え方があります。

データの側でトレンドを除く　データをあらかじめHPフィルターなどで処理し、トレンドからの乖離（循環成分）だけを取り出してモデルと比べる方法です。RBCのカリブレーション研究では標準的でした。ただし、フィルターが人工的な循環を作り出すことがあるなど、問題点も指摘されています（Hamilton, 2018）。また、フィルターで取り除いたトレンドが、モデルの中のどの仮定に対応するのかが曖昧になります。

モデルの側でトレンドを持つ　第3章で見たように、モデルに成長率 γ の技術進歩を入れて定常化しておき、**成長率のデータとモデルの成長率を直接対応させる**方法です。Smets and Wouters (2007) はこの方法をとり、現在のDSGEモデルの推定ではこちらが標準です。本章

でもこの方法を説明します。

6.3　観測方程式

6.3.1　1本ずつ書く

第3章の成長のある経済では、産出 Y_t は $Z_t = \gamma^t$ に比例して成長し、定常化した変数 $y_t = Y_t/Z_t$ が定常状態の周りを変動していました。したがって

$$\ln Y_t - \ln Y_{t-1} = \ln \gamma + (\ln y_t - \ln y_{t-1}) = \ln \gamma + \hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}$$

が成り立ちます。データの成長率（%）を dy_t^{obs}、定常状態の成長率を $\bar{\gamma} \equiv 100 \ln \gamma$ と書けば、

$$dy_t^{\text{obs}} = \bar{\gamma} + 100\,(\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}) \tag{6.1}$$

です。モデルの変数はパーセントの単位で定義しておけば、100は省けます。以下ではそうします。消費・投資・実質賃金の成長率も同じ形になります。均斉成長経路ではどれも同じ率 γ で成長するので、定数項は共通の $\bar{\gamma}$ です。

残りの3本は、成長しない変数の水準です。

$$l_t^{\text{obs}} = \bar{l} + \hat{n}_t \tag{6.2}$$

$$\pi_t^{\text{obs}} = \bar{\pi} + \pi_t \tag{6.3}$$

$$r_t^{\text{obs}} = \bar{r} + \hat{\imath}_t \tag{6.4}$$

$\bar{l}$、$\bar{\pi}$、$\bar{r}$ は、それぞれ労働時間・インフレ率・金利の定常値です。

数式の読み方：定数項にも経済学が入っている

定数項は、単にデータの平均を合わせるためのものではありません。第3章の結果を思い出すと、成長のある経済の定常状態の実質金利は γ^σ/β でした。したがって

$$\bar{r} \simeq \bar{\pi} + 100\left(\frac{\gamma^\sigma}{\beta} - 1\right)$$

という関係が成り立ちます。金利・インフレ率・成長率のデータの平均が、β と σ についての情報をもっているのです。推定では、$\bar{\gamma}$、$\bar{\pi}$、$\bar{l}$ と構造パラメータを推定し、$\bar{r}$ はこの関係から計算する、という扱い方がよくとられます。

6.3.2　行列の形に書く

観測方程式を、第II部の状態空間表現に合わせて行列の形に書きます。ここで一つ注意が要ります。(6.1)には前期の産出 $\hat{y}_{t-1}$ が入っていますが、第5章で用意した状態変数には $\hat{y}_{t-1}$ が

ありませんでした。そこで、恒等式 $\hat{y}_{t+1}^{\text{lag}} = \hat{y}_t$ を加えて状態変数を一つ増やします。消費・投資・実質賃金の前期の値は、習慣形成・調整費用・賃金の定義式のためにすでに状態変数に入っています。

こうすると、観測変数のベクトル $\mathbf{z}_t = (dy_t^{\text{obs}},\ dc_t^{\text{obs}},\ dI_t^{\text{obs}},\ dw_t^{\text{obs}},\ l_t^{\text{obs}},\ \pi_t^{\text{obs}},\ r_t^{\text{obs}})'$ は、ジャンプ変数 $\mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{s}_t$ と状態変数の線形結合として

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{d} + \mathbf{H}\mathbf{s}_t + \mathbf{u}_t \tag{6.5}$$

と書けます。$\mathbf{d} = (\bar{\gamma}, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}, \bar{l}, \bar{\pi}, \bar{r})'$ は定数項、$\mathbf{u}_t$ は後で説明する測定誤差です。$\mathbf{H}$ の各行は、たとえば産出の成長率なら「$\hat{y}_t$ を状態で表した $\mathbf{F}$ の行」から「$\hat{y}_{t-1}$ を取り出す行」を引いたものです。

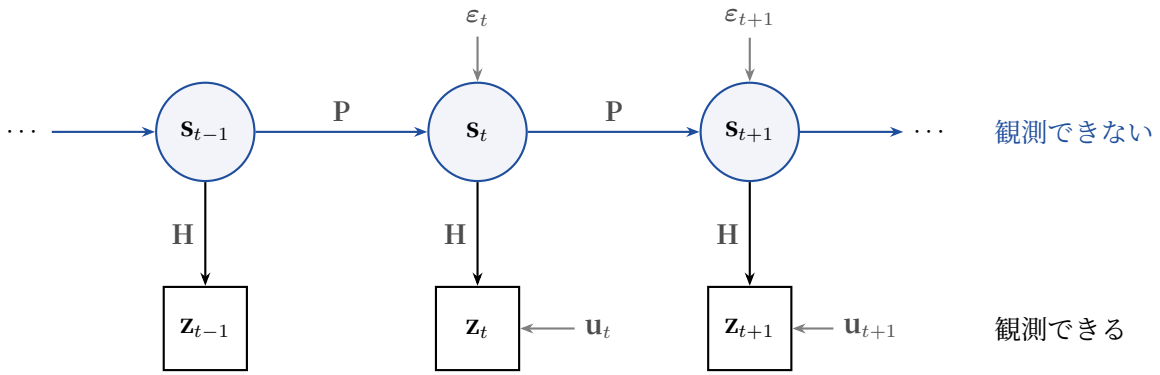
要点：線形状態空間モデル

遷移方程式と観測方程式の組

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{t+1} &= \mathbf{P}\mathbf{s}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, & \boldsymbol{\varepsilon}_t &\sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}) \\ \mathbf{z}_t &= \mathbf{d} + \mathbf{H}\mathbf{s}_t + \mathbf{u}_t, & \mathbf{u}_t &\sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_u) \end{aligned}$$

を**線形状態空間モデル**と呼びます。行列 $\mathbf{P}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{d}$、$\boldsymbol{\Omega}$ は、すべて構造パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の関数です。状態 $\mathbf{s}_t$ は観測できず、観測できるのは $\mathbf{z}_t$ だけです。
推定の問題とは、観測された $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_T$ から $\boldsymbol{\theta}$ を推し量ることです。

図 6.1　線形状態空間モデルの構造



青い丸が観測できない状態、四角が観測できるデータ。状態はショック $\boldsymbol{\varepsilon}$ を受けながら $\mathbf{P}$ に従って動き、データは状態を $\mathbf{H}$ で写したものに測定誤差 $\mathbf{u}$ が加わったものとして観測される。

6.4　確率的特異性

6.4.1　観測変数を増やせばよいわけではない

データは多いほど情報が増えるので、観測変数はできるだけ多く使いたくなります。ところが、DSGEモデルでは**観測変数の数を、ショックの数（と測定誤差の数の和）より多くすることはできません**。

命題 6.1 (確率的特異性)　測定誤差がない（$\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$）とする。観測変数の数を m、ショックの数を k とし、$m > k$ とする。このとき、各期のショックが観測変数にもたらす変動 $\mathbf{HR}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ の分散共分散行列 $\mathbf{HR}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}'\mathbf{H}'$ は特異である。とくに、前期の状態 $\mathbf{s}_{t-1}$ が過去のデータから分かっている場合には、$\mathbf{z}_t$ の条件付き分布は m 次元空間の中の高々 k 次元の部分空間に退化し、条件付き密度は存在しない。

証明. $\mathbf{HR}$ は $m \times k$ 行列なので、その階数は高々 k である。したがって $m \times m$ 行列 $\mathbf{HR}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}'\mathbf{H}'$ の階数も高々 $k < m$ であり、特異である。次に、$\mathbf{s}_t = \mathbf{P}\mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ より

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{d} + \mathbf{HP}\mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{HR}\boldsymbol{\varepsilon}_t$$

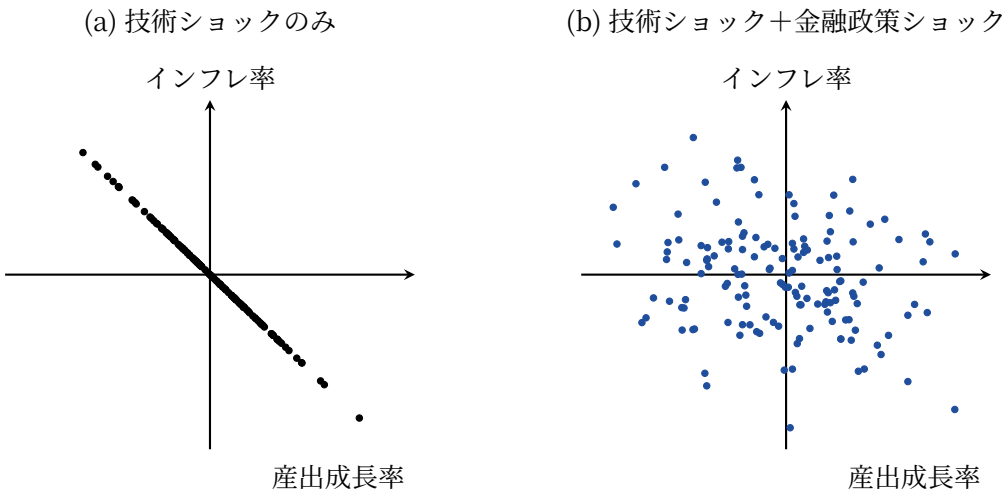
である。$\mathbf{s}_{t-1}$ が分かっていれば第2項までは定数であり、$\mathbf{z}_t$ の不確実性は第3項だけから生じる。その値は $\mathbf{HR}$ の列ベクトルが張る高々 k 次元の部分空間に必ず入るので、条件付き分散共分散行列は特異となる。正規分布の密度は分散共分散行列の逆行列を含むので、この場合には定義できない。　□

状態が過去のデータから完全には分からない場合でも、多くのモデルでは時間がたつにつれて状態の推定の不確実性が小さくなり、予測誤差の分散は特異な行列に近づいていきます。その結果、対数尤度は計算できないか、きわめて不安定になります（第7章の練習問題3）。

数式の読み方：直感的な意味

ショックが1つしかないモデルで、産出の成長率とインフレ率の2本を観測するとします。毎期の「予想外の変化」はすべて同じ1つのショックから生じるので、産出の予想外の変化とインフレ率の予想外の変化は、**常に一定の比率で**動きます。モデルは「両者の予想外の変化は必ずこの直線の上に乗る」と主張していることになります。
現実のデータが正確にその直線上に乗ることはまずありません。直線から少しでも外れたデータが得られる確率は、モデルの下ではゼロです。したがって尤度はゼロ（対数尤度はマイナス無限大）になり、推定ができなくなります。

図 6.2　予測誤差の散布図：ショックが1つの場合と2つの場合



中規模モデルから150期分のショックを発生させ、産出成長率とインフレ率の1期先の予測誤差（HRε_t）を描いた。

図の読み方

- (a) ショックが1つだと、2つの観測変数の予測誤差はすべて**1本の直線の上**に並びます。技術ショックは産出を増やしインフレ率を下げるので、直線は右下がりです。
- (b) 金融政策ショックを加えると、点は平面に散らばります。金融政策ショックは産出とインフレ率を同じ方向に動かすので、(a)とは異なる方向の変動が加わるからです。
- 2本の観測変数に対してショックが2つあれば、どんな組み合わせの予測誤差も説明できます。これが「観測変数の数 $\leq$ ショックの数」という条件の意味です。

6.4.2　三つの対処法

確率的特異性を避けるには、次のどれか（または組み合わせ）をとります。

ショックを増やす

観測変数と同じ数だけ構造ショックを置きます。Smets and Wouters (2007) の方法で、本書のモデルもこれに従っています。各ショックに経済学的な解釈を与えられるのが利点ですが、「データに合わせるためにショックを足している」という批判もあります。

測定誤差を加える

観測方程式に測定誤差 $\mathbf{u}_t$ を加えます。データそのものに誤差があるという解釈は自然ですが、測定誤差の分散が大きく推定されると、「モデルで説明できない部分を測定誤差に押しつけている」ことになります。

観測変数を減らす

ショックの数以下に観測変数を絞ります。ただし、どの変数を使うかで推定結果が変わりうることが知られています。

補足：ショックが観測変数と同数でも安心はできない

ショックの数と観測変数の数が等しくても、個々のショックがどの観測変数の動きで識別されるかは別問題です。たとえば、選好ショックと投資固有の技術ショックが、データ上ほとんど同じ動きを生むなら、両者を区別するのは難しくなります。この識別の問題は第8章で扱います。

6.5　モデルとデータのずれ

観測方程式を書くと、モデルとデータの間のずれがはっきり見えてきます。代表的なものを挙げておきます。

成長率の違い　モデルの均斉成長経路では、産出・消費・投資は同じ率で成長します。しかし米国のデータでは、実質投資は実質消費より速く成長してきました。投資財の相対価格が長期的に下がってきたためです。この違いを扱うには、投資固有の技術が趨勢的に成長するモデルにするか、名目の比率を使うなどの工夫が必要です。

労働時間の非定常性　モデルでは1人当たり労働時間は定常ですが、データでは長期的な低下や人口構成の変化による動きがあります。労働時間の水準をそのまま使うか、階差をとるかで、推定結果が変わることがあります。

平均インフレ率の変化　モデルは定常状態のインフレ率を一定としていますが、米国の1970年代のように平均インフレ率そのものが大きく動いた時期があります。推定期間の選び方は、こうした構造変化を意識して決める必要があります。

ゼロ金利制約　金利がゼロ近くに張り付いた時期には、線形の金利ルールが成り立ちません。その時期の金利データをそのまま使うと、モデルの仮定と矛盾します。この問題は第V部で扱います。

要点：この章のまとめ

- 推定では、モデルの変数のうちデータと対応のつくものを観測変数として選ぶ。成長するデータは1人当たり・対数階差に変換し、モデルの成長率と対応させるのが標準的である。
- 観測方程式 $\mathbf{z}_t = \mathbf{d} + \mathbf{H}\mathbf{s}_t + \mathbf{u}_t$ と遷移方程式の組が線形状態空間モデルである。定数項にも構造パラメータの情報が含まれる。
- 観測変数の数がショックと測定誤差の数を上回ると、予測誤差の分散が特異になり尤度が計算できない（確率的特異性）。
- モデルとデータの間には、成長率の違い、労働時間の非定常性、構造変化などのずれがあり、観測変数の選び方と変換に注意が要る。

次の章へ　観測方程式によって、モデルとデータが結びつきました。しかし、状態 $\mathbf{s}_t$ は観測できません。観測できない状態をもつモデルについて、データが得られる確率（尤度）をどうやって計算するのか。それが次章の主題です。

第7章

カルマンフィルタと尤度関数

> **ここまでの流れ**　第6章で、モデルを線形状態空間モデルの形に書きました。状態は観測できず、データは状態を写したものとして観測されます。
> **この章の問い**　パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ が与えられたとき、手元のデータがそのモデルから生まれる確率は、どうすれば計算できるでしょうか。観測できない状態は、どう扱えばよいのでしょうか。
> **この章で分かること**　尤度の考え方と予測誤差分解。正規分布の条件付き分布の公式。カルマンフィルタの導出と直感。中規模モデルで尤度がパラメータの真の値の近くで最大になることの確認。そして、過去にさかのぼって状態を推定するカルマン平滑化。

7.1　尤度とは何か

7.1.1　確率と尤度

パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ をもつモデルが、データ $\mathbf{Z}_T \equiv (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_T)$ を生み出す確率密度を $p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta})$ と書きます。

定義 7.1 (尤度関数)　データ $\mathbf{Z}_T$ を観測された値に固定し、$p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta})$ をパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の関数とみなしたものを**尤度関数**と呼び、$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ と書く。その対数 $\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ を対数尤度と呼ぶ。

式としては確率密度と同じものですが、見る向きが逆です。確率密度は「パラメータを固定して、どんなデータが出やすいか」を表します。尤度は「データを固定して、どんなパラメータならこのデータが出やすかったか」を表します。尤度が高いパラメータほど、実際に観測されたデータをよく説明する、と考えるのです。尤度を最大にするパラメータを選ぶのが**最尤法**、尤度と事前の知識を組み合わせるのが第8章の**ベイズ推定**です。どちらにしても、尤度を計算できなければ始まりません。

7.1.2　予測誤差分解

時系列データの密度は、条件付き密度の積に分解できます。確率の乗法定理を繰り返し使うと

$$p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^{T} p(\mathbf{z}_t \mid \mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}) \tag{7.1}$$

です（$\mathbf{Z}_0$ は空集合とします）。各項は「それまでのデータを知ったうえで、今期のデータがどれだけ予想どおりだったか」を表しています。

問題は、この条件付き密度をどう計算するかです。もし状態 $\mathbf{s}_t$ が観測できれば簡単ですが、観測できるのは $\mathbf{z}_t$ だけです。そこで、**過去のデータから状態を推し量り、その推測を使って今期のデータを予想する**という手順が必要になります。これを効率よく行うのがカルマンフィルタです。

補足：天気予報のたとえ

気象予報士は、大気の状態（気圧配置や水蒸気量の分布）を直接すべて観測することはできません。手元にあるのは、各地の観測所のデータだけです。予報士は、昨日までの観測から推定した大気の状態をもとに今日のデータを予想し、実際の観測と照らし合わせて予想のずれを見て、大気の状態の推定を修正します。そして修正した状態から明日を予想します。

カルマンフィルタは、この「予想 → 観測 → 修正 → 予想」のサイクルを、正規分布の性質を使って最適に行う方法です。

7.2　統計の準備：正規分布の性質

カルマンフィルタは、すべての確率変数が正規分布に従うことを利用します。必要な性質を確認しておきます。

7.2.1　多変量正規分布

n 次元の確率変数ベクトル $\mathbf{x}$ が、平均 $\boldsymbol{\mu}$、分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$（正定値）の多変量正規分布に従うとき、$\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ と書き、その密度は

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \, |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\!\left\{ -\tfrac{1}{2} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \right\} \tag{7.2}$$

です。$|\boldsymbol{\Sigma}|$ は行列式です。第6章の確率的特異性で、$\boldsymbol{\Sigma}$ が特異だと密度が定義できないと述べたのは、この式に $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ と $|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}$ が含まれるからです。

正規分布には、次の二つの重要な性質があります。

- **線形変換しても正規分布**：$\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ なら、$\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{x} \sim N(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}')$。
- **条件付き分布も正規分布**：次の補題。

7.2.2 条件付き分布の公式

補題 7.2 (正規分布の条件付き分布)　確率変数ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ が同時に正規分布に従い、

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_x\\ \boldsymbol{\mu}_z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xz}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{zx} & \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\end{pmatrix}\right)$$

であるとする（$\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ は正則）。このとき、$\mathbf{z}$ を観測したもとでの $\mathbf{x}$ の条件付き分布は正規分布で、

$$E[\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\Sigma}_{xz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_z) \tag{7.3}$$

$$\mathrm{Var}[\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] = \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{zx} \tag{7.4}$$

である。

証明. $\mathbf{B} \equiv \boldsymbol{\Sigma}_{xz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$ とおき、$\mathbf{e} \equiv (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) - \mathbf{B}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_z)$ を定義する。$\mathbf{e}$ は $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ の線形変換なので正規分布に従い、平均はゼロである。$\mathbf{e}$ と $\mathbf{z}$ の共分散は

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{e}, \mathbf{z}) = \boldsymbol{\Sigma}_{xz} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = \mathbf{0}$$

である。同時正規分布では無相関は独立を意味するので、$\mathbf{e}$ は $\mathbf{z}$ と独立である。よって $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{B}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_z) + \mathbf{e}$ において、$\mathbf{z}$ を与えたもとでの条件付き分布は、第2項までを定数とし、$\mathbf{e}$ の分布をそのまま加えたものになる。平均は(7.3)、分散は

$$\mathrm{Var}(\mathbf{e}) = \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{zx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xz}\mathbf{B}' + \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\mathbf{B}' = \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{zx}$$

となり、(7.4)を得る。 □

数式の読み方：補題の読み方

- (7.3)は、$\mathbf{z}$ を観測する前の予想 $\boldsymbol{\mu}_x$ を、$\mathbf{z}$ の**予想外の部分** $\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_z$ に応じて修正する式です。修正の度合い $\boldsymbol{\Sigma}_{xz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$ は、$\mathbf{x}$ を $\mathbf{z}$ に回帰したときの回帰係数そのものです。
- (7.4)は、$\mathbf{z}$ を観測したことで $\mathbf{x}$ についての不確実性が**減る**ことを示しています。減り方は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ の共分散が大きいほど大きくなります。
- 条件付き分散は $\mathbf{z}$ の実現値に依存しません。これは正規分布に特有の性質で、カルマンフィルタの計算を大幅に簡単にします。

7.3 1変数で考える

一般の場合に進む前に、最も簡単な例でカルマンフィルタの仕組みを見ておきます。

観測できない状態 s_t が1次の自己回帰過程に従い、それに測定誤差が加わったものが観測されるとします。

$$s_t = \rho\, s_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2); \qquad z_t = s_t + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$$

$t-1$ 期までのデータで推測した s_{t-1} の分布を $N(\hat{s}_{t-1|t-1},\, \Sigma_{t-1|t-1})$ とします。

予想の段階　t 期のデータを見る前の s_t の予想は、遷移方程式から

$$\hat{s}_{t|t-1} = \rho\, \hat{s}_{t-1|t-1}, \qquad \Sigma_{t|t-1} = \rho^2 \Sigma_{t-1|t-1} + \sigma_\varepsilon^2$$

です。新しいショックが加わる分だけ、不確実性は増えます。データの予想は $\hat{z}_{t|t-1} = \hat{s}_{t|t-1}$、その分散は $G_t = \Sigma_{t|t-1} + \sigma_u^2$ です。

修正の段階　データ z_t を観測したら、補題7.2で $x = s_t$、$z = z_t$ とおきます。s_t と z_t の共分散は $\Sigma_{t|t-1}$ なので

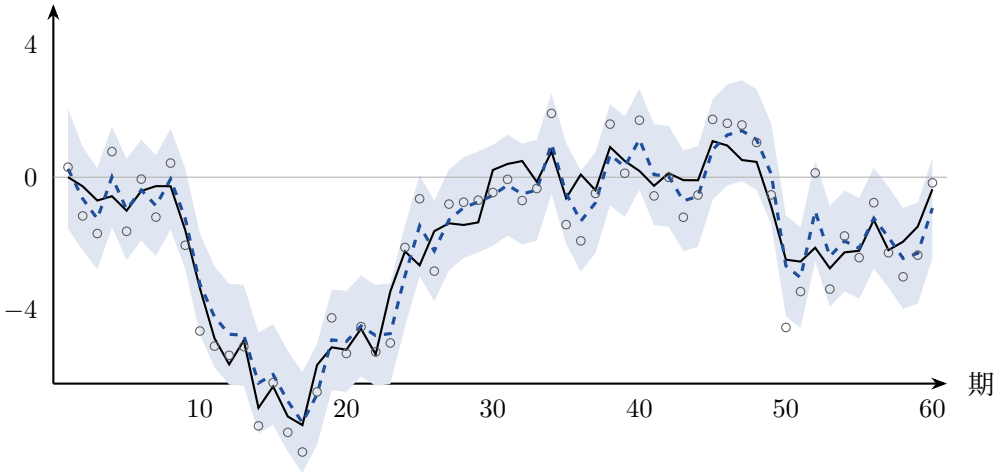
$$\hat{s}_{t|t} = \hat{s}_{t|t-1} + K_t\,(z_t - \hat{s}_{t|t-1}), \qquad K_t = \frac{\Sigma_{t|t-1}}{\Sigma_{t|t-1} + \sigma_u^2}, \qquad \Sigma_{t|t} = (1 - K_t)\,\Sigma_{t|t-1} \tag{7.5}$$

です。K_t を**カルマン・ゲイン**と呼びます。

数式の読み方：カルマン・ゲインの意味

- 修正後の推定 $\hat{s}_{t|t}$ は、予想 $\hat{s}_{t|t-1}$ と観測 z_t の加重平均です（$\hat{s}_{t|t} = (1-K_t)\hat{s}_{t|t-1} + K_t z_t$）。
- 重み K_t は0と1の間にあり、**予想の不確実性** $\Sigma_{t|t-1}$ と**観測の不確実性** σ_u^2 の比で決まります。観測が正確なら（$\sigma_u^2 \to 0$）$K_t \to 1$ で観測をそのまま信じ、観測が不正確なら $K_t \to 0$ で予想を信じます。
- 情報を正しく重みづけて組み合わせているので、修正後の分散 $(1 - K_t)\Sigma_{t|t-1}$ は、予想の分散よりも観測の誤差の分散よりも小さくなります。

図 7.1　カルマンフィルタによる状態の推定（1変数の例）



$\rho = 0.9$、$\sigma_\varepsilon = \sigma_u = 1$ として60期分を発生させた。黒の実線が真の状態 s_t（観測できない）、白丸が観測 z_t、青の破線がフィルタによる推定 $\hat{s}_{t|t}$、薄い青の帯がその95%区間（$\pm 1.96\sqrt{\Sigma_{t|t}}$）。

図の読み方

- 観測（白丸）は真の状態（実線）の周りに大きくばらついていますが、フィルタの推定（破線）は真の状態をかなりよく追っています。過去の観測から得た予想と今期の観測を、適切に組み合わせているからです。
- 推定は観測ほど激しく上下しません。観測が大きく跳ねても、それが測定誤差によるものか状態の変化によるものかを区別できないので、半分強だけ信じて修正するからです。
- 帯の幅はすぐに一定になります。カルマン・ゲインは最初の数期で約0.60に収束し、その後は変わりません（練習問題1）。この例のように係数が時間を通じて一定のモデルでは、ゲインも分散も一定値に収束します。

7.4　一般のカルマンフィルタ

1変数の例と同じ考え方を、第6章の線形状態空間モデルに当てはめます。表記を簡単にするため、観測方程式の定数項 $\mathbf{d}$ は差し引いておくとします。

命題 7.3 (カルマンフィルタ)　線形状態空間モデル

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{P}\mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \mathbf{z}_t = \mathbf{H}\mathbf{s}_t + \mathbf{u}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}),\ \mathbf{u}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_u)$$

において、$\mathbf{s}_{t-1} \mid \mathbf{Z}_{t-1} \sim N(\hat{\mathbf{s}}_{t-1|t-1},\ \boldsymbol{\Sigma}_{t-1|t-1})$ とする。このとき次が成り立つ。

予想：$\mathbf{s}_t \mid \mathbf{Z}_{t-1} \sim N(\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1})$、ここで

$$\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{s}}_{t-1|t-1}, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}_{t-1|t-1}\mathbf{P}' + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}'. \tag{7.6}$$

データの予想：$\mathbf{z}_t \mid \mathbf{Z}_{t-1} \sim N(\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1},\, \mathbf{G}_t)$、ここで

$$\boldsymbol{\nu}_t \equiv \mathbf{z}_t - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1}, \qquad \mathbf{G}_t = \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}\mathbf{H}' + \boldsymbol{\Sigma}_u. \tag{7.7}$$

修正：$\mathbf{s}_t \mid \mathbf{Z}_t \sim N(\hat{\mathbf{s}}_{t|t}, \boldsymbol{\Sigma}_{t|t})$、ここで

$$\hat{\mathbf{s}}_{t|t} = \hat{\mathbf{s}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t\boldsymbol{\nu}_t, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{t|t} = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}, \qquad \mathbf{K}_t = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}\mathbf{H}'\mathbf{G}_t^{-1}. \tag{7.8}$$

証明. **予想**：$\mathbf{s}_t = \mathbf{P}\mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ は、$\mathbf{Z}_{t-1}$ を条件として正規分布に従う $\mathbf{s}_{t-1}$ と、それと独立な正規分布の $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ の線形変換なので、正規分布に従う。平均と分散は線形変換の公式から(7.6)となる。

データの予想：同様に $\mathbf{z}_t = \mathbf{H}\mathbf{s}_t + \mathbf{u}_t$ は、$\mathbf{Z}_{t-1}$ のもとで正規分布に従い、平均 $\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1}$、分散 $\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}\mathbf{H}' + \boldsymbol{\Sigma}_u$ をもつ。

修正：$\mathbf{Z}_{t-1}$ のもとで $(\mathbf{s}_t, \mathbf{z}_t)$ は同時に正規分布に従い、その共分散は $\operatorname{Cov}(\mathbf{s}_t, \mathbf{H}\mathbf{s}_t + \mathbf{u}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}\mathbf{H}'$ である。$\mathbf{Z}_t$ を条件とすることは、$\mathbf{Z}_{t-1}$ に加えて $\mathbf{z}_t$ を条件とすることなので、補題7.2を $\mathbf{x} = \mathbf{s}_t$、$\mathbf{z} = \mathbf{z}_t$ として適用すれば(7.8)を得る。 □

要点：カルマンフィルタの1サイクル

1. **予想**：前期の推定を遷移方程式で1期進め、状態の予想とその不確実性を計算する。
2. **比較**：状態の予想からデータを予想し、実際のデータとの差（予測誤差 $\boldsymbol{\nu}_t$）を計算する。
3. **修正**：予測誤差にカルマン・ゲインを掛けて、状態の推定を修正する。

これを $t = 1, 2, \ldots, T$ と繰り返します。各期で使うのは前期の推定とその分散だけなので、データの期間が長くなっても計算量は期間に比例して増えるだけです。

7.5　尤度の計算

カルマンフィルタの副産物として、尤度が計算できます。予測誤差分解(7.1)の各項 $p(\mathbf{z}_t \mid \mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\theta})$ は、命題7.3の「データの予想」の正規分布の密度そのものだからです。

命題 7.4 (対数尤度)　線形状態空間モデルの対数尤度は

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\Bigl[m\ln(2\pi) + \ln|\mathbf{G}_t| + \boldsymbol{\nu}_t'\mathbf{G}_t^{-1}\boldsymbol{\nu}_t\Bigr] \tag{7.9}$$

で与えられる。m は観測変数の数、$\boldsymbol{\nu}_t$ と $\mathbf{G}_t$ はカルマンフィルタの予測誤差とその分散である。

証明. (7.1)の対数をとると $\ln \mathcal{L} = \sum_t \ln p(\mathbf{z}_t \mid \mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\theta})$ である。命題7.3より $\mathbf{z}_t \mid \mathbf{Z}_{t-1} \sim N(\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1}, \mathbf{G}_t)$ なので、多変量正規分布の密度(7.2)の対数をとれば各項が得られる。 □

数式の読み方：対数尤度の各項の意味

- $\boldsymbol{\nu}_t' \mathbf{G}_t^{-1} \boldsymbol{\nu}_t$ は、予測誤差の大きさを、モデルが予想していた不確実性で割ったものです。モデルの予想が外れるほど大きくなり、尤度を下げます。
- $\ln |\mathbf{G}_t|$ は、モデルが予想していた不確実性の大きさです。「何が起きてもおかしくない」と曖昧な予想をするモデルは、予測誤差の項では有利になりますが、この項で罰せられます。
- したがって尤度が高いモデルとは、**予想が鋭く、しかも当たる**モデルです。

初期値の決め方　フィルタを始めるには、$t = 1$ の予想 $\hat{\mathbf{s}}_{1|0}$ と $\boldsymbol{\Sigma}_{1|0}$ が必要です。データを見る前の状態についての最も自然な予想は、定常分布そのものです。モデルの変数は定常状態からの乖離なので $\hat{\mathbf{s}}_{1|0} = \mathbf{0}$ とし、分散には第5章の命題（リャプノフ方程式）で求めた無条件分散 $\boldsymbol{\Sigma}_s$ を使います。

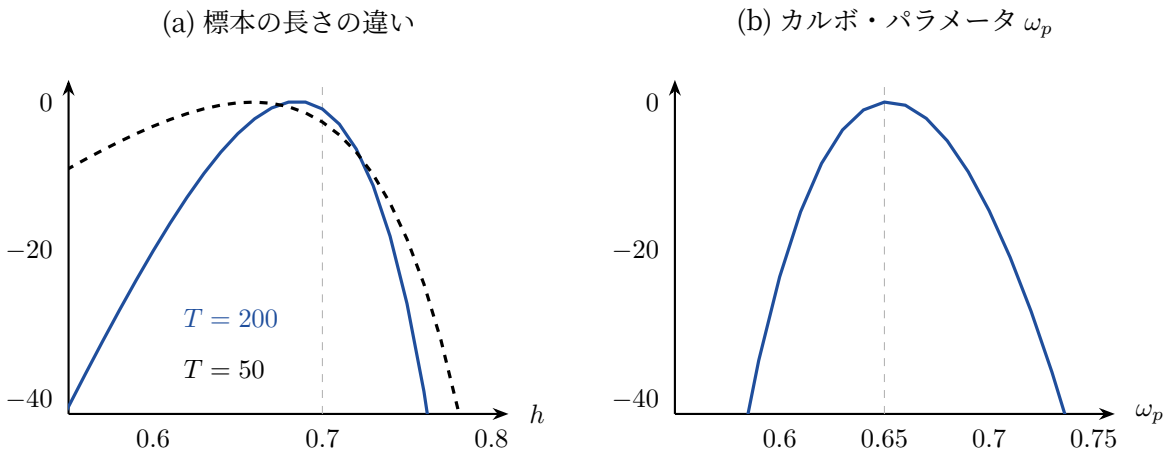
7.6　中規模モデルでの実験

カルマンフィルタと尤度が本当に役に立つのかを、中規模モデルで確かめてみます。実際のデータの代わりに、**真のパラメータが分かっている人工データ**を使います。第I部のパラメータ値のモデルから、7つのショックを発生させて200期（50年分）の7系列のデータを作り、それを「観測されたデータ」として扱います。

7.6.1　尤度はどこで最大になるか

他のパラメータは真の値に固定したまま、習慣形成のパラメータ h だけを動かして対数尤度を計算したのが次の図です。

図 7.2　習慣形成のパラメータ h と対数尤度



縦軸は対数尤度の最大値からの差。(a) の青の実線は $T = 200$、黒の破線は $T = 50$。灰色の破線は真の値（$h = 0.7$、$\omega_p = 0.65$）。他のパラメータは真の値に固定した。(b) は $T = 200$。

図の読み方

- (a) $T = 200$ のとき、対数尤度は $h = 0.69$ で最大になり、真の値0.7のすぐ近くです。尤度は、データを生み出したパラメータを確かに「見分けて」います。
- 標本が短い（$T = 50$）と、最大点は0.66とやや外れ、山もなだらかになります。データが少ないと、パラメータの値についての情報も少ないということです。山のとがり具合は、推定の精度を表しています。
- (b) カルボ・パラメータも、真の値0.65で尤度が最大になっています。山は非対称で、価格硬直性を強めに見積もる側（右側）より弱めに見積もる側で尤度が急に下がっています。

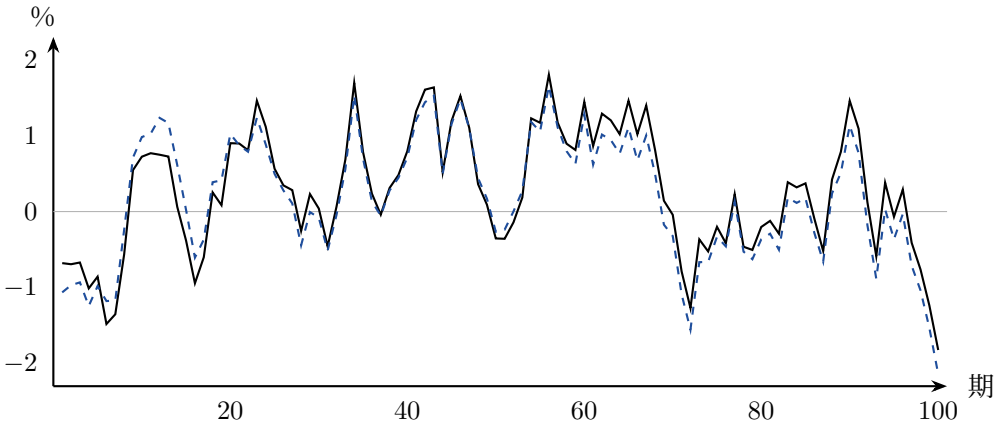
補足：一つずつ動かすことの限界

この図は、他のパラメータを真の値に固定した「断面」にすぎません。実際の推定では、すべてのパラメータを同時に動かします。そのとき、二つのパラメータの効果が似ていると、一方を上げて他方を下げても尤度がほとんど変わらない、ということが起こります。尤度の山が、ある方向に細長い尾根のようになるのです。これが**識別**の問題で、第8章でベイズ推定の事前分布がその対処の一つになることを見ます。

7.6.2　観測できないショックを推し量る

カルマンフィルタは、尤度を計算するだけでなく、観測できない状態の推定も与えます。技術ショック $\hat{a}_t$ は直接観測できない変数ですが、7本のデータからフィルタで推定してみます。

図 7.3　観測できない技術ショックのフィルタ推定



人工データの最初の100期。黒の実線が真の技術ショック、青の破線がフィルタによる推定 $\hat{a}_{t|t}$。

図の読み方

- 推定は真の値をほぼ重なるほどよく追っており、両者の相関係数は全200期で0.98です。技術ショックは産出・労働時間・実質賃金などに特徴的な動き（産出が増えてインフレ率が下がる）を残すので、データから逆算しやすいのです。
- この「データから観測できないショックを逆算する」機能は、第9章で、実際の景気変動を「どのショックがどれだけ動かしたか」に分解する（歴史分解）ときの基礎になります。

7.7　カルマン平滑化

カルマンフィルタの推定 $\hat{\mathbf{s}}_{t|t}$ は、t 期までのデータしか使っていません。リアルタイムで景気を判断するにはそれが自然ですが、過去を振り返って「あの時期に何が起きていたか」を知りたいなら、t 期より後のデータも使ったほうが精度が上がります。全期間のデータ $\mathbf{Z}_T$ を使った推定 $\hat{\mathbf{s}}_{t|T} \equiv E[\mathbf{s}_t \mid \mathbf{Z}_T]$ を求めるのが**カルマン平滑化**です。

命題 7.5 (平滑化の漸化式)　カルマンフィルタで得た $\hat{\mathbf{s}}_{t|t}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{t|t}$、$\hat{\mathbf{s}}_{t+1|t}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{t+1|t}$ を使い、$t = T-1, T-2, \ldots, 1$ と**後ろ向きに**

$$\hat{\mathbf{s}}_{t|T} = \hat{\mathbf{s}}_{t|t} + \mathbf{J}_t\big(\hat{\mathbf{s}}_{t+1|T} - \hat{\mathbf{s}}_{t+1|t}\big), \qquad \mathbf{J}_t = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t}\mathbf{P}'\boldsymbol{\Sigma}_{t+1|t}^{-1} \tag{7.10}$$

を計算すれば、$\hat{\mathbf{s}}_{t|T}$ が得られる。

証明の概略. $\mathbf{Z}_t$ のもとで $(\mathbf{s}_t, \mathbf{s}_{t+1})$ は同時正規分布に従い、$\mathrm{Cov}(\mathbf{s}_t, \mathbf{s}_{t+1} \mid \mathbf{Z}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t}\mathbf{P}'$ である。補題7.2より $E[\mathbf{s}_t \mid \mathbf{s}_{t+1}, \mathbf{Z}_t] = \hat{\mathbf{s}}_{t|t} + \mathbf{J}_t(\mathbf{s}_{t+1} - \hat{\mathbf{s}}_{t+1|t})$ である。マルコフ性により、$\mathbf{s}_{t+1}$ を知っていれば $t+1$ 期以降のデータは $\mathbf{s}_t$ について追加の情報をもたないので、この式は $\mathbf{Z}_T$ を条件としても成り立つ。両辺の $\mathbf{Z}_T$ についての条件付き期待値をとれば(7.10)を得る。　□

フィルタが「前向きに」データを取り込むのに対し、平滑化は最終期から「後ろ向きに」将来の情報を取り込んで推定を修正していきます。最終期 T では両者は一致します。第9章の歴史分解では、平滑化された推定からショックを復元して使います。

7.8　実務上の注意

数値的な安定性

$\boldsymbol{\Sigma}_{t|t}$ は理論上は対称で正定値ですが、計算の丸め誤差でその性質が崩れることがあります。毎期 $(\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{\Sigma}')/2$ で対称化したり、修正の式を数値的に安定な形に書き換えたりする工夫がとられます。

定常カルマン・ゲイン

1変数の例で見たように、係数が一定のモデルではゲインと分散は一定値に収束します。収束後はその値を使い続けることで、計算を節約できます。

欠損値

ある期のある変数が欠けていても、その期の観測方程式からその行を除くだけで、フィルタはそのまま動きます。発表頻度の異なるデータを組み合わせる際にも使える性質です。

正規性と線形性

カルマンフィルタが最適な推定を与えるのは、モデルが線形で、ショックが正規分布に従うときです。非線形のモデルや、正規分布でないショックを扱うには、粒子フィルタなどの別の方法が必要になります（第V部）。

要点：この章のまとめ

- 尤度は「データを固定してパラメータの関数とみた確率密度」であり、予測誤差分解により1期先の条件付き密度の積に分解できる。
- 正規分布の条件付き分布の公式（補題7.2）から、カルマンフィルタの「予想・比較・修正」の漸化式が導かれる。カルマン・ゲインは、予想と観測の不確実性の比で重みを決める。
- 対数尤度は予測誤差とその分散から計算できる。尤度が高いのは、予想が鋭く、しかも当たるパラメータである。
- 人工データの実験では、尤度は真のパラメータの近くで最大になり、観測できないショックもよく推定できた。
- 全期間のデータを使って過去の状態を推定するのがカルマン平滑化である。

7.9 練習問題

問1　1変数の例（$\rho = 0.9$、$\sigma_\varepsilon = \sigma_u = 1$）で、予想の分散が一定値 $p \equiv \Sigma_{t|t-1}$ に収束するとき、p が満たす方程式を書き、カルマン・ゲインの収束値を求めてください。

問2　1変数の例で、測定誤差がない（$\sigma_u = 0$）とき、カルマン・ゲインと修正後の分散はいくらになりますか。その意味を説明してください。

問3　対数尤度(7.9)で、予測誤差の分散 $\mathbf{G}_t$ が特異に近づくと何が起きるかを、第6章の確率的特異性と関連づけて説明してください。

補足：解答

問1　収束したとき、修正後の分散は $(1-K)p = p\sigma_u^2/(p+\sigma_u^2)$ であり、それを1期進めると再び p に戻るので、

$$p = \rho^2 \frac{p\,\sigma_u^2}{p+\sigma_u^2} + \sigma_\varepsilon^2$$

です。$\sigma_u = \sigma_\varepsilon = 1$、$\rho^2 = 0.81$ を代入して整理すると $p^2 - 0.81p - 1 = 0$ となり、正の根は $p = (0.81 + \sqrt{0.81^2+4})/2 \simeq 1.484$ です。ゲインは $K = p/(p+1) \simeq 0.597$ で、図7.1の説明で述べた値と一致します。

問2　$\sigma_u = 0$ なら $K_t = 1$、$\Sigma_{t|t} = 0$ です。観測が状態を誤差なく写しているので、観測をそのまま状態の推定とし、不確実性は残りません。

問3　$\mathbf{G}_t$ が特異に近づくと $|\mathbf{G}_t| \to 0$ で $\ln|\mathbf{G}_t| \to -\infty$、一方 $\mathbf{G}_t^{-1}$ は発散します。予測誤差 $\boldsymbol{\nu}_t$ がモデルの予想する低次元の方向からわずかでも外れていれば、$\boldsymbol{\nu}_t' \mathbf{G}_t^{-1} \boldsymbol{\nu}_t$ が無限大に発散して対数尤度はマイナス無限大になります。これが、観測変数の数がショックの数を上回るときに尤度が計算できなくなる（確率的特異性）ことの、計算上の現れです。

第8章へ　これで、どんなパラメータの値に対しても、データの尤度を計算できるようになりました。あとは、尤度を手がかりにパラメータを推定するだけです。ただし、中規模モデルには30を超えるパラメータがあり、尤度の山はでこぼこで、識別の弱い方向もあります。次章では、事前の知識を確率分布として取り込むベイズ推定と、その事後分布を描き出すマルコフ連鎖モンテカルロ法を学びます。

第8章

ベイズ推定

> **ここまでの流れ**　第7章で、どんなパラメータの値に対しても、データの尤度を計算できるようになりました。人工データの実験では、尤度が真のパラメータの近くで最大になることも確かめました。
> **この章の問い**　では、多数のパラメータを同時に推定するにはどうすればよいのでしょうか。尤度の山がなだらかだったり、でこぼこだったりするときは、どうすればよいのでしょうか。そして、推定の不確実性をどう表せばよいのでしょうか。
> **この章で分かること**　ベイズの定理と、事前分布・尤度・事後分布の関係。事前分布の選び方。事後分布からサンプルを取り出すメトロポリス＝ヘイスティングス法とその正しさの証明。収束の診断。人工データを使った中規模モデルの推定。識別の問題。そして、周辺尤度によるモデルの比較。

8.1　なぜベイズ推定なのか

尤度を最大にするパラメータを選ぶ最尤法は、統計学の標準的な方法です。それなのに、DSGEモデルの推定ではベイズ推定が主流になっています（An and Schorfheide, 2007）。理由は主に四つあります。

尤度の山がなだらかな方向がある
: 第7章の補足で触れたように、効果の似たパラメータの組では、尤度がほとんど変わらない方向があります。最尤法では、その方向のどこに推定値が落ちるかが偶然に左右され、経済学的に不自然な値（たとえば価格が数十年も改定されない ω_p）が出ることがあります。

データの外にも情報がある
: 価格改定の頻度にはミクロの価格データの証拠があり、資本分配率には国民経済計算の情報があります。ベイズ推定では、こうした知識を事前分布として正式に取り込めます。

不確実性を自然に表せる
: ベイズ推定の結果はパラメータの「分布」として得られるので、推定の不確実性をそのまま、インパルス応答などの分析結果の不確実性に引き継げます。

モデルを比較できる

周辺尤度を使えば、構造の異なるモデル（たとえば習慣形成のあるモデルとないモデル）を、同じデータのもとで比較できます。

8.2　ベイズの定理

8.2.1　定理

ベイズ推定では、パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ そのものを確率変数とみなし、「$\boldsymbol{\theta}$ がどのあたりにありそうか」という不確実性を確率分布で表します。

命題 8.1 (ベイズの定理)　データを観測する前の $\boldsymbol{\theta}$ についての分布（**事前分布**）を $p(\boldsymbol{\theta})$、尤度を $p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta})$ とする。データを観測した後の $\boldsymbol{\theta}$ の分布（**事後分布**）は

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}_T) = \frac{p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta})\, p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{Z}_T)}, \qquad p(\mathbf{Z}_T) = \int p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta})\, p(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta} \tag{8.1}$$

で与えられる。分母の $p(\mathbf{Z}_T)$ を**周辺尤度**と呼ぶ。

証明. 同時密度は $p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}_T) = p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}_T) p(\mathbf{Z}_T)$ と2通りに分解できる。両者を等しいとおいて $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}_T)$ について解けばよい。$p(\mathbf{Z}_T)$ は同時密度を $\boldsymbol{\theta}$ について積分（周辺化）したものである。 □

周辺尤度 $p(\mathbf{Z}_T)$ は $\boldsymbol{\theta}$ を含まない定数なので、事後分布の形を知るだけなら

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}_T) \;\propto\; \underbrace{p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta})}_{\text{尤度}} \times \underbrace{p(\boldsymbol{\theta})}_{\text{事前分布}} \tag{8.2}$$

で十分です。$\propto$ は「比例する」という意味です。**事後分布は、事前の知識を、データの情報（尤度）で更新したもの**です。

8.2.2　1次元の例

ベイズの更新がどう働くかを、計算が手でできる例で確かめておきます。

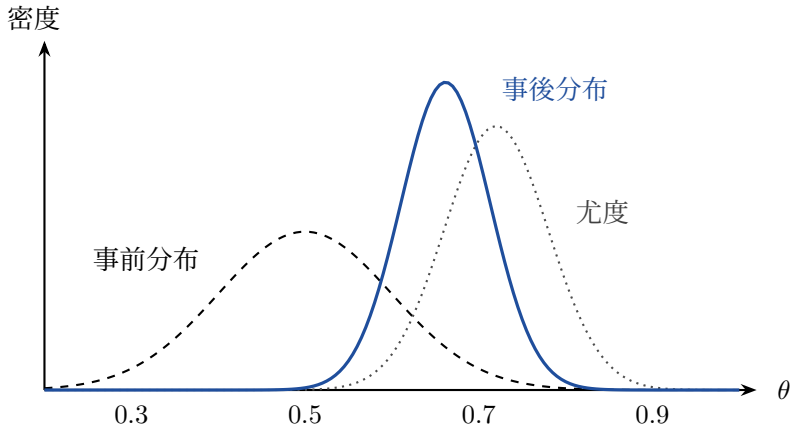
命題 8.2 (正規分布の事前分布と正規分布の尤度)　パラメータ θ の事前分布を $N(\mu_0, \tau_0^2)$ とする。データから得られる情報が「推定値 $\bar{x}$、標準誤差 s」の正規分布の尤度、すなわち $p(\bar{x} \mid \theta) \propto \exp\{-(\bar{x}-\theta)^2/(2s^2)\}$ で表されるとする。このとき事後分布は $N(\mu_1, \tau_1^2)$ で、

$$\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{s^2}, \qquad \mu_1 = \tau_1^2 \left(\frac{\mu_0}{\tau_0^2} + \frac{\bar{x}}{s^2} \right) \tag{8.3}$$

である。

証明. (8.2)より、事後密度は $\exp\{-(\theta-\mu_0)^2/(2\tau_0^2) - (\bar{x}-\theta)^2/(2s^2)\}$ に比例する。指数の中を θ について平方完成すると、θ^2 の係数は $-\frac{1}{2}(\tau_0^{-2}+s^{-2})$、$\theta$ の係数は $\mu_0/\tau_0^2 + \bar{x}/s^2$ である。これは平均 μ_1、分散 τ_1^2 の正規分布の密度の指数部分と（定数を除いて）一致する。 □

図 8.1　ベイズの更新：事前分布・尤度・事後分布



事前分布 $N(0.5, 0.1^2)$、データの推定値 $\bar{x}=0.72$、標準誤差 $s=0.06$ の場合。尤度は密度の形に基準化して描いた。事後分布は $N(0.66, 0.051^2)$。

図の読み方

- 事後分布の平均（0.66）は、事前分布の平均（0.5）とデータの推定値（0.72）の間にあり、データの側に寄っています。データの情報のほうが精度が高い（$s=0.06 < \tau_0=0.1$）からです。
- (8.3)の第1式は「精度（分散の逆数）は足し算になる」と読めます。事後分布は、事前分布よりも尤度よりも鋭くなります。
- データの情報が増えると $s \to 0$ となり、事後分布は事前分布によらずデータの推定値に集中します。逆に、データがそのパラメータについて何も語らなければ（$s \to \infty$）、事後分布は事前分布のままです。この二つの極端は、第8.8節の識別の議論で重要になります。

8.3　事前分布の選び方

8.3.1　分布の族

DSGEモデルの推定では、パラメータのとりうる範囲に合わせて、次のような分布がよく使われます。

分布	とりうる範囲	使う対象
ベータ分布	$(0, 1)$	確率や比率：カルボ・パラメータ、習慣形成、インデクセーション、平滑化、ショックの持続性
ガンマ分布	$(0, \infty)$	正のパラメータ：弾力性の逆数、稼働費用の曲率
正規分布	$(-\infty, \infty)$	符号の制約が弱いもの：金利ルールの係数、調整費用
逆ガンマ分布	$(0, \infty)$	ショックの標準偏差

分布は、平均と標準偏差で指定するのが一般的です。たとえば「平均0.5、標準偏差0.1のベータ分布」のように指定し、そこから分布のパラメータを逆算します。

8.3.2 事前分布を決める原則

範囲を守る
カルボ・パラメータは0と1の間、標準偏差は正、という具合に、経済学的に意味のある範囲だけに確率を置きます。

データの外の証拠を使う
価格改定の頻度は、ミクロの価格データ（NK編第1章）から「平均して数四半期に1度」程度と分かっています。そこで ω_p の事前分布を0.5〜0.75あたりに置く、といった使い方をします。

意図しない情報を入れない
個々のパラメータには緩やかな事前分布を置いたつもりでも、その組み合わせで決まる量（たとえば定常状態の比率やインパルス応答の大きさ）には、思いがけず強い事前の主張が入ることがあります。事前分布だけからモデルを繰り返し計算して、含意を確かめておくのがよい習慣です。

決定性の領域に限る
ブランシャール＝カーン条件を満たさないパラメータでは解が定まらないので、多くの実装では、決定性の領域の外に事前確率を置かないように（事前分布を切断して）扱います。

8.4 事後分布の要約

事後分布が得られたら、それを分かりやすく要約します。

- **点推定**：事後分布の平均（事後平均）、中央値、最頻値（事後モード）のいずれかを使います。対称な分布なら三者はほぼ一致します。
- **区間推定**：事後分布の5%点と95%点の間を**90%信用区間**と呼びます。「データを見た後で、パラメータがこの区間に入っている確率が90%」という、直接的な解釈ができます。

補足：信頼区間との違い

最尤法などの頻度論の統計学で使う90%**信頼**区間は、「同じ手続きを何度も繰り返したとき、作られた区間のうち90%が真の値を含む」という意味で、手元の一つの区間について確率を述べるものではありません。ベイズの**信用**区間は、手元のデータのもとでのパラメータの確率を述べます。データが多いときには両者は数値的に近くなりますが、意味は異なります。

8.5　事後分布からサンプリングする

8.5.1　なぜサンプリングが必要か

事後平均を求めるには、$\int \boldsymbol{\theta}\, p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}_T)\, d\boldsymbol{\theta}$ という積分を計算しなければなりません。ところが、DSGEモデルの尤度はカルマンフィルタを通じた数値計算でしか求まらず、事後分布の式は解析的には書けません。しかもパラメータは数十次元あり、格子点で数値積分するのは不可能です。

そこで、**事後分布に従うサンプル** $\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(N)}$ を作り、積分をサンプルの平均で置き換えます。大数の法則により

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(\boldsymbol{\theta}^{(i)}) \;\longrightarrow\; \int g(\boldsymbol{\theta})\, p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}_T)\, d\boldsymbol{\theta}$$

が成り立ちます。$g(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}$ なら事後平均、g をインパルス応答にすれば、インパルス応答の事後平均です。これを**モンテカルロ法**と呼びます。

問題は、式の分からない分布からどうやってサンプルを作るかです。ここで使えるのが、(8.2)の右辺、すなわち「尤度 $\times$ 事前分布」なら**点ごとに計算できる**という事実です。

8.5.2　マルコフ連鎖

定義 8.3 (マルコフ連鎖と定常分布)　確率変数の列 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\theta}^{(1)}, \dots$ で、次の値 $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$ の分布が現在の値 $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ だけに依存するものを**マルコフ連鎖**と呼ぶ。その条件付き密度 $k(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta})$ を**遷移核**と呼ぶ。分布 π が

$$\pi(\boldsymbol{\theta}') = \int k(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta})\, \pi(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta}$$

を満たすとき、π をこの連鎖の**定常分布**と呼ぶ。

定常分布とは、「いまの値がその分布に従っていれば、1歩進めた後もその分布に従う」分布です。適当な条件（どこからでもどこへでも到達でき、周期的でないこと）のもとで、連鎖は初期値によらず定常分布に収束し、連鎖の値の平均について大数の法則が成り立つことが知られています（Robert and Casella, 2004）。

そこで、**定常分布がちょうど事後分布になるようなマルコフ連鎖**を作れば、それを長く走らせることで事後分布のサンプルが得られます。これが**マルコフ連鎖モンテカルロ法**（MCMC）の考え方です。

8.5.3 メトロポリス＝ヘイスティングス法

要点：メトロポリス＝ヘイスティングス法

目標の分布を $\pi(\boldsymbol{\theta}) \propto p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})$ とし、提案分布 $q(\boldsymbol{\theta}^* \mid \boldsymbol{\theta})$ を一つ決める。初期値 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ から始めて、$i = 0, 1, 2, \dots$ について次を繰り返す。

1. **提案**：$q(\cdot \mid \boldsymbol{\theta}^{(i)})$ から候補 $\boldsymbol{\theta}^*$ を引く。
2. **採択確率の計算**：
$$\alpha = \min\left\{1,\ \frac{\pi(\boldsymbol{\theta}^*)\, q(\boldsymbol{\theta}^{(i)} \mid \boldsymbol{\theta}^*)}{\pi(\boldsymbol{\theta}^{(i)})\, q(\boldsymbol{\theta}^* \mid \boldsymbol{\theta}^{(i)})}\right\}$$
3. **採否**：確率 α で $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^*$（採択）、残りの確率で $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)}$（棄却して同じ値を繰り返す）とする。

採択確率は π の**比**だけで決まるので、比例定数（周辺尤度）を知る必要はありません。これがこの方法の最大の利点です。

命題 8.4 (MH法の正しさ)　メトロポリス＝ヘイスティングス法の遷移核は**詳細つり合い条件**

$$\pi(\boldsymbol{\theta})\, k(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}) = \pi(\boldsymbol{\theta}')\, k(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}') \tag{8.4}$$

を満たす。したがって π はこの連鎖の定常分布である。

証明. $\boldsymbol{\theta}' \neq \boldsymbol{\theta}$ のとき、$\boldsymbol{\theta}$ から $\boldsymbol{\theta}'$ へ移る密度は「提案されて採択される」密度 $k(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}) = q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta})\alpha(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}')$ である。したがって

$$\pi(\boldsymbol{\theta}) k(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}) = \min\{\pi(\boldsymbol{\theta}) q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}),\ \pi(\boldsymbol{\theta}') q(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}')\}$$

であり、右辺は $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\theta}'$ を入れ替えても変わらない。よって(8.4)が成り立つ（$\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta}$ の場合は自明）。

次に、(8.4)の両辺を $\boldsymbol{\theta}$ について積分すると、左辺は $\int \pi(\boldsymbol{\theta}) k(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$、右辺は $\pi(\boldsymbol{\theta}') \int k(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}') d\boldsymbol{\theta} = \pi(\boldsymbol{\theta}')$ である（遷移核は確率密度なので積分は1）。これは π が定常分布であることの定義そのものである。 □

数式の読み方：採択確率の直感

提案分布が対称（$q(\boldsymbol{\theta}^* \mid \boldsymbol{\theta}) = q(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}^*)$）なら、採択確率は $\min\{1, \pi(\boldsymbol{\theta}^*)/\pi(\boldsymbol{\theta}^{(i)})\}$ に簡単になります。

- 候補のほうが事後密度が高ければ、必ず移動します。
- 候補のほうが低くても、密度の比の確率で移動します。低いところへも**ときどき**行くので、連鎖は山の頂上に張り付かず、事後分布の裾まで含めて全体をくまなく訪れます。
- その結果、密度の高い場所ほど長く滞在し、各場所に滞在する時間の割合が、ちょうど事後確率に比例するようになります。

8.5.4　ランダムウォーク・メトロポリス法の実際

DSGEモデルの推定で標準的なのは、提案分布を現在の値を中心とする正規分布

$$\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}^{(i)} + c\,\mathbf{L}\boldsymbol{\eta}, \qquad \boldsymbol{\eta} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

とする**ランダムウォーク・メトロポリス法**です。対称な提案なので、採択確率は事後密度の比だけで決まります。実際の手順は次のとおりです（An and Schorfheide, 2007）。

1. 数値最適化で事後分布の最頻値（**事後モード**）$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を求める。
2. 事後モードでの対数事後密度のヘッセ行列 $\boldsymbol{\mathcal{H}}$（2階微分の行列に負号をつけたもの。観測方程式の $\mathbf{H}$ とは別のもの）を数値的に計算する。$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{-1}$ は、事後分布を正規分布で近似したときの分散共分散行列である。
3. $\mathbf{L}$ を $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{-1}$ のコレスキー因子（$\mathbf{L}\mathbf{L}' = \boldsymbol{\mathcal{H}}^{-1}$）とし、提案の幅 c を、採択率が0.25〜0.35程度になるように調整する。
4. 事後モードの周りに散らばった複数の初期値から、複数の連鎖を走らせる。

数式の読み方：なぜ採択率を調整するのか

提案の幅 c が小さすぎると、候補はほとんど採択されますが、一歩一歩が小さいので分布全体を回るのに膨大な時間がかかります。逆に大きすぎると、候補がしばしば密度の低い場所に飛び、ほとんど棄却されて連鎖が動きません。正規分布に近い目標分布では、次元が大きいときに採択率がおよそ0.23になる幅が最も効率的であることが知られています（Roberts, Gelman and Gilks, 1997）。

8.6　収束の診断

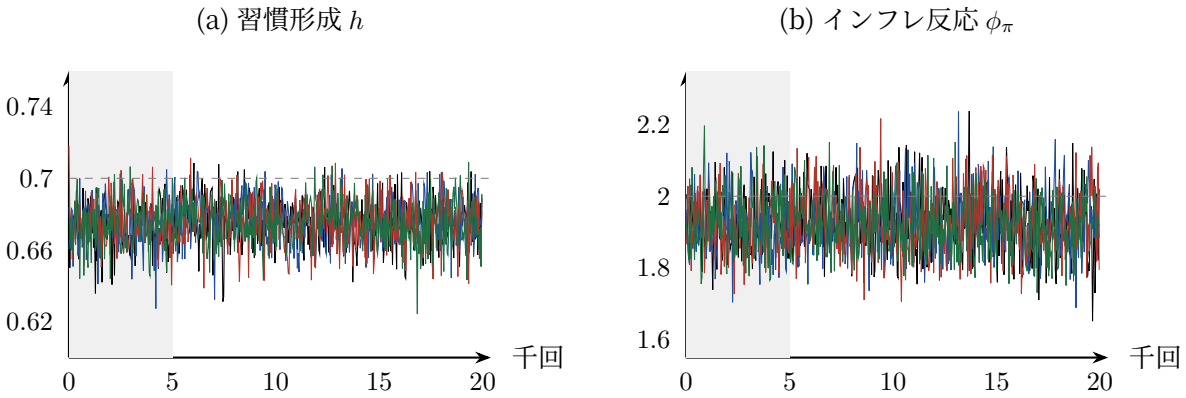
MCMCで得たサンプルが信頼できるのは、連鎖が定常分布に十分近づいた後の部分だけです。しかも連続するサンプルは互いに相関しているので、見かけの個数ほどの情報はありま

せん。この二点を確かめる方法を見ておきます。

8.6.1 トレースプロット

最も基本的な方法は、連鎖の値を横軸に繰り返し回数をとって描くことです。

図 8.2　トレースプロット：4本の連鎖



8.7節の推定で得た4本の連鎖（40回に1回の値を表示）。横軸は繰り返しの回数（千回）。灰色の帯は捨てる部分（最初の5000回）、灰色の破線は真の値。

図の読み方

- 4本の連鎖は、わざと事後モードから離れた初期値から始めています。それでもすぐに同じ領域に集まり、その後は4本が同じ帯の中で混ざり合って動いています。これが「収束した」連鎖の典型的な姿です。
- 初期値の影響が残る最初の部分（**バーンイン**）は、推定に使わずに捨てます。ここでは余裕をもって最初の5000回を捨てました。
- もし連鎖ごとに違う水準にとどまっていたり、ゆっくりした波が見えたりすれば、収束していないか、事後分布に複数の山がある可能性を疑います。

8.6.2 連鎖のあいだの比較：$\hat{R}$

複数の連鎖の比較を数値にしたのが、Gelman and Rubin (1992) の**潜在的縮小係数** $\hat{R}$ です。長さ n の連鎖が m 本あるとき、連鎖の**内部**の分散の平均を W、連鎖の**平均どうし**の分散に n を掛けたものを B として

$$\hat{V} = \frac{n-1}{n} W + \frac{1}{n} B, \qquad \hat{R} = \sqrt{\hat{V}/W}$$

と定義します。すべての連鎖が同じ分布からサンプルを取っていれば、$\hat{R}$ は1に近くなります。連鎖ごとに違う場所にいれば、B が大きくなって $\hat{R}$ は1を上回ります。目安として、$\hat{R} < 1.1$（より厳しくは1.01）が求められます。

8.6.3 有効サンプルサイズ

MCMCのサンプルは、前の値の近くから次の値が提案されるので、強く自己相関しています。自己相関が高いほど、同じ個数でも含まれる情報は少なくなります。l 次の自己相関を ρ_l として

$$\mathrm{ESS} = \frac{N}{1 + 2\sum_{l=1}^{\infty} \rho_l}$$

を**有効サンプルサイズ**と呼び、「独立なサンプルに換算すると何個分か」を表します。事後平均を精度よく求めるには、ESSが数百から数千あることが望まれます。

8.7 人工データでの推定

8.7.1 設定

ここまでの道具をすべて使って、中規模モデルを実際に推定してみます。データは第7章と同じ、第I部のパラメータ値のモデルから作った200期・7系列の人工データです。

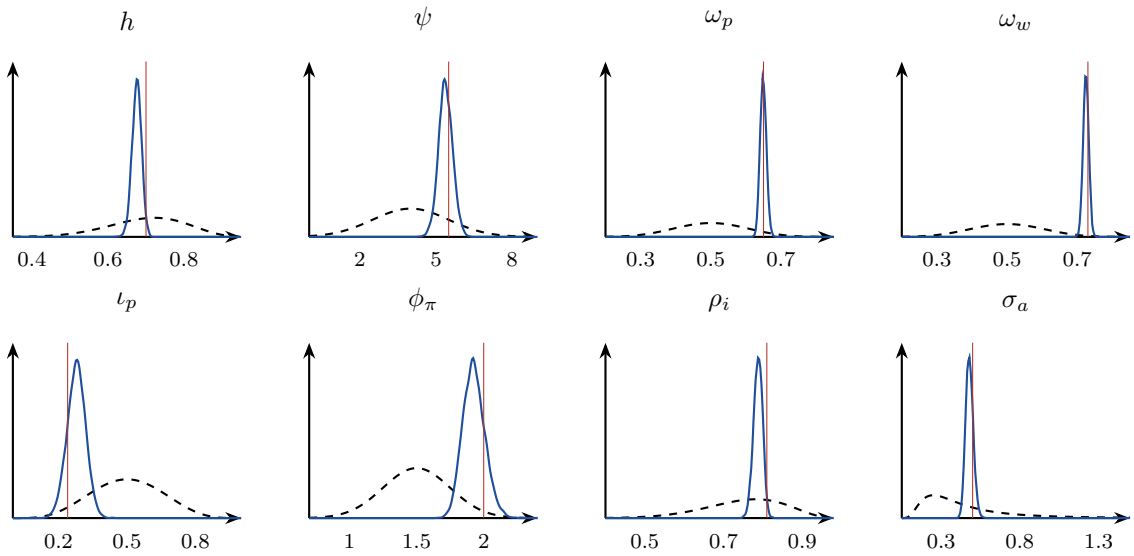
計算の負担を抑えるため、推定するのは次の8つのパラメータとし、残りは真の値に固定しました。事前分布は、Smets and Wouters (2007) の設定を参考に、真の値とは少しずらして置いています。たとえば ω_w の事前平均は0.5ですが、真の値は0.73です。データが事前分布をどれだけ修正できるかを見るためです。

手順は8.5節のとおりです。数値最適化で事後モードを求め、そこでのヘッセ行列から提案分布を作り、4本の連鎖をそれぞれ2万回走らせました。採択率は約0.29でした。各連鎖の最初の5000回を捨て、残り6万個のサンプルで事後分布を要約します。

8.7.2 結果

		事前分布		事後分布			
パラメータ	意味	分布	平均（標準偏差）	平均	90%信用区間	真の値	$\hat{R}$
h	習慣形成	ベータ	0.70 (0.10)	0.676	[0.655, 0.695]	0.70	1.000
ψ	投資の調整費用	正規	4.00 (1.50)	5.38	[4.93, 5.84]	5.50	1.001
ω_p	価格のカルボ	ベータ	0.50 (0.10)	0.649	[0.635, 0.664]	0.65	1.001
ω_w	賃金のカルボ	ベータ	0.50 (0.10)	0.724	[0.711, 0.738]	0.73	1.003
ι_p	価格のインデクセーション	ベータ	0.50 (0.15)	0.278	[0.210, 0.344]	0.24	1.001
ϕ_π	インフレ反応	正規	1.50 (0.25)	1.93	[1.80, 2.07]	2.00	1.002
ρ_i	金利の平滑化	ベータ	0.75 (0.10)	0.788	[0.768, 0.805]	0.81	1.002
σ_a	技術ショックの標準偏差	逆ガンマ	0.50 (0.50)	0.480	[0.443, 0.521]	0.50	1.001

図 8.3　事前分布と事後分布



黒の破線が事前分布、青の実線が事後分布（サンプルからの密度推定）、赤の縦線が真の値。各パネルの縦軸は事後分布に合わせて設定したので、事前分布は平たく見える。

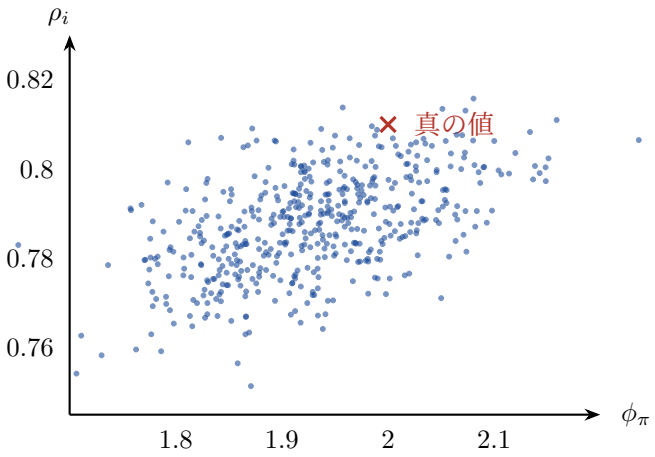
図の読み方

- どのパラメータでも、事後分布は事前分布よりはるかに鋭く、データが多くの情報をもっていることが分かります。200期・7系列のデータは、これらのパラメータについて事前分布をほぼ上書きするだけの情報をもっています。
- ω_w や ι_p のように、事前分布の中心が真の値から離れていても、事後分布は真の値の近くに移っています。事前分布が「間違って」いても、データが十分にあれば修正されるのです。
- 真の値は、8つのうち6つで90%信用区間に入っています。h と ρ_i は、真の値が区間の上端をわずかに越えています。一つの人工データには偶然の偏りがあるので、区間が真の値を外すこと自体は珍しくありません（各区間が外す確率は約10%）。h と ρ_i は事後的に正の相関（約0.36）をもつので、この標本では両者がそろって低めに推定された、と考えられます。

8.7.3　パラメータどうしの相関

事後分布はパラメータの同時分布なので、個々の分布だけでなく、パラメータどうしの関係も分かります。8つのうち最も強い相関（約0.44）をもっていたのは、インフレ反応 ϕ_π と金利の平滑化 ρ_i でした。

図 8.4　ϕ_π と ρ_i の同時事後分布



事後分布のサンプル500個（120回に1回を表示）。

図の読み方

- 点の雲は右上がりに傾いています。ϕ_π が大きいサンプルほど、ρ_i も大きい傾向があります。
- 線形化した金利ルール $\hat{\imath}_t = \rho_i \hat{\imath}_{t-1} + (1-\rho_i)\phi_\pi \pi_t + \ldots$ を見ると、インフレ率への**今期の**反応は $(1-\rho_i)\phi_\pi$ です。ρ_i を上げても ϕ_π を同時に上げれば、今期の反応はあまり変わりません。データはこの積を比較的よく決めていますが、二つを個別に分けるのはやや難しい、ということです。
- このように、事後分布の相関を見ると、データが何をよく決めていて、何をあまり決めていないのかが分かります。これが次節の識別の問題につながります。

8.8　識別の問題

8.8.1　識別とは

定義 8.5 (識別)　異なるパラメータの値 $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_2$ が、観測変数について同じ確率分布を生み出す（したがって同じ尤度をもつ）とき、$\boldsymbol{\theta}$ は**識別されない**という。ある値の近傍でそのようなことが起きないとき、その値で**局所的に識別される**という。

識別されないパラメータは、どれだけデータを集めても区別できません。尤度に平らな方向（尾根）ができるからです。DSGEモデルでは、次のような原因で識別が失われたり弱くなったりします（Canova and Sala, 2009）。

- **パラメータが線形化モデルに現れない**：第3章で見たように、賃金マークアップ ε_w や労働の不効用の水準 χ は、線形化したモデルのどこにも現れません。データからは決まりようがありません。

- **パラメータが組み合わせでしか現れない**：NK編で見たように、NKフィリップス曲線の傾き κ には ω、σ、φ が組み合わさって入っています。傾きだけが決まり、個々の値は分けられない、ということが起こりえます。
- **効果が似ている**：前節の ϕ_π と ρ_i のように、異なるパラメータがデータに似た影響を与える場合です。

8.8.2　ベイズ推定は識別の問題を解決するか

事前分布があれば、尤度が平らな方向でも事後分布は事前分布の形をとるので、推定は「うまくいった」ように見えます。しかし、それは**データが語ったのではなく、事前分布が語っている**だけです。命題8.2で $s \to \infty$ とした場合に、事後分布が事前分布に一致したことを思い出してください。

要点：識別の弱さを見抜くには

- **事前分布と事後分布を重ねて描く**：両者がほとんど同じなら、そのパラメータについてデータはほとんど何も語っていません（図8.3では、どのパラメータも十分に更新されていました）。
- **事前分布を変えて推定し直す**：結果が事前分布につられて大きく動くなら、識別が弱い証拠です。
- **識別の検定を使う**：Iskrev (2010) は、パラメータを少し動かしたときに観測変数の平均と自己共分散がどれだけ変わるか（ヤコビ行列の階数）で、局所的な識別を判定する方法を示しました。

補足：事前分布が支配しているかどうかは、事後分布の幅だけでは分からない

事後分布が狭くても、それが事前分布の狭さを反映しているだけかもしれません。逆に、事後分布が事前分布から大きく移動していれば、データが情報をもっていたことは確かです。Koop, Pesaran and Smith (2013) は、標本を大きくしていったときに事後分布が縮んでいくかどうかで、識別を判定することを提案しています。

8.9　周辺尤度とモデルの比較

8.9.1　周辺尤度

ベイズの定理(8.1)の分母に現れた周辺尤度

$$p(\mathbf{Z}_T \mid \mathcal{M}) = \int p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta}, \mathcal{M})\, p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{M})\, d\boldsymbol{\theta}$$

は、パラメータの推定には要りませんが、**モデルの比較**に使えます。ここではモデルを $\mathcal{M}$ で明示しました。周辺尤度は、「事前分布に従ってパラメータを選んだとき、モデル $\mathcal{M}$ が

手元のデータを生み出す確率の平均」です。

二つのモデル $\mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_2$ について、データを見る前のモデルの確率（事前確率）を $p(\mathcal{M}_1)$、$p(\mathcal{M}_2)$ とすると、ベイズの定理をモデルに当てはめて

$$\frac{p(\mathcal{M}_1 \mid \mathbf{Z}_T)}{p(\mathcal{M}_2 \mid \mathbf{Z}_T)} = \underbrace{\frac{p(\mathbf{Z}_T \mid \mathcal{M}_1)}{p(\mathbf{Z}_T \mid \mathcal{M}_2)}}_{\text{ベイズ・ファクター}} \times \frac{p(\mathcal{M}_1)}{p(\mathcal{M}_2)} \tag{8.5}$$

を得ます。左辺を**事後オッズ**、右辺の第1項を**ベイズ・ファクター**と呼びます。

数式の読み方：周辺尤度は複雑なモデルを罰する

パラメータを増やしたモデルは、尤度の最大値では必ず有利になります。しかし周辺尤度は尤度を事前分布で**平均**したものです。パラメータが多く、事前分布が広い範囲に広がったモデルでは、データに合わないパラメータの領域にも事前確率が配られるので、平均が下がります。このように周辺尤度は、当てはまりの良さと簡潔さの釣り合いを自動的にとってくれます（「オッカムの剃刀」）。

8.9.2　周辺尤度の計算

周辺尤度は高次元の積分なので、近似的に計算します。代表的な方法が二つあります。

命題 8.6 (ラプラス近似)　対数事後核 $f(\boldsymbol{\theta}) \equiv \ln p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta}) + \ln p(\boldsymbol{\theta})$ の最大点を $\hat{\boldsymbol{\theta}}$、そこでの $-\partial^2 f / \partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'$ を $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ とし、パラメータの数を k とする。f を $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の周りで2次近似すると

$$\ln p(\mathbf{Z}_T) \simeq f(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{k}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\mathcal{H}}| \tag{8.6}$$

である。

証明. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ では f の勾配がゼロなので、$f(\boldsymbol{\theta}) \simeq f(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})'\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})$ である。よって

$$p(\mathbf{Z}_T) = \int e^{f(\boldsymbol{\theta})} d\boldsymbol{\theta} \simeq e^{f(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \int \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})'\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})\Big\} d\boldsymbol{\theta} = e^{f(\hat{\boldsymbol{\theta}})}(2\pi)^{k/2}|\boldsymbol{\mathcal{H}}|^{-1/2}$$

である。最後の等号は、多変量正規分布の密度(7.2)の積分が1であることを使った。両辺の対数をとればよい。　□

もう一つは、MCMCのサンプルを使う**修正調和平均法**（Geweke, 1999）です。事後分布のサンプルを $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ とし、積分が1になる適当な密度 g（事後分布の平均と分散をもつ、裾を切った正規分布など）を選ぶと

$$\frac{1}{p(\mathbf{Z}_T)} = \int \frac{g(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}\, p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}_T)\, d\boldsymbol{\theta} \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{g(\boldsymbol{\theta}^{(i)})}{p(\mathbf{Z}_T \mid \boldsymbol{\theta}^{(i)})p(\boldsymbol{\theta}^{(i)})}$$

で周辺尤度を計算します。最初の等号は、右辺の被積分関数で事後分布を(8.1)で書き換えると $g(\boldsymbol{\theta})/p(\mathbf{Z}_T)$ になり、g の積分が1であることから確かめられます。

8.9.3 習慣形成は必要か

人工データを使って、二つのモデルを比べてみます。$\mathcal{M}_1$ は前節で推定した、習慣形成のあるモデルです。$\mathcal{M}_2$ は $h = 0$ に固定し、残る7つのパラメータを同じ事前分布で推定したモデルです。

	対数周辺尤度	
モデル	ラプラス近似	修正調和平均
$\mathcal{M}_1$：習慣形成あり	-304.5	-304.5
$\mathcal{M}_2$：習慣形成なし（$h = 0$）	-530.0	—

- $\mathcal{M}_1$ については、二つの計算方法の結果が小数第2位まで一致しました（-304.509 と -304.514）。事後分布が正規分布に近いときは、ラプラス近似もよい近似になります。
- 対数ベイズ・ファクターは約225です。ベイズ・ファクターにすると e^{225} という途方もない大きさで、データは習慣形成のあるモデルを圧倒的に支持しています。データを生み出したのが習慣形成のあるモデルなので、当然の結果ではありますが、周辺尤度がその違いを正しく見分けることが確かめられました。

補足：ベイズ・ファクターの目安と注意

Kass and Raftery (1995) は、対数ベイズ・ファクターが1を超えれば「肯定的な」、3を超えれば「強い」、5を超えれば「非常に強い」証拠とする目安を示しています。ただし周辺尤度は事前分布の広さに敏感です。事前分布をむやみに広くすると、そのモデルの周辺尤度は下がります。比較するモデルの事前分布は、同じ考え方で設定しておく必要があります。

8.10 実データで推定するときの注意

最後に、人工データの実験では見えにくい、実データ特有の注意をまとめておきます。

事後モードの探索

実データでは事後分布に複数の山があることがあり、数値最適化が局所的な山に止まることがあります。複数の初期値から最適化を試すのが基本です。

事前分布への感応度

識別の弱いパラメータについては、事前分布を変えた推定を報告するのが望ましい習慣です。

計算の負担

本章の推定は8つのパラメータでしたが、実際の中規模モデルでは30〜40のパラメータを同時に推定します。次元が上がると、ランダムウォーク・メトロポリス法の効率は落ちます。複数の山がある場合にも強い**逐次モンテカルロ法**（Herbst and Schorfheide, 2014）なども使われるようになっています。

モデルの誤特定

人工データの実験では、データを生んだモデルと推定するモデルが一致していました。実データではそうではありません。推定されたパラメータは「データに最も近いモデル」のパラメータにすぎず、モデルの欠けている部分をショックの性質やパラメータの値が補っている可能性があります。DSGEモデルとVARモデルを組み合わせてモデルの誤特定の程度を測るDSGE-VAR（Del Negro and Schorfheide, 2004）は、その一つの対処法です。

要点：この章のまとめ

- 事後分布は「尤度 $\times$ 事前分布」に比例する。事前分布はデータの外の知識を取り込み、尤度はデータの情報を表す。
- 事前分布は、パラメータの範囲に合った分布の族から、ミクロの証拠などを使って選ぶ。
- メトロポリス＝ヘイスティングス法は、事後密度の比だけを使って、事後分布を定常分布とするマルコフ連鎖を作る。その正しさは詳細つり合い条件で証明できる。
- 収束はトレースプロット、$\hat{R}$、有効サンプルサイズで確かめる。
- 人工データの実験では、8つのパラメータの事後分布が真の値の近くに集中し、周辺尤度は習慣形成のあるモデルを正しく選んだ。
- ベイズ推定は識別の問題を解決しない。事前分布と事後分布を比べ、データが何を語っているかを確かめる必要がある。

8.11　練習問題

問1　命題8.2で、事前分布が $N(0.6, 0.05^2)$、データの推定値が $\bar{x} = 0.8$、標準誤差が $s = 0.1$ のとき、事後分布の平均と標準偏差を求めてください。事後平均が図8.1の例よりも事前分布の側に寄る理由も説明してください。

問2　対称な提案分布をもつメトロポリス＝ヘイスティングス法で、現在の値での対数事後密度が -300、候補での対数事後密度が -302 だったとします。候補が採択される確率はいくらですか。

問3　4本の連鎖があり、各連鎖の内部の分散の平均が $W = 1$、各連鎖の長さが $n = 1000$、連鎖の平均どうしの分散が0.01だったとします。$\hat{R}$ を計算し、収束していると判断してよいか答えてください。

補足：解答

問1　精度は $1/0.05^2 + 1/0.1^2 = 400 + 100 = 500$ なので、事後標準偏差は $1/\sqrt{500} \simeq 0.045$ です。事後平均は $(400 \times 0.6 + 100 \times 0.8)/500 = 0.64$ です。今度は事前分布の精度（400）がデータの精度（100）の4倍あるので、事後平均は事前分布の側に寄ります。事後分布は、精度で重みをつけた平均になっています。

問2　採択確率は $\min\{1, e^{-302-(-300)}\} = e^{-2} \simeq 0.135$ です。対数事後密度が2だけ低い候補にも、約14%の確率で移動します。

問3　$B = n \times 0.01 = 10$ なので、$\hat{V} = \frac{999}{1000} \times 1 + \frac{10}{1000} = 1.009$、$\hat{R} = \sqrt{1.009} \simeq 1.0045$ です。1.01を下回っているので、この基準では収束していると判断できます。

第IV部へ　第III部で、DSGEモデルをデータで推定する方法が一通りそろいました。第IV部では、推定したモデルを使って何が言えるのかを扱います。インパルス応答に推定の不確実性の幅をつけること、景気変動の要因をショックごとに分解すること（分散分解・歴史分解）、そして政策のルールを変えたらどうなるかという反実仮想の分析です。DSGEモデルへの批判とその応答も、そこで取り上げます。

第IV部

推定したモデルを使う

第9章・第10章

第IV部のはじめに

第III部の終わりで、人工データを使って中規模DSGEモデルを推定し、パラメータの事後分布を手に入れました。では、推定したモデルからは何が言えるのでしょうか。

DSGEモデルが研究や政策の現場で使われるのは、主に次の三つの問いに答えるためです。

1. **あるショックが起きると、経済はどう反応するのか**：インパルス応答とその不確実性（第9章）
2. **実際の景気変動は、どのショックによって引き起こされたのか**：分散分解と歴史分解（第9章）
3. **政策のやり方を変えたら、経済はどうなるのか**：反実仮想の政策分析（第10章）

三つ目の問いこそ、第1章でルーカス批判に答えるために構造モデルが必要だとした理由でした。第IV部はその約束を果たす部分です。そして最後に、こうした分析がどこまで信頼できるのかという問い、すなわちDSGEモデルへの批判とその応答を取り上げます。

第IV部の数値例は、すべて第III部の人工データと推定結果を使っています。データを生み出した「真のモデル」が分かっているので、分析の結果を真の値と照らし合わせることができます。ただし、ショックの大きさや持続性の多くは説明用に置いた値なので、分散分解などの**数値そのものに経済学的な意味はありません**。実際のデータでどのような結果が得られているかは、本文中で文献を紹介します。

第9章

推定結果の読み方

> **ここまでの流れ**　第III部で、パラメータの事後分布を求め、カルマンフィルタと平滑化で観測できない状態を推定する方法を学びました。
> **この章の問い**　推定したモデルを使って、ショックの効果やその不確実性をどう示せばよいのでしょうか。実際の景気の動きを、「どのショックがどれだけ動かしたのか」に分解するにはどうすればよいのでしょうか。
> **この章で分かること**　インパルス応答の事後分布と信用区間。予測誤差の分散分解。平滑化したショックを使った歴史分解。そして、DSGEモデルによる予測の位置づけ。

9.1　インパルス応答とその不確実性

9.1.1　インパルス応答の事後分布

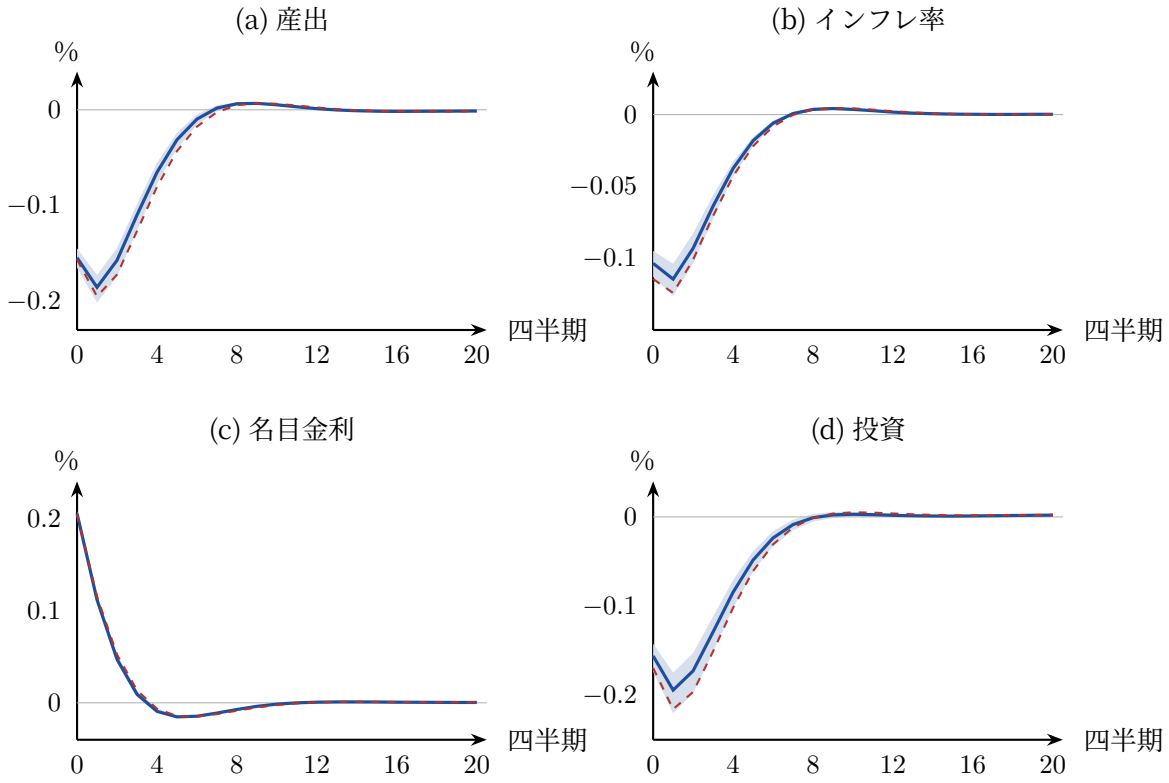
第5章で見たように、パラメータが決まればインパルス応答は $\mathbf{FP}^h\mathbf{Re}_j$ で計算できます。パラメータに不確実性があれば、インパルス応答にも不確実性があります。ベイズ推定では、それを次のように自然に扱えます。

命題 9.1 (パラメータの関数の事後分布)　$\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\theta}^{(N)}$ が事後分布 $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}_T)$ からのサンプルなら、任意の関数 g について $g(\boldsymbol{\theta}^{(1)}), \ldots, g(\boldsymbol{\theta}^{(N)})$ は $g(\boldsymbol{\theta})$ の事後分布からのサンプルである。

証明. 任意の集合 A について、$g(\boldsymbol{\theta}) \in A$ となる確率は $\boldsymbol{\theta} \in g^{-1}(A)$ となる確率に等しい。サンプル $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ のうち $g^{-1}(A)$ に入るものの割合は、事後分布のもとでのその確率に収束するので、$g(\boldsymbol{\theta}^{(i)})$ のうち A に入るものの割合も同じ値に収束する。 □

当たり前に見えますが、これは強力な性質です。インパルス応答のようにパラメータの複雑な非線形関数でも、**サンプルの一つ一つについてモデルを解いてインパルス応答を計算し、その分布を見ればよい**のです。デルタ法のような近似計算は要りません。

図 9.1　金融政策ショックに対するインパルス応答の事後分布



名目金利を1期だけ0.25%ポイント引き上げるショックへの反応。青の実線が事後分布の中央値、薄い青の帯が各期の90%信用区間（事後分布のサンプル500個から計算）、赤の破線が真のパラメータでの反応。

図の読み方

- 4つの変数すべてで、真のパラメータでの反応（赤の破線）は中央値とほぼ重なっており、反応の形も大きさもよく再現されています。ただし帯がとても狭いので、いくつかの期では真の反応が帯のわずかに外側に出ています。第8章で見たように、この標本では h と ρ_i がやや低めに推定されており、その偏りがインパルス応答にも引き継がれているのです。信用区間は「このデータとこのモデルのもとでの不確実性」であり、一つの標本で真の値をわずかに外すことは十分ありえます。
- 帯の幅は、反応が大きい最初の数期で最も広く、反応がゼロに戻るにつれて狭くなっていきます。反応のピークの大きさと時期は、習慣形成や調整費用のように推定に不確実性のあるパラメータに左右されるからです。
- ここでは8つのパラメータしか推定していないので、帯は狭めです。実際の推定では数十のパラメータに不確実性があり、帯はもっと広くなります。

補足：各期ごとの帯の解釈

図の帯は、各期について別々に5%点と95%点を結んだものです。したがって「反応の経路全体が90%の確率で帯の中に収まる」という意味ではありません。経路全体についての信用区間はこれより広くなります。帯を見るときは、期ごとの不確実性を表していることを意識しておきましょう。

9.2　分散分解

9.2.1　予測誤差の分散分解

インパルス応答は「あるショックが起きたら」という仮定の話です。これに対して分散分解は、「**実際に観測される変動のうち、どれだけが各ショックによるものか**」を数量化します。各ショックの効果の大きさと、そのショックがどれだけ頻繁に大きく起きるか（標準偏差）の両方を反映します。

命題 9.2 (予測誤差の分散分解)　状態空間モデル $\mathbf{s}_t = \mathbf{P}\mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_t$、$\mathbf{z}_t = \mathbf{d} + \mathbf{H}\mathbf{s}_t$ において、ショックは互いに独立で、j 番目のショックの分散を σ_j^2 とする。t 期の時点で h 期先の観測変数を予測したときの予測誤差の分散は

$$\mathrm{Var}_t(\mathbf{z}_{t+h}) = \sum_{j} \underbrace{\sigma_j^2 \sum_{k=0}^{h-1} \left(\mathbf{H}\mathbf{P}^k\mathbf{R}\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{H}\mathbf{P}^k\mathbf{R}\mathbf{e}_j\right)'}_{\text{ショック } j \text{ の寄与}} \tag{9.1}$$

と、ショックごとの寄与の和に分解できる。

証明. $\mathbf{s}_{t+h} = \mathbf{P}^h\mathbf{s}_t + \sum_{k=0}^{h-1}\mathbf{P}^k\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+h-k}$ なので、t 期の情報のもとでの予測誤差は $\mathbf{H}\sum_{k=0}^{h-1}\mathbf{P}^k\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+h-k}$ である。異なる期のショックは独立で、同じ期の異なるショックも独立なので、分散は各期・各ショックの項の分散の和になる。$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_j \varepsilon_j \mathbf{e}_j$ と書けば(9.1)を得る。 □

各観測変数について、ショック j の寄与を全体の分散で割ったものが**分散分解**です。$h = 1$ なら「来期の予想外の変動」の内訳、$h \to \infty$ なら変数の無条件分散の内訳になります。

9.2.2　人工データでの結果

推定したパラメータ（事後平均）のもとで計算した分散分解を示します（単位は%）。

観測変数	予測期間	技術	選好	投資固有	政府支出	金融政策	価格マークアップ	賃金マークアップ
産出成長率	1期	5	2	1	76	9	4	3
	4期	16	2	1	63	7	5	6
	20期	17	2	1	60	8	5	7
インフレ率	1期	47	7	1	3	15	18	10
	4期	41	9	1	2	21	12	14
	20期	43	8	1	2	20	11	15
労働時間	1期	37	1	1	52	5	1	3
	4期	19	1	2	40	8	8	22
	20期	10	1	1	28	4	9	46

数式の読み方：表の読み方

- 予測期間が延びると、内訳が変わっていきます。労働時間では、1期先の変動の半分は政府支出ショックによるものですが、20期先では賃金マークアップ・ショックが半分近くを占めます。賃金マークアップ・ショックは持続性が高く、効果がゆっくり積み重なるからです。
- 産出成長率で政府支出ショックの割合が大きいのは、本書の人工データで政府支出ショックの標準偏差を大きめに置いたためです。最初に断ったとおり、この表の数値そのものに経済学的な意味はありません。大切なのは、**同じモデルでもショックの大きさの推定値しだいで内訳が大きく変わる**ことです。

発展：実際のデータでは

Smets and Wouters (2007) は、米国データの推定から、おおよそ次のような結論を得ています。短期の産出の変動には需要側のショック（リスク・プレミアム、政府支出、投資固有の技術）が大きく寄与し、中長期の産出の変動は主に技術ショックと賃金マークアップ・ショックで説明される。インフレ率の変動には、価格と賃金のマークアップ・ショックが大きく寄与する。

後者の結論、すなわち「インフレの主因は、モデルの外から来るマークアップの変動である」という結果は、10.5節で見るように、DSGEモデルへの批判の焦点の一つになりました。

9.3　歴史分解

9.3.1　考え方

分散分解は「平均的に」どのショックが重要かを示します。これに対して**歴史分解**は、「**ある特定の時期の動き**は、どのショックによるものだったのか」を示します。たとえば「2008年の景気後退のうち、どれだけが金融政策で、どれだけが需要の落ち込みだったのか」という問いです。

手順は次のとおりです。

1. 推定したパラメータのもとで、カルマン平滑化（第7章）により、各期の状態の推定 $\hat{\mathbf{s}}_{t|T}$ を求める。
2. ショックは自己回帰過程に従う状態変数なので、$\hat{\varepsilon}_{j,t} = \hat{s}^{j}_{t|T} - \rho_j \hat{s}^{j}_{t-1|T}$ によって各期の撹乱を復元する。
3. 撹乱を一つずつ取り出し、そのショックだけが起きた場合の観測変数の経路を、状態空間表現で計算する。

命題 9.3 (歴史分解)　復元したショックを $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_T$、初期状態を $\hat{\mathbf{s}}_0$ とすると、

$$\mathbf{z}_t - \mathbf{d} = \sum_{j} \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{H}\mathbf{P}^{k}\mathbf{R}\mathbf{e}_j \, \hat{\varepsilon}_{j,t-k}}_{\text{ショック } j \text{ の寄与}} + \underbrace{\mathbf{H}\mathbf{P}^{t}\hat{\mathbf{s}}_0}_{\text{初期値の寄与}} \tag{9.2}$$

が成り立つ。

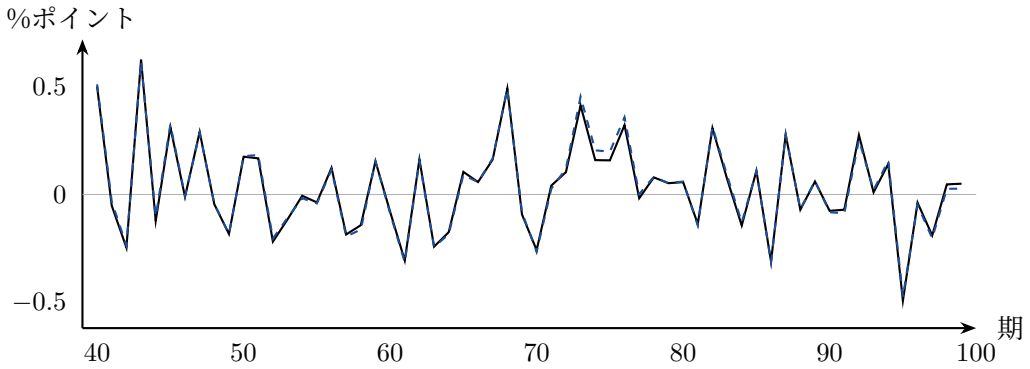
証明. 遷移方程式を $t = 1$ から繰り返し代入すると $\hat{\mathbf{s}}_t = \mathbf{P}^t \hat{\mathbf{s}}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{P}^k \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-k}$ である。測定誤差がなく、平滑化した状態は観測方程式を満たすので、両辺に $\mathbf{H}$ を掛けて $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_j \hat{\varepsilon}_j \mathbf{e}_j$ と書けば(9.2)を得る。 □

この分解の特徴は、**各ショックの寄与の和が、観測データとぴったり一致する**ことです（初期値の寄与は $\mathbf{P}^t$ の縮小によって時間とともに消えていきます）。

9.3.2　ショックの復元は正確か

人工データでは真のショックが分かっているので、復元の精度を確かめられます。

図 9.2　復元した金融政策ショックと真のショック



黒の実線が真の金融政策ショックの撹乱、青の破線がカルマン平滑化で復元したもの（事後平均のパラメータを使用）。第40期〜第99期を表示。

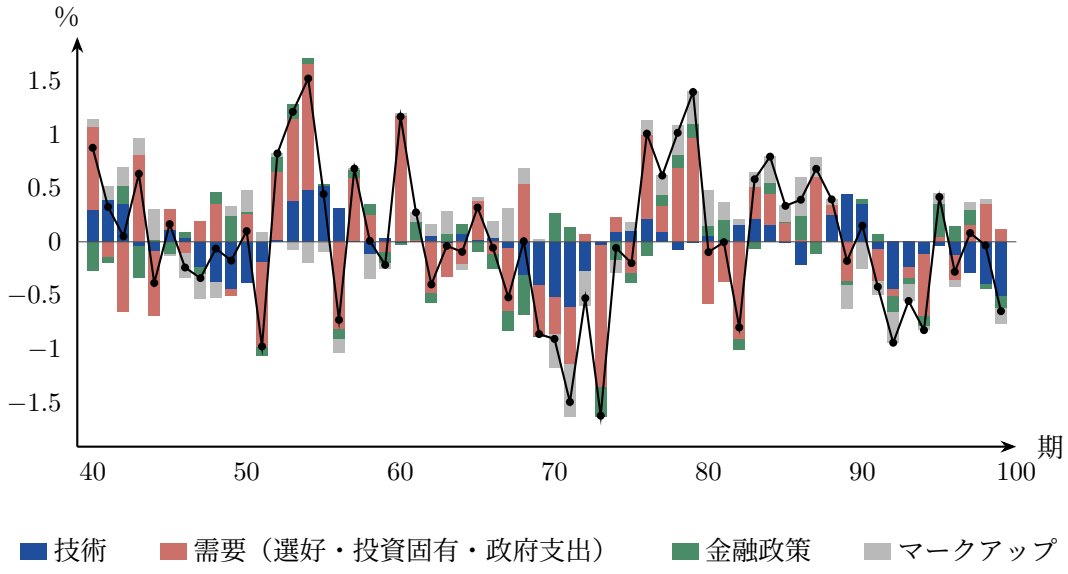
図の読み方

- 二つの線はほとんど重なっていて、全期間での相関係数は0.998です。他の6つのショックでも、相関係数は0.99以上でした。
- この人工データでは、7本の観測変数で7つのショックを識別しており、測定誤差もないので、ショックをほぼ完全に逆算できます。実際のデータでは、モデルの誤特定や測定誤差のために、ここまでの精度は期待できません。

9.3.3　産出成長率の歴史分解

7つのショックを、技術、需要（選好・投資固有・政府支出）、金融政策、マークアップ（価格・賃金）の4グループにまとめて、産出成長率を分解したのが次の図です。

図 9.3　産出成長率の歴史分解



黒の線と点が人工データの産出成長率（平均からの乖離）、棒がショックのグループごとの寄与。各期の棒の合計（正の部分と負の部分の差）が黒の点に一致する。

図の読み方

- 各期で、上に積んだ棒の合計から下に積んだ棒の合計を引くと、黒の点（データ）にちょうど一致します。命題9.3のとおり、データの動きが過不足なくショックの寄与に分解されています。
- この人工データでは、産出成長率の短期の上下動の多くが需要側（主に政府支出）のショックで説明されています。分散分解の表と整合的です。
- 実際の研究では、こうした図を使って「ある景気後退の主因は何だったか」を議論します。ただし、その結論はモデルの構造とショックの解釈に依存します。たとえば、同じ動きを別のモデルでは別のショックに帰するかもしれません。

9.4　予測

状態空間表現があれば、予測も簡単です。最終期の状態の推定 $\hat{\mathbf{s}}_{T|T}$ から、$\hat{\mathbf{z}}_{T+h|T} = \mathbf{d} + \mathbf{H}\mathbf{P}^h\hat{\mathbf{s}}_{T|T}$ で h 期先を予測し、予測の不確実性は命題9.2の分散で表せます。パラメータの不確実性も含めるには、事後分布のサンプルごとに予測を計算して重ね合わせます。

DSGEモデルの予測力については、多くの研究があります。Edge and Gürkaynak (2010) は、米国の中央銀行のスタッフ予測や統計モデルと比べて、DSGEモデルの予測は遜色ないものの、そもそも1990年代以降の安定した時期にはどの方法でも予測は難しかった、と報告しています。DSGEモデルの強みは予測精度そのものより、**予測の背後にある経済的な理由を説明できる**点にある、と考えるのがよいでしょう。

要点：この章のまとめ

- 事後分布のサンプルごとにモデルを解けば、インパルス応答など、パラメータの任意の関数の事後分布が得られる。
- 予測誤差の分散分解は、観測される変動のうち各ショックが占める割合を、予測期間ごとに示す。
- 歴史分解は、平滑化で復元したショックを使い、データの各期の動きを各ショックの寄与に過不足なく分解する。
- 分散分解や歴史分解の結論は、ショックの大きさの推定とショックの解釈に強く依存する。

次の章へ　第9章では、推定したモデルで「起きたこと」を説明しました。次章では、「起きなかったこと」、すなわち政策のやり方を変えていたら経済はどうなっていたかを分析します。そして、そうした分析の信頼性をめぐる議論を見ていきます。

第10章

政策分析とDSGEモデルの評価

> **ここまでの流れ**　第9章で、推定したモデルを使って、ショックの効果や景気変動の内訳を示しました。
> **この章の問い**　中央銀行がインフレにもっと強く反応していたら、経済はどうなっていたのでしょうか。そもそも、DSGEモデルによるこうした分析はどこまで信頼できるのでしょうか。
> **この章で分かること**　構造モデルによる反実仮想分析の手順。インフレの安定と産出の安定のトレードオフ（政策のフロンティア）。第1章のルーカス批判を中規模モデルで確かめること。そして、DSGEモデルへの主な批判と、それに対する応答。

10.1　反実仮想分析とは

第1章で、データの相関関係（誘導形）は政策に依存するので、政策を変えたときの効果を予測するには構造パラメータが必要だ、と述べました。推定したDSGEモデルは、まさにそのための道具です。手順は単純です。

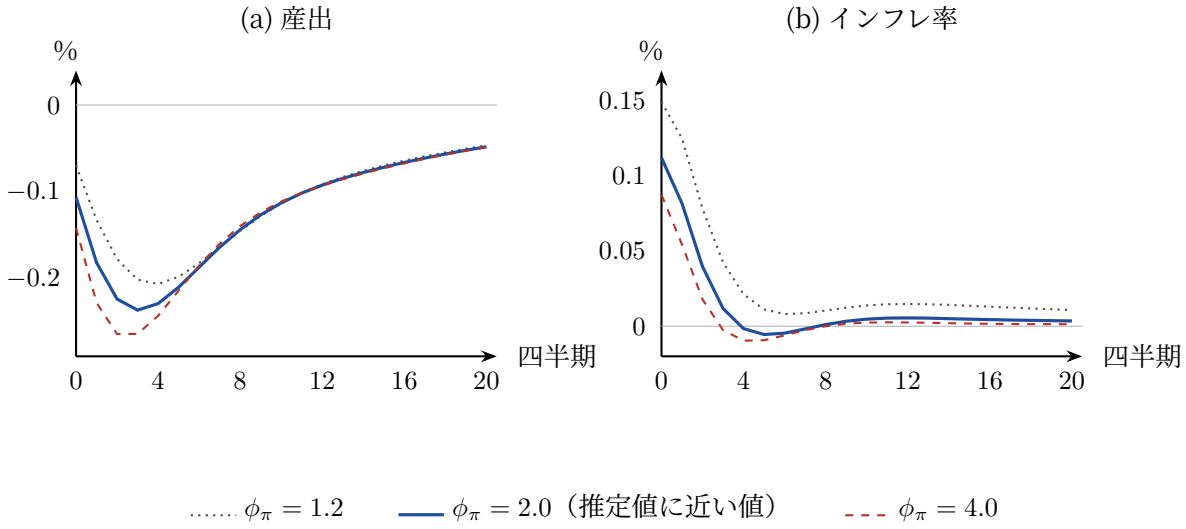
1. 選好・技術・摩擦などの構造パラメータは、推定値に固定する。
2. 金利ルールの係数など、政策のパラメータだけを変える。
3. 新しいパラメータのもとでモデルを解き直し（第5章）、インパルス応答や変数の分散を計算する。

ここで決定的に重要なのは、手順3で**モデルを解き直す**ことです。政策が変われば、家計や企業の将来の予想が変わり、それが今日の行動を変えます。解き直すことで、その効果が自動的に織り込まれます。

10.2　政策ルールを変える

価格マークアップ・ショック、すなわちNK編のコスト・プッシュ・ショックに対する反応を、金利ルールのインフレ反応 ϕ_π を変えて比べてみます。他のパラメータは推定値（事後平均）に固定します。

図 10.1　インフレ反応 ϕ_π を変えたときの、価格マークアップ・ショックへの反応



価格フィリップス曲線に0.1%ポイントの撹乱（持続性0.9）を与えた。ϕ_π 以外のパラメータは推定値（事後平均）に固定。

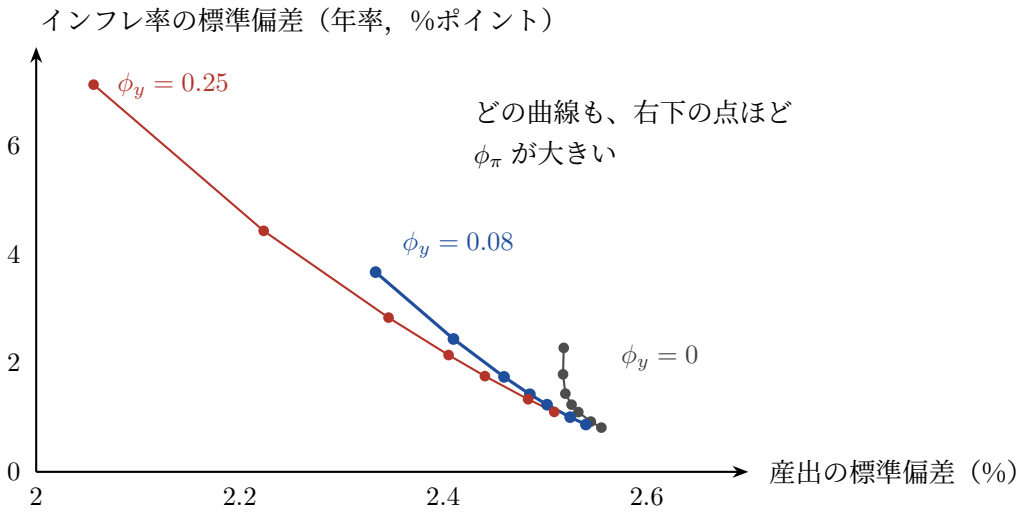
図の読み方

- インフレへの反応を強めるほど（ϕ_π を大きくするほど）、インフレ率の上昇は小さく抑えられます。最大値は $\phi_\pi = 1.2$ で約0.15%、$\phi_\pi = 4.0$ で約0.09%です。
- その代わり、産出の落ち込みは大きくなります。インフレを抑えるために金利をより大きく引き上げ、需要を冷やすからです。
- これは、NK編で見たコスト・プッシュ・ショックのもとでの**インフレ安定と産出安定のトレードオフ**そのものです。中規模モデルでも、この基本的な構図は変わりません。

10.3　政策のフロンティア

一つのショックではなく、7つのショックすべてが起きる経済で、政策ルールが変数の変動の大きさにどう影響するかを見てみます。第5章の命題（リャプノフ方程式）を使えば、変数の無条件標準偏差を直接計算できます。

図 10.2　インフレ率と産出の標準偏差：政策のフロンティア



図の読み方

- どの曲線でも、ϕ_π を大きくすると（右下へ）、インフレ率の変動は大きく減り、産出の変動はわずかに増えます。
- 産出への反応 ϕ_y を大きくすると（灰色から赤へ）、曲線は左上に移ります。産出の変動は小さくなりますが、インフレ率の変動は大きくなります。
- 中央銀行の目的を、たとえば $\mathrm{Var}(\pi) + \lambda \mathrm{Var}(\hat{y})$ のような損失関数で表せば、この図の上で損失が最も小さくなる点を選ぶことで、**最適な単純ルール**を探すことができます。重み λ によって、選ばれる点は変わります。

補足：何を安定させるべきか

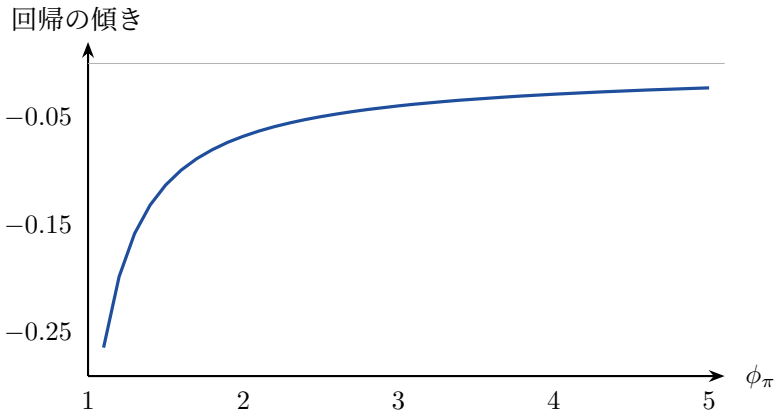
この図では産出の定常状態からの乖離 $\hat{y}_t$ の変動を見ましたが、技術ショックによる産出の変動は効率的な変動であり、安定させるべきではありません。NK編で見たように、厚生の観点から安定させるべきは、伸縮価格のもとでの産出からの乖離（産出ギャップ）です。中規模モデルでも、家計の効用を2次近似すれば、厚生に基づく損失関数を導くことができます（Woodford, 2003）。厚生に基づく損失関数には、価格のばらつきだけでなく賃金のばらつきも入るので、賃金インフレの安定も重要になります（Erceg, Henderson and Levin, 2000）。

10.4　ルーカス批判を確かめる

第1章では、3方程式モデルで「データ上の産出とインフレの関係は、政策ルールの係数に依存する」ことを示しました。中規模モデルでも同じことが成り立つかを確かめます。

推定したモデルで ϕ_π を変えながら、インフレ率を産出に回帰したときの傾き（$\mathrm{Cov}(\pi_t, \hat{y}_t)/\mathrm{Var}(\hat{y}_t)$）を計算したのが次の図です。

図 10.3　政策ルールと「データ上のフィリップス曲線」の傾き



推定値（事後平均）のもとで、インフレ率（四半期）を産出の乖離に回帰したときの母集団の傾き。

図の読み方

- 傾きは負で、しかも ϕ_π によって -0.26 から -0.03 まで大きく変わります。このモデルの価格フィリップス曲線の構造は少しも変わっていないのに、データに現れる関係は政策によって変わるのです。
- 傾きが負になるのは、技術ショックやマークアップ・ショックのように、産出とインフレ率を逆方向に動かす供給ショックが、変動の大きな部分を占めているからです。
- 中央銀行がインフレに強く反応するほど、インフレ率の変動そのものが小さくなり、データ上の関係は平らになります。このように、**観測されるフィリップス曲線の平坦化は、構造の変化ではなく政策の変化によっても生じうる**のです（McLeay and Tenreyro, 2020）。

10.5　DSGEモデルへの批判

ここまでの分析は、モデルが現実を正しく描いているという前提に立っています。その前提はどこまで正しいのでしょうか。DSGEモデルは、とくに2008年の世界金融危機の後、厳しい批判を受けてきました。主な論点を整理します。

10.5.1　ショックは本当に「構造的」か

Chari, Kehoe and McGrattan (2009) は、中規模DSGEモデルのショックの一部、とくに賃金マークアップ・ショックが、本当に政策から独立した構造的なショックなのかを問題にしました。データ上は、賃金マークアップの変動と、家計の労働供給の選好の変動は区別できません。しかし、どちらと解釈するかで、そのショックに中央銀行が対応すべきかどうかという政策的な結論は正反対になります。9.2節で見たように、推定されたモデルでは賃金マ

ークアップ・ショックが労働時間やインフレの大きな部分を説明していたので、この解釈の違いは重大です。

10.5.2 ミクロのデータと合っているか

第1章の発展で触れたように、価格のインデクセーションは、ミクロの価格データではほとんど見られません。Nakamura and Steinsson (2008) は、米国の個別価格のデータから、価格が数か月から1年程度は変わらないことが多いと報告しています。インデクセーションはマクロのインフレの持続性を再現するために置かれた仮定ですが、ミクロ的な裏づけは弱いと言わざるをえません。ルーカス批判の観点から見ると、ミクロの裏づけのない摩擦は、政策が変われば変わりうる「構造的でない」部分かもしれません。

10.5.3 金融危機を予見・説明できたか

2008年の危機以前の標準的な中規模DSGEモデルには、銀行や金融市場の摩擦がほとんど含まれていませんでした。そのため、金融部門から始まった危機を予見できなかっただけでなく、その波及を説明する枠組みももっていませんでした。さらに、危機の後に政策金利がゼロに張り付くと、線形の金利ルールという仮定そのものが成り立たなくなりました。

10.5.4 代表的家計と合理的期待

本書のモデルでは、家計は全員同じで、将来を合理的に予想します。しかし実際には、多くの家計が貯蓄をほとんどもたず、所得の変化にすぐに消費を合わせています。こうした家計の異質性は、金融政策や財政政策の効果の大きさを変えます。また、遠い将来の金利の変化に対して今日の需要が大きく反応するという合理的期待のモデルの性質（フォワード・ガイダンスのパズル）にも、疑問が投げかけられています。

10.6 批判への応答

こうした批判を受けて、DSGEモデルの研究は大きく変わりました。

金融摩擦の導入
: Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) の金融アクセラレーターのような金融摩擦を中規模モデルに加える研究が急速に進みました。Del Negro, Giannoni and Schorfheide (2015) は、金融摩擦を加えたSmets–Wouters型のモデルが、大不況期の産出の大きな落ち込みと、それにもかかわらずインフレ率があまり下がらなかったことを、かなりの程度説明できることを示しました。

ゼロ金利制約と非線形性
: 金利の下限を明示的に扱う非線形の解法や推定法が開発されました（第V部）。

異質的経済主体

家計の異質性を取り入れたHANKモデル（Kaplan, Moll and Violante, 2018）が発展し、金融政策の波及経路についての理解を大きく変えつつあります（第V部）。

期待形成の見直し

家計や企業が遠い将来のことを割り引いて考える「近視眼的」な期待を取り入れたモデル（Gabaix, 2020）など、合理的期待の仮定を緩める試みも進んでいます。

Christiano, Eichenbaum and Trabandt (2018) は、こうした発展を踏まえて、DSGEモデルは危機の教訓を取り込みながら進化しており、政策分析の道具としての価値は失われていないと論じています。一方、Blanchard (2018) は、一つのモデルにすべてを求めるのではなく、理論的な基礎を探るモデル、政策分析のためのDSGEモデル、予測のためのモデル、直感を伝えるための小さなモデルなど、目的に応じて異なる種類のモデルを使い分けるべきだと提案しています。

10.7 DSGEモデルとどう付き合うか

本書の立場をまとめておきます。

DSGEモデルは、経済を完全に描く「正しいモデル」ではありません。それでも、次の三つの点で、他の方法では得がたい価値をもっています。

1. **仮定がすべて明示されている**：結論がどの仮定から来ているのかを、一つずつたどることができます。批判も、どの仮定が問題なのかという具体的な形で行えます。
2. **理論とデータが一つの枠組みで結びついている**：理論のパラメータをデータで推定し、その不確実性まで評価できます。
3. **政策の変更を、期待の変化まで含めて分析できる**：ルーカス批判に正面から答えられる、数少ない方法です。

その一方で、結論はショックの解釈やモデルの摩擦の選び方に強く依存します。DSGEモデルの結果を読むときは、「このモデルでは」という限定を常に意識し、別の仮定のもとでも結論が変わらないかを確かめる姿勢が大切です。

要点：この章のまとめ

- 反実仮想分析では、構造パラメータを固定して政策のパラメータだけを変え、モデルを解き直す。解き直すことで、期待の変化が織り込まれる。
- インフレへの反応を強めるとインフレ率の変動は小さくなるが、産出の変動は大きくなりうる。政策のフロンティアの上で、目的に応じたルールを選ぶ。
- 中規模モデルでも、データ上のフィリップス曲線の傾きは政策ルールによって大きく変わる（ルーカス批判）。
- DSGEモデルには、ショックの解釈、ミクロの裏づけ、金融部門の欠如、代表的家計と合理的期待などの批判がある。研究はそれに応えて、金融摩擦、非線形性、異質性、期待形成の見直しへと進んでいる。

10.8　練習問題

問1　命題9.2で、$h \to \infty$ としたときの分散分解が、第5章のリャプノフ方程式で求めた無条件分散を、ショックごとに分けたものに一致することを説明してください。

問2　歴史分解(9.2)で、初期値の寄与が時間とともに小さくなるのはなぜですか。第5章の命題（解の固有値）と関連づけて答えてください。

問3　図10.2で、$\phi_y = 0$ の曲線では ϕ_π を大きくしても産出の標準偏差がほとんど変わりません。その理由を、技術ショックの役割に注目して考えてください。

補足：解答

問 1　$h \to \infty$ のとき、(9.1)の右辺は $\sum_j \sigma_j^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{H}\mathbf{P}^k\mathbf{R}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j'\mathbf{R}'\mathbf{P}^{k\prime}\mathbf{H}' = \mathbf{H}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}^k\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}'\mathbf{P}^{k\prime}\right)\mathbf{H}'$ になります。括弧の中は、リャプノフ方程式 $\boldsymbol{\Sigma}_s = \mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}_s\mathbf{P}' + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}'$ を繰り返し代入して得られる級数そのもので、無条件分散 $\boldsymbol{\Sigma}_s$ に一致します。$\boldsymbol{\Omega}$ が対角なので、ショックごとの和に分けられます。

問2　初期値の寄与は $\mathbf{H}\mathbf{P}^t\hat{\mathbf{s}}_0$ です。$\mathbf{P}$ の固有値はすべて絶対値が1より小さい（安定な固有値に一致する）ので、$\mathbf{P}^t$ は t とともにゼロに近づきます。ただし、1に近い固有値（資本の調整など）があると、減衰には時間がかかります。本章の図で第40期以降を表示したのは、そのためです。

問3　産出の変動の大きな部分は、持続性の高い技術ショックによるものです。技術ショックによる産出の変動は、価格が伸縮的でも生じる変動であり、金融政策でインフレを安定させても、ほとんど打ち消されません。むしろインフレを安定させることは、価格の硬直性による歪みを取り除き、産出を伸縮価格のもとでの水準に近づけます。そのため、$\phi_y = 0$ のときには ϕ_π を大きくしても産出の変動はほとんど変わらないのです（NK編で見た「神の偶然の一致」に近い状況）。賃金の硬直性やマークアップ・ショックがあるので、完全には一致しません。

第V部へ　第IV部で、DSGEモデルを「作る・解く・推定する・使う」という一連の流れを終えました。最後の第V部では、本書で扱った線形・代表的家計の枠組みを超える、研究の最前線への入口を紹介します。ゼロ金利制約と非線形性、金融摩擦、開放経済、そして異質的経済主体のモデルです。

第Ⅴ部

発展

第11章〜第14章・終章

第V部のはじめに

第I部から第IV部までで、中規模DSGEモデルを「作る・解く・推定する・使う」という一連の流れを学びました。その枠組みには、三つの大きな単純化がありました。

1. **線形性**：モデルを定常状態の周りで1次近似し、線形の方程式として扱いました。
2. **完全な金融市場**：家計は債券を自由に売買でき、企業は資金を自由に調達できるとしました。
3. **代表的家計と閉鎖経済**：家計は全員同じで、海外との取引はないとしました。

第10章で見た批判の多くは、この三つの単純化に向けられたものでした。第V部では、それぞれを緩めた研究の最前線への入口を紹介します。

第11章 ゼロ金利制約と非線形性
: 金利がゼロを下回れないという制約は、線形モデルでは扱えません。制約がどれほど経済を不安定にするのか、そしてフォワード・ガイダンスの効果がなぜ大きすぎるほどに出てしまうのかを見ます。

第12章 金融摩擦
: 企業の資金調達に情報の非対称性があると、企業の純資産がショックの効果を増幅します（金融アクセラレーター）。第I部の中規模モデルに金融摩擦を実際に組み込み、金融政策ショックとリスク・ショックの効果を計算します。

第13章 開放経済
: 為替レートと貿易を通じて、金融政策の波及経路がどう変わるかを見ます。

第14章 異質的経済主体とHANK
: 所得や資産の異なる家計がいると、金融政策の効果がどう変わるのかを、簡単な2主体のモデルから出発して見ていきます。

第V部は入口の紹介なので、各章は本編より短く、発展的な内容が中心です。ただし、金融市場の摩擦はマクロ経済学と金融を結ぶ最も重要な接点の一つなので、第12章はやや詳しく扱います。最後に、DSGE編全体を振り返る終章を置きました。

第11章

ゼロ金利制約と非線形性

> **ここまでの流れ**　本書のモデルはすべて線形に近似してきました。線形モデルでは、ショックの効果はその大きさに比例し、符号を反転させれば反応も反転します。
> **この章の問い**　名目金利がゼロより下げられないとき、経済の反応はどう変わるのでしょうか。また、「将来も低金利を続ける」という約束（フォワード・ガイダンス）は、どれほど効くのでしょうか。
> **この章で分かること**　ゼロ金利制約のもとでの区分線形の解き方。制約が需要ショックの効果を大きく増幅すること。フォワード・ガイダンスのパズル。そして非線形の解法の全体像。

11.1　線形近似が使えないとき

1次近似は、経済が定常状態の近くにとどまり、モデルが滑らかである限り、よい近似を与えます。逆に言えば、次のような場合には線形モデルの結論は信頼できません。

- **不等式の制約がある**：名目金利の下限（ゼロ金利制約）、借入制約など。制約が効いているかどうかで、経済の動き方が切り替わります。
- **ショックが大きい**：金融危機やパンデミックのように、定常状態から大きく離れる場合。
- **リスクそのものが重要**：資産のリスク・プレミアムや予備的貯蓄は、1次近似では消えてしまいます（確実性等価）。リスクを扱うには2次以上の近似が必要です。
- **厚生を評価したい**：第10章で触れたように、厚生の比較には2次の項が効きます。

このうち、金融政策にとって最も切実なのがゼロ金利制約です。2008年以降、米国・欧州・日本の中央銀行は、長い期間にわたって政策金利をゼロ近くに保ちました。

11.2 ゼロ金利制約のもとでの3方程式モデル

11.2.1 モデル

NK編の3方程式モデルに、金利の下限を加えます。ここでは名目金利 i_t を水準で書き、自然利子率を r_t^n とします。

$$\tilde{y}_t = E_t \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n\right) \tag{11.1}$$

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa\, \tilde{y}_t \tag{11.2}$$

$$i_t = \max\left\{0,\ \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t\right\} \tag{11.3}$$

自然利子率は定常状態で ρ ですが、家計の貯蓄意欲が急に高まるなどの需要ショックで一時的に大きく下がり、マイナスになることもあります。

11.2.2 区分線形の解き方

(11.3)の max のために、モデルは「制約が効いていない局面」と「制約が効いている局面（$i_t = 0$）」の二つで別々の線形モデルになります。それぞれの局面の中では線形なので、次の手順で解くことができます（Guerrieri and Iacoviello, 2015）。

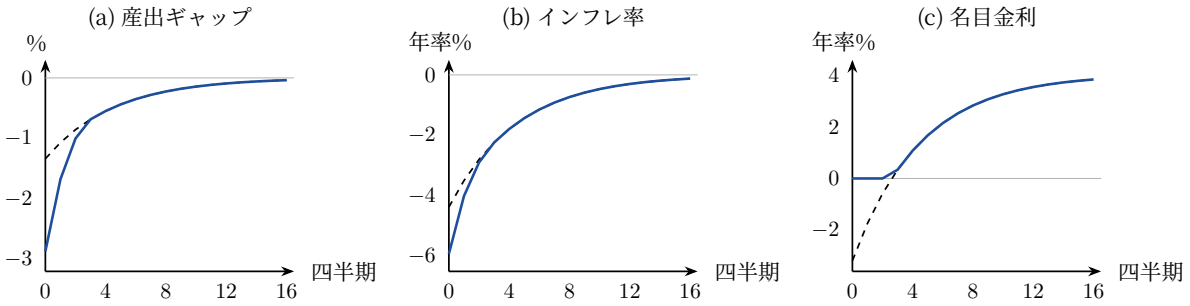
1. 制約が効いている期間を推測する（たとえば、最初は「どの期も効いていない」と推測する）。
2. その推測のもとで、各期に適切な線形の式（$i_t = 0$ またはテイラー・ルール）を使い、全期間の連立方程式を解く。
3. 得られた解で、テイラー・ルールが指示する金利（**影の金利**）$\rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t$ が負になる期を調べ、それを新しい推測とする。
4. 推測が変わらなくなるまで2と3を繰り返す。

ここで重要なのは、手順2で**将来の局面についての推測を含めて**解くことです。家計と企業は「何期先まで金利がゼロにとどまるか」を予想して今日の行動を決めるので、将来の局面が今日の均衡に影響します。

11.2.3 制約は需要ショックを増幅する

自然利子率が一時的に年率4.8%ポイント下がり（定常値の約4%から、マイナス0.8%程度へ）、その後ゆっくり戻る需要ショックを考えます。下限を無視した線形モデルと、下限を考慮したモデルの反応を比べたのが次の図です。

図 11.1　ゼロ金利制約のある場合とない場合の反応



NK編の標準的なカリブレーション（$\sigma = 1$、$\kappa = 0.17$、$\phi_\pi = 1.5$、$\phi_y = 0.125$、定常状態の金利は年率約4%）。自然利子率は第0期に定常値から年率4.8%ポイント下がり、毎期0.8倍ずつ戻る。

図の読み方

- (c) 線形モデルでは、中央銀行は金利を年率マイナス3%程度まで下げて需要を支えます。制約があると金利はゼロで止まり、最初の3期は下限に張り付きます。
- (a)(b) 金利を十分に下げられない分だけ実質金利が高止まりし、産出ギャップの落ち込みは線形モデルの約2倍に、インフレ率の低下もより大きくなります。
- 増幅は「その期に金利を下げられない」ことだけによるのではありません。家計と企業は、**将来も金利を下げられない**ことを予想しています。将来の需要が弱いと予想されれば今日の需要も弱く、インフレ率の低下が予想されれば実質金利がさらに上がる、という悪循環が働くのです。

発展：ゼロ金利のわな

Eggertsson and Woodford (2003) は、自然利子率がマイナスの状態が確率的に続くモデルで、ゼロ金利制約のもとでは産出とインフレが大きく落ち込みうること、そしてそれを和らげるには、将来の金融政策についての約束（物価水準の目標や、低金利の継続の約束）が有効であることを示しました。日本の1990年代末以降の経験は、この分析の大きな動機の一つでした。

11.3　フォワード・ガイダンスのパズル

11.3.1　将来の約束は今日に効く

ゼロ金利制約のもとで中央銀行にできることの一つは、「制約が外れた後も、しばらく金利をゼロに据え置く」と約束することです。これを**フォワード・ガイダンス**と呼びます。

なぜ将来の約束が今日に効くのかは、動学IS曲線(11.1)を前向きに解くと分かります。

命題 11.1 (将来の実質金利の効果)　(11.1)を前向きに繰り返し代入し、$\lim_{T\to\infty} E_t\tilde{y}_{t+T} = 0$ を仮定すると

$$\tilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty} E_t\left(i_{t+j} - \pi_{t+j+1} - r^n_{t+j}\right) \tag{11.4}$$

が成り立つ。したがって、インフレ率を一定とすれば、j 期先の実質金利を1%ポイント下げることが今日の産出ギャップに与える効果は、j によらず $1/\sigma$ である。

証明. (11.1)の $E_t\tilde{y}_{t+1}$ に同じ式を1期先にずらして代入し、繰り返し期待値の法則を使う。T 回代入すると $\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+T} - \frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{T-1} E_t(i_{t+j} - \pi_{t+j+1} - r^n_{t+j})$ であり、$T\to\infty$ とすれば(11.4)を得る。和の各項の係数はすべて $-1/\sigma$ である。 □

数式の読み方：なぜ「パズル」なのか

(11.4)によれば、10年先の金利の約束も、来期の金利の変更と**同じだけ**今日の需要を動かします。直感に反する結果です。しかもインフレ率が反応する場合には、事態はさらに極端になります。遠い将来の低金利の約束は、その間ずっと需要を押し上げてインフレ率を上げ、それが実質金利をさらに下げるので、約束の期間が長いほど今日の効果は加速度的に大きくなるのです。

図 11.2　ゼロ金利の継続期間を延ばす約束の効果

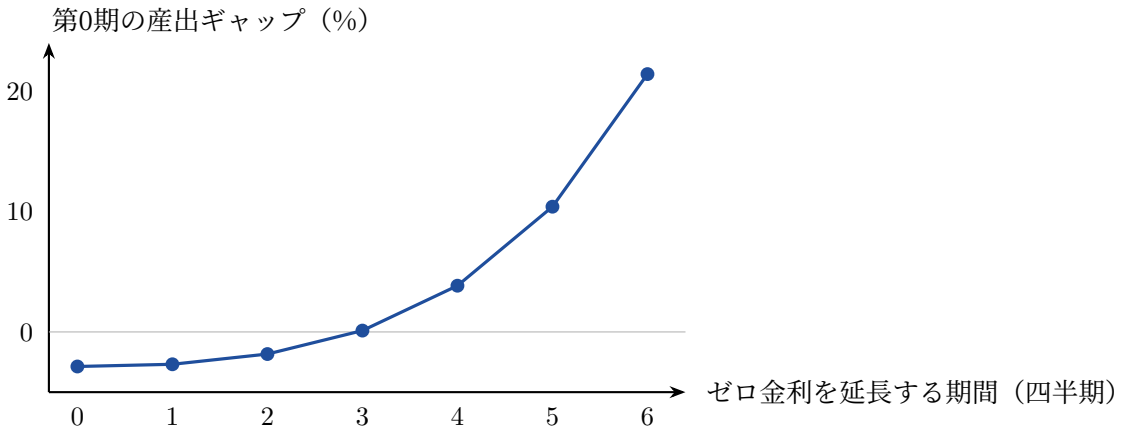


図11.1と同じ需要ショックのもとで、本来ゼロ金利を抜け出す時期からさらに k 四半期、金利をゼロに据え置くと約束した場合の、第0期の産出ギャップ。

図の読み方

- 延長期間が0のとき（約束なし）、産出ギャップは約−2.9%です。延長期間を3四半期にすると、落ち込みはほぼ解消されます。
- ところが延長期間をさらに伸ばすと、効果は急速に大きくなり、6四半期で産出ギャップは+20%を超えます。現実にこのような効果が観察されたことはありません。これが**フォワード・ガイダンスのパズル**（Del Negro, Giannoni and Patterson, 2012）です。

11.3.2 パズルの解き方

パズルの原因は、モデルの家計が遠い将来の金利の変化を完全に信じ、それに全面的に反応することにあります。これを和らげる考え方がいくつか提案されています。

- **所得リスクと借入制約**：McKay, Nakamura and Steinsson (2016) は、家計が所得のリスクと借入制約に直面していると、将来の金利の変化への反応が弱まり、パズルが緩和されることを示しました。第14章の異質的経済主体のモデルにつながる考え方です。
- **限定合理的な期待**：Gabaix (2020) は、家計や企業が遠い将来の出来事を割り引いて認識すると仮定すると、IS曲線の前向きの項に1より小さい係数がかかり、パズルが解消されることを示しました。
- **約束の信認**：中央銀行の約束が完全には信じられていない、と考える立場もあります。

11.4 非線形の解法の地図

ゼロ金利制約以外の非線形性も含めて、DSGEモデルの解法を整理しておきます。

解法	考え方	向いている問題
1次の摂動（本書）	定常状態の周りの1次近似	小さなショック、推定
高次の摂動	2次・3次のテイラー近似	リスク・プレミアム、厚生
区分線形（OccBin）	局面ごとの線形モデルを組み合わせる	ゼロ金利、借入制約
射影法	政策関数を多項式などで全域的に近似	強い非線形性、大きなショック

推定についても、非線形のモデルではカルマンフィルタが使えないので、尤度の計算に**粒子フィルタ**（Fernández-Villaverde and Rubio-Ramírez, 2007）などのシミュレーションに基づく方法が使われます。計算量は大きく増えますが、ゼロ金利期を含むデータを整合的に扱えるようになります。

要点：この章のまとめ

- ゼロ金利制約のもとでは、モデルは局面ごとに異なる線形モデルになり、将来の局面の予想を含めて解く必要がある。
- 制約は需要ショックの効果を大きく増幅する。増幅の源は、将来も金利を下げられないという予想にある。
- 標準的なNKモデルでは、遠い将来の金利の約束が今日の需要を過大に動かす（フォワード・ガイダンスのパズル）。所得リスク、限定合理性などがその解決策として提案されている。

第12章

金融摩擦

> **ここまでの流れ**　本書の中規模モデルでは、企業は必要なだけの資金を、安全資産と同じ金利で調達できました。企業の財務状態は、経済の動きにまったく影響しませんでした。
> **この章の問い**　資金の貸し手と借り手の間に情報の非対称性があると、何が変わるのでしょうか。企業の純資産は、景気の変動をどう増幅するのでしょうか。
> **この章で分かること**　モディリアーニ＝ミラーの定理が成り立たなくなる理由。Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) の外部資金プレミアムと金融アクセラレーター。中規模モデルに金融摩擦を組み込んだときの金融政策ショックの増幅。リスク・ショック。そして、銀行や担保制約を扱う他のアプローチ。

12.1　なぜ金融が実体経済に影響するのか

12.1.1　モディリアーニ＝ミラーの定理

企業が投資の資金を、自己資金でまかなうか借入でまかなうかは、投資の決定に影響するでしょうか。Modigliani and Miller (1958) は、税や取引費用がなく、情報が完全な市場では、資金調達の方法は企業の価値にも投資にも影響しないことを示しました。本書の中規模モデルは、暗にこの世界を想定していました。

しかし現実には、貸し手は借り手の事業の成否を完全には知ることができません。借り手は事業の結果について、貸し手より多くの情報をもっています。この**情報の非対称性**があると、外部から借りる資金は、内部の資金より割高になります。この差を**外部資金プレミアム**と呼びます。

12.1.2　純資産が多いほど借りやすい

外部資金プレミアムの大きさは、借り手の財務状態に依存します。自己資金（純資産）が多い借り手は、事業に失敗しても自分の損失で多くを吸収できるので、貸し手のリスクは小さく、プレミアムも小さくなります。逆に純資産が少ない借り手は、高いプレミアムを払わなければ借りられません。

この関係が、マクロ経済に重要な帰結をもたらします。景気が悪化して資産価格が下がると、企業の純資産が減り、外部資金プレミアムが上がります。すると投資が減り、景気がさ

らに悪化し、資産価格がさらに下がります。この増幅の仕組みを**金融アクセラレーター**と呼びます（Bernanke and Gertler, 1989；Bernanke, Gertler and Gilchrist, 1999）。

12.2 BGGの外部資金プレミアム

12.2.1 費用のかかる状態検証

Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999)（以下BGG）は、Townsend (1979) の**費用のかかる状態検証**（costly state verification）の考え方を使って、外部資金プレミアムを導きました。設定の要点は次のとおりです。

- 企業家は t 期末に資本 K_t を価格 Q_t で買う。自分の純資産 N_t で足りない分 $Q_tK_t - N_t$ を、銀行から借りる。
- 資本の収益には企業家ごとの固有のリスク ω があり、$t+1$ 期の収益は $\omega R^k_{t+1} Q_t K_t$ となる。ω の値は企業家には分かるが、銀行は費用（収益の一定割合）を払わなければ確かめられない。
- 最適な契約は、ω がある閾値を上回れば一定額を返済し、下回れば企業家は破綻し、銀行が費用を払って収益を差し押さえる、という負債契約になる。

この契約を解くと、次の関係が得られます。

命題 12.1 (BGGの外部資金プレミアム)　最適な負債契約のもとで、資本の期待収益率と安全資産の利子率の比は、企業家のレバレッジ（資本の価値と純資産の比）の増加関数となる。

$$\frac{E_t R^k_{t+1}}{R_t} = \chi\left(\frac{Q_t K_t}{N_t}\right), \qquad \chi'(\cdot) > 0 \tag{12.1}$$

定常状態の周りで線形化すると

$$E_t \hat{R}^k_{t+1} - \hat{r}_t = \nu\left(\hat{q}_t + \hat{k}_t - \hat{n}_t\right), \qquad \nu > 0 \tag{12.2}$$

となる。$\hat{r}_t = \hat{\imath}_t - E_t\pi_{t+1}$ は安全な実質金利、ν はプレミアムのレバレッジに対する弾力性である。

導出の要点. 契約は、銀行の期待収益が安全資産の収益に等しくなるという参加制約のもとで、企業家の期待収益を最大にするように選ばれる。レバレッジが高いほど、企業家が破綻する閾値が上がり、破綻の確率と銀行の検証費用の期待値が増える。銀行がその費用を回収するには、企業家がより高い資本収益率を見込める場合にしか貸さないことになるので、資本の期待収益率と安全利子率の比がレバレッジとともに上がる。詳しい導出はBGGの付録を参照のこと。 □

数式の読み方：(12.2)の読み方

左辺は、資本の期待収益率が安全な金利をどれだけ上回るか、すなわち外部資金プレミアムです。右辺の $\hat{q}_t + \hat{k}_t - \hat{n}_t$ は、レバレッジ $Q_t K_t / N_t$ の乖離です。

- 純資産 $\hat{n}_t$ が下がる、あるいは資本の価値 $\hat{q}_t + \hat{k}_t$ が上がってレバレッジが高まると、プレミアムが上がります。
- $\nu = 0$ ならプレミアムは常にゼロで、本書の中規模モデルの投資の条件（第I部の式(4.6)）に戻ります。
- BGGのカリブレーションは、この弾力性がおよそ0.05であることに相当します。数値としては小さく見えますが、次に見るように、純資産の大きな変動と組み合わさると大きな増幅を生みます。

12.3　中規模モデルへの組み込み

12.3.1　追加する式

第I部の中規模モデルに、BGGの金融摩擦を組み込みます。変更点は、トービンの q の式（第I部の式(4.6)）を次の4本で置き換えることだけです。

資本の実現収益率　t 期の資本1単位の収益率は、レンタル料と資本の売却価値を、前期の購入価格で割ったものです。線形化すると

$$\hat{R}^k_t = \big[1 - \beta(1-\delta)\big]\hat{r}^k_t + \beta(1-\delta)\,\hat{q}_t - \hat{q}_{t-1} \tag{12.3}$$

です。

期待収益率とプレミアム

$$E_t \hat{R}^k_{t+1} = \hat{\imath}_t - E_t \pi_{t+1} + \hat{s}_t, \qquad \hat{s}_t = \nu\big(\hat{q}_t + \hat{k}_t - \hat{n}_t\big) + \varepsilon^s_t \tag{12.4}$$

$\hat{s}_t$ は外部資金プレミアム、ε^s_t はプレミアムを外生的に動かす**リスク・ショック**です。リスク・ショックは、企業家の収益の固有リスク ω のばらつきが大きくなることを表します（後述）。

純資産の動き　企業家の純資産は、資本から得た収益から借入の返済を差し引いた残りです。

命題 12.2 (純資産の線形化)　企業家の資本・純資産比率（レバレッジ）の定常値を L とし、借入は名目で契約され、返済額は前期に決めた名目金利にプレミアムを加えたもので決まるとする。定常状態で資本収益率と借入金利の差が小さく、企業家が毎期その純資産の一部を

消費して退出することで、純資産の持続性を表す係数 $\varpi < 1$ が生じるとすると、純資産の乖離は近似的に

$$\hat{n}_t = \varpi\Big[L\,\hat{R}^k_t - (L-1)\big(\hat{\imath}_{t-1} - \pi_t + \hat{s}_{t-1}\big) + \hat{n}_{t-1}\Big] \tag{12.5}$$

に従う。

証明. 生き残った企業家の純資産は $V_t = R^k_t Q_{t-1}K_{t-1} - R^b_{t-1}(Q_{t-1}K_{t-1} - N_{t-1})/\Pi_t$ と書ける。R^b_{t-1} は $t-1$ 期に決まる名目の借入金利、Π_t は t 期の粗インフレ率である。両辺を N_{t-1} で割り、定常状態で $R^k \simeq R^b \simeq R$ として線形化すると

$$\frac{dV_t}{N} \simeq R\Big[L\,\hat{R}^k_t - (L-1)\big(\hat{\imath}^b_{t-1} - \pi_t\big) + \hat{n}_{t-1}\Big]$$

を得る（$Q_{t-1}K_{t-1}$ の変化の項は、R^k と R^b の差に比例するので消える）。借入金利は $\hat{\imath}^b_{t-1} = \hat{\imath}_{t-1} + \hat{s}_{t-1}$ である。企業家が毎期一定の確率で退出し、新規参入者が一定額の資産を受け取るとすれば、N_t は V_t の一定割合に比例して動くので、$\varpi \equiv$ (生存確率) $\times R$ を係数として(12.5)を得る。 □

数式の読み方：純資産の式の読み方

- $L\hat{R}^k_t$：資本の収益が予想を上回ると、純資産はレバレッジ倍に増えます。$L = 2$ なら、収益が1%上がると純資産は2%増えます。
- $-(L-1)(\hat{\imath}_{t-1} - \pi_t + \dots)$：借入の実質的な返済負担が増えると純資産が減ります。借入は名目で契約されているので、**予想外のインフレ率の低下は返済の実質的な負担を重くします**。Fisher (1933) が大恐慌の分析で指摘した**負債デフレ**の経路です。
- $\varpi\hat{n}_{t-1}$：純資産はゆっくりとしか回復しません。一度失われた純資産は、何年にもわたって投資を抑えます。

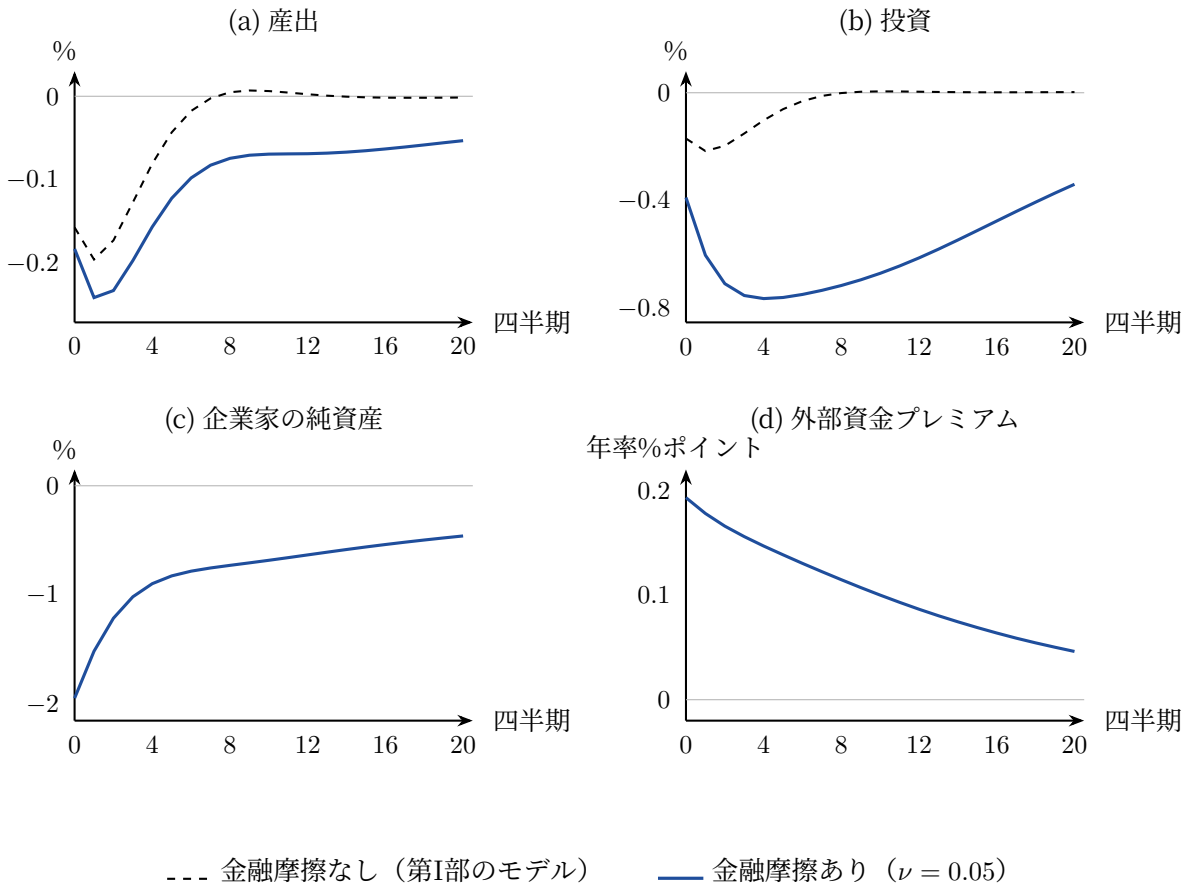
12.3.2 パラメータ

本章の計算では、第I部のパラメータに加えて、BGGに近い値として $\nu = 0.05$、$L = 2$、$\varpi = 0.97$ を使います。プレミアムの弾力性 ν をゼロにすると、第I部のモデルとまったく同じ反応が得られることを、数値的に確かめてあります。

12.4 金融アクセラレーター

第I部と同じ金融政策ショック（名目金利を1期だけ0.25%ポイント引き上げる）への反応を、金融摩擦のあるモデルとないモデルで比べます。

図 12.1　金融アクセラレーター：金融政策ショックへの反応



第I部のパラメータに、$\nu = 0.05$、$L = 2$、$\varpi = 0.97$ を加えて計算した。(c)(d) は金融摩擦のあるモデルのみ。

図の読み方

- (b) 投資の落ち込みは、金融摩擦があると3倍以上になり、しかも数年にわたって続きます。(a) 産出の落ち込みも大きく、長引きます。
- (c) 増幅の源は純資産です。利上げで資本の価格 q が下がり、資本の収益が予想を下回るので、レバレッジのかかった企業家の純資産は約2%も減ります。予想外のインフレ率の低下も、名目の借入の負担を重くして純資産を減らします。
- (d) 純資産が減ってレバレッジが上がると、外部資金プレミアムが上がり、投資の資金調達が割高になります。純資産はゆっくりとしか回復しないので、プレミアムも長く高止まりします。
- このように金融摩擦は、金融政策の効果を**増幅**するとともに、その効果を**長引かせ**ます。

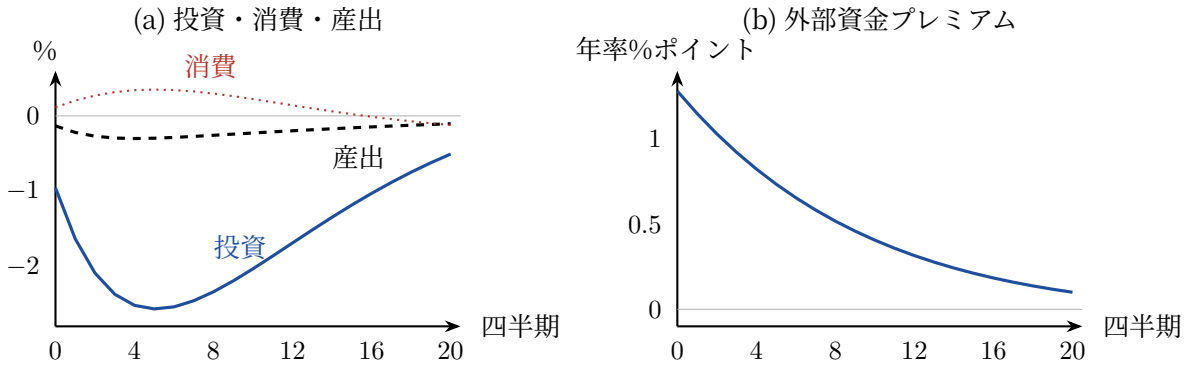
12.5　リスク・ショック

12.5.1　金融部門から来るショック

金融摩擦を入れると、新しい種類のショックを考えられるようになります。(12.4)のリスク・ショック ε_t^s は、企業家の事業の収益のばらつきが大きくなること、すなわち経済の**不確実性の高まり**を表します。ばらつきが大きくなると、同じレバレッジでも破綻の確率が上がるので、銀行はより高いプレミアムを求めます。

Christiano, Motto and Rostagno (2014) は、金融摩擦のある中規模モデルを米国データで推定し、このリスク・ショックが景気変動の最も重要な要因の一つであると報告しました。第9章の発展で触れた、Smets–Wouters型のモデルで投資固有の技術ショックなどに帰されていた変動の多くが、リスク・ショックで説明されるというのです。

図 12.2　リスク・ショックへの反応



プレミアムを年率1%ポイント押し上げるリスク・ショック（持続性0.9）。金融摩擦のあるモデルで計算。

図の読み方

- (b) リスク・ショックはプレミアムを直接押し上げます。さらに純資産の減少がそれに上乗せされるので、当初のプレミアムの上昇はショックそのもの（1%ポイント）を上回ります。
- (a) 資金調達が割高になり、投資は大きく、長く落ち込みます。産出も減少します。
- 一方で、消費は**増えて**います。投資の減少を受けて中央銀行が金利を下げ、家計の貯蓄の誘因が弱まるからです。現実の景気後退では消費と投資はそろって減るので、この単純なモデルでは、リスク・ショックだけで景気後退を再現することはできません。Christiano, Motto and Rostagno (2014) のモデルでは、他の摩擦との組み合わせによって消費と投資がそろって動くようになっています。

補足：消費と投資の同時変動

需要の一部が減ったときに、別の需要項目が金利の低下を通じて増えてしまうのは、多くの一般均衡モデルに共通する性質です。消費と投資の同時変動をどう生み出すかは、景気循環理論の古くからの課題の一つで、金融摩擦のモデルを読むときに注意すべき点です。

12.6　金融摩擦の他のアプローチ

BGGは企業の側の金融摩擦を扱いましたが、金融危機の経験は、銀行や担保の役割にも目を向けさせました。

担保制約（Kiyotaki and Moore, 1997）
借り手は、担保となる資産の価値の範囲内でしか借りられない、とします。資産価格が下がると担保価値が減り、借入と投資が減って、資産価格がさらに下がります。BGGが「価格」（プレミアム）を通じて働くのに対し、こちらは「量」（借入の上限）を通じて働く増幅の仕組みです。家計の住宅担保借入のモデルなどにも広く応用されています。

銀行の自己資本制約（Gertler and Karadi, 2011）
銀行が預金者の資金を持ち逃げできる誘因があるため、預金者は銀行の自己資本に見合う額しか預けない、とします。銀行の自己資本が減ると、銀行の貸出能力が落ち、経済全体の信用が収縮します。中央銀行が直接に信用を供給する非伝統的な金融政策を分析する枠組みとして使われています。

非線形の金融危機（Brunnermeier and Sannikov, 2014）
金融部門の自己資本が十分なときは経済は安定しているが、自己資本が一定の水準を下回ると、資産の投げ売りによって急激な危機に陥る、という強い非線形性をもつ連続時間のモデルです。平常時の線形近似では見えない危機の可能性を描きます。

発展：マクロプルーデンス政策

金融摩擦のモデルでは、個々の借り手や銀行が借入を増やすと、資産価格を通じて他の主体の担保価値や自己資本に影響する、という外部性（金銭的外部性）が生じます。個々の主体はこの外部性を考慮しないので、社会的に望ましい水準より借りすぎることになります。これが、自己資本規制や借入比率の上限といった**マクロプルーデンス政策**の理論的な根拠の一つです。金融政策とマクロプルーデンス政策の役割分担は、現在も活発に研究されている分野です。

要点：この章のまとめ

- 情報の非対称性があると、外部資金は内部資金より割高になり、そのプレミアムは借り手の純資産が少ないほど大きくなる。
- BGGの金融アクセラレーターでは、資産価格の下落が純資産を減らし、プレミアムを上げて投資を減らす。名目の負債は、予想外のデフレを通じてこの経路を強める。
- 中規模モデルに組み込むと、金融政策ショックによる投資の落ち込みは数倍になり、長引く。
- リスク・ショックは金融部門から来る景気変動の源として重視されているが、消費と投資の同時変動を生むには追加の仕組みが要る。
- 担保制約、銀行の自己資本制約、非線形の危機モデルなど、金融摩擦には多様なアプローチがある。

第13章

開放経済

> **この章の問い**　海外と財や資産を取引する経済では、金融政策はどのように波及するのでしょうか。閉鎖経済のNKモデルの結論は、どこまで成り立つのでしょうか。
> **この章で分かること**　金利平価と為替レートの決定。国内のインフレと消費者物価のインフレの違い。小国開放経済のNKモデルが、閉鎖経済のモデルと同じ形に書けること。そして推定された開放経済モデルの特徴。

13.1　開放経済で新しく加わるもの

閉鎖経済のモデルに、海外との取引を加えると、新しい変数と関係が加わります。

- **名目為替レート** $\mathcal{E}_t$（外貨1単位の自国通貨建ての価格）
- **交易条件** S_t（輸入品の価格と自国の生産物の価格の比）
- **二つの物価指数**：自国で生産された財の価格 $P_{H,t}$ と、輸入品を含む消費者物価 P_t

ここでは、Galí and Monacelli (2005) の小国開放経済のモデルを手がかりに、主な関係を見ていきます。小国とは、自国の動きが海外の経済に影響を与えないほど小さい国のことです。

13.2　金利平価

自国の家計が、自国の債券と海外の債券の両方を売買できるとします。両方の債券についてオイラー方程式が成り立つので、両者を比べると、線形化したうえで

$$\hat{\imath}_t - \hat{\imath}_t^* = E_t \Delta e_{t+1} \tag{13.1}$$

が成り立ちます。$\hat{\imath}_t^*$ は海外の金利、$e_t = \ln \mathcal{E}_t$ です。これを**カバーなし金利平価**と呼びます。

数式の読み方：金利平価の読み方

自国の金利が海外より高いなら、投資家が両方の債券を保有し続けるには、自国通貨がその分だけ**減価する**と予想されていなければなりません。そうでなければ、誰もが自国の債券に殺到するからです。
金融政策で自国の金利を上げると、将来の減価の予想と整合的になるように、今日の為替レートはまず大きく**増価**します（Dornbusch (1976) のオーバーシューティング）。この増価は輸入品を安くし、輸出を減らすので、金利の経路に加えて**為替レートの経路**が金融政策の新しい波及経路になります。

補足：金利平価のパズル

実際のデータでは、金利の高い通貨は、金利平価が予想するように減価するどころか、むしろ増価する傾向があることが知られています（フォワード・プレミアム・パズル）。そのため推定に用いる開放経済のDSGEモデルでは、(13.1)にリスク・プレミアムのショックを加えるのが一般的です。

13.3　二つのインフレ率

消費者物価指数は、自国財と輸入品の価格の加重平均です。輸入品の割合を α（開放度）とし、輸入品の価格には一物一価が成り立つとすると、線形化して

$$\pi_t = \pi_{H,t} + \alpha \, \Delta s_t \tag{13.2}$$

が成り立ちます。π_t は消費者物価のインフレ率、$\pi_{H,t}$ は自国財のインフレ率、$s_t = \ln S_t$ は交易条件です。輸入品が相対的に高くなると（$\Delta s_t > 0$）、消費者物価のインフレ率は自国財のインフレ率を上回ります。

この区別は政策にとって重要です。企業が価格を設定するのは自国財なので、NKフィリップス曲線は $\pi_{H,t}$ について成り立ちます。一方、家計の実質所得や賃金交渉に効くのは消費者物価です。中央銀行は、どちらのインフレ率を安定させるべきかを選ばなければなりません。

13.4　閉鎖経済との同型性

Galí and Monacelli (2005) の重要な結果は、小国開放経済のNKモデルが、閉鎖経済の3方程式モデルと**同じ形**に書けることです。

命題 13.1 (小国開放経済のNKモデル)　Galí and Monacelli (2005) の小国開放経済のモデル

では、均衡は次の形にまとめられる。

$$\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma_\alpha}\big(\hat{\imath}_t - E_t\pi_{H,t+1} - r_t^n\big),$$
$$\pi_{H,t} = \beta E_t\pi_{H,t+1} + \kappa_\alpha\tilde{y}_t, \qquad \kappa_\alpha = \lambda(\sigma_\alpha + \varphi).$$

ここで $\sigma_\alpha = \sigma/\big[(1-\alpha)+\alpha\varpi_o\big]$ であり、ϖ_o は自国財と外国財の代替の弾力性などに依存する定数、λ はNK編のカルボ型価格設定から決まる係数である。$\alpha = 0$ なら閉鎖経済の3方程式モデルに一致する。

証明は Galí and Monacelli (2005) および Galí (2015) の第8章に譲ります。要点は、交易条件が国内外の産出の差によって決まり、それを代入すると、開放度は需要の金利感応度と、フィリップス曲線の傾きの**係数を変える**だけになる、という点です。

数式の読み方：同型性の意味

- 開放経済では、金利の変化は国内の需要だけでなく、為替レートを通じて外需にも影響するので、需要の金利感応度 $1/\sigma_\alpha$ が閉鎖経済と異なります。
- 開放経済のフィリップス曲線の傾き κ_α も、為替レートを通じた実質賃金の変化を反映して変わります。
- それでも構造が同じなので、NK編で学んだ決定性の条件（テイラー原理）や最適政策の議論の多くを、ほぼそのまま持ち込むことができます。Galí and Monacelli (2005) は、特定のパラメータのもとでは、自国財のインフレ率を完全に安定させる政策が最適になることを示しています。

13.5　推定される開放経済モデル

中央銀行で使われる開放経済のDSGEモデルは、Smets–Wouters型のモデルに海外部門を加えたものが一般的です。Adolfson, Laséen, Lindé and Villani (2007) は、ユーロ圏のデータを使って、そうしたモデルをベイズ推定しました。主な特徴は次のとおりです。

- **為替レートの転嫁の不完全性**：為替レートが動いても、輸入品の国内価格はすぐには変わらない、という性質をカルボ型の価格設定で表す。
- **金利平価へのリスク・プレミアム**：前述のパズルに対応する。
- **海外部門のVAR**：海外の産出・インフレ・金利を、外生的なVARモデルで表す。

推定や解法の手順は、本書の第II部・第III部とまったく同じです。違うのは、観測変数に為替レートや輸出入が加わり、ショックの数もそれに合わせて増えることです（第6章の確率的特異性を思い出してください）。

要点：この章のまとめ

- 開放経済では、金利平価を通じて為替レートが金融政策の新しい波及経路になる。
- 消費者物価のインフレ率と自国財のインフレ率は交易条件の分だけ異なり、フィリップス曲線は自国財のインフレ率について成り立つ。
- 小国開放経済のNKモデルは閉鎖経済の3方程式モデルと同じ形に書け、開放度は係数を変えるだけである。

第14章

異質的経済主体とHANK

> **この章の問い**　家計の所得や資産が異なると、金融政策の効果はどう変わるのでしょうか。代表的家計のモデルは、何を見落としているのでしょうか。
> **この章で分かること**　貯蓄のない家計を含む2主体（TANK）のモデルで、需要の金利感応度がどう変わるか。不完備市場と限界消費性向の分布。金融政策の直接効果と間接効果。そしてHANKモデルの計算の考え方。

14.1　代表的家計のモデルが見落としていること

本書のモデルの家計は、オイラー方程式に従って消費を決めました。金利が下がると、将来の消費より今日の消費が有利になるので、消費を前倒しします（異時点間の代替）。代表的家計のモデルでは、金融政策は主にこの経路で消費を動かします。

ところが、家計のデータを見ると、多くの家計はほとんど流動的な資産をもたず、所得が入るとすぐに使ってしまいます。こうした家計（**その日暮らしの家計**、hand-to-mouth）にとって、消費を決めるのは金利ではなく、今期の所得です。家計の**限界消費性向**（所得が1円増えたときに消費が何円増えるか）は家計によって大きく異なり、平均すると代表的家計のモデルが示すよりずっと高いことが知られています。

14.2　2主体のモデル（TANK）

最も簡単な異質性として、家計が二つのタイプに分かれるモデルを考えます（Galí, López-Salido and Vallés, 2007；Bilbiie, 2008）。

- 割合 $1-\lambda$ の**貯蓄家計**は、債券を売買し、オイラー方程式に従って消費を決める。
- 割合 λ の**その日暮らし家計**は、資産をもたず、毎期の所得をすべて消費する。

その日暮らし家計の消費（＝所得）の、総産出に対する弾力性を χ とします。つまり、総産出が1%増えると、その日暮らし家計の所得は χ%増えるとします。$\chi>1$ なら景気がよいときにその日暮らし家計の所得がとくに大きく伸びる（たとえば失業の減少が彼らに集中する）ことを、$\chi<1$ なら利潤のように貯蓄家計に偏る所得の割合が大きいことを表します。

命題 14.1 (TANKの動学IS曲線)　財市場の均衡を $\hat{y}_t=\lambda\hat{c}_t^H+(1-\lambda)\hat{c}_t^S$、その日暮らし家計の

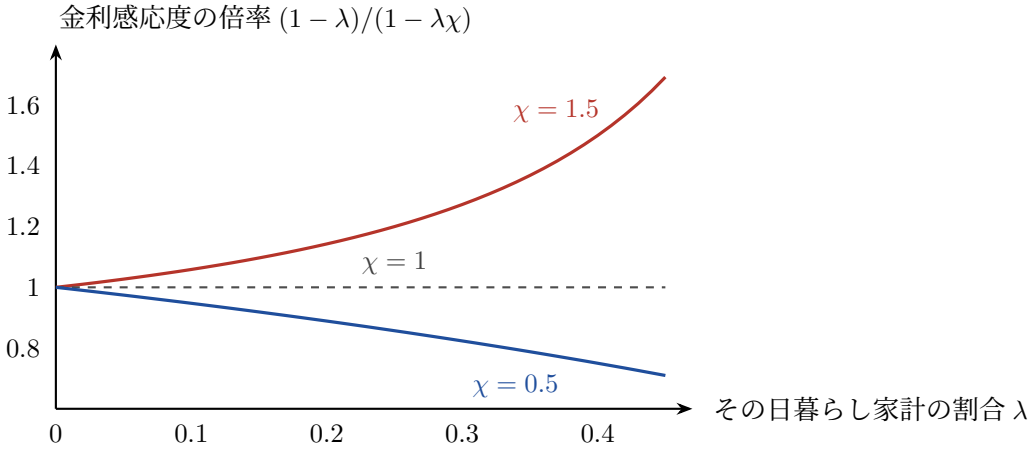
消費を $\hat{c}_t^H = \chi \hat{y}_t$、貯蓄家計のオイラー方程式を $\hat{c}_t^S = E_t \hat{c}_{t+1}^S - \frac{1}{\sigma}\hat{r}_t$ とする（$\lambda\chi < 1$）。このとき総産出は

$$\hat{y}_t = E_t \hat{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1-\lambda}{1-\lambda\chi}\, \hat{r}_t \tag{14.1}$$

に従う。

証明. 財市場の均衡に $\hat{c}_t^H = \chi \hat{y}_t$ を代入すると $(1-\lambda\chi)\hat{y}_t = (1-\lambda)\hat{c}_t^S$、すなわち $\hat{c}_t^S = \frac{1-\lambda\chi}{1-\lambda}\hat{y}_t$ である。これを貯蓄家計のオイラー方程式に代入し、両辺に $\frac{1-\lambda}{1-\lambda\chi}$ を掛ければ(14.1)を得る。 □

図 14.1　その日暮らし家計の割合と需要の金利感応度



(14.1)の係数のうち、代表的家計のモデル（$\lambda = 0$）からの倍率を描いた。

図の読み方

- $\chi = 1$（その日暮らし家計の所得が総産出と同じ割合で動く）なら、その日暮らし家計がどれだけいても、需要の金利感応度は代表的家計のモデルと変わりません。
- $\chi > 1$ なら、その日暮らし家計が多いほど金融政策の効果は**増幅**されます。金利の低下で貯蓄家計が消費を増やすと、総所得が増え、その恩恵を大きく受けるその日暮らし家計がさらに消費を増やす、という乗数効果が働くからです。
- $\chi < 1$ なら、逆に効果は弱まります。どちらになるかは、景気の変動が誰の所得をどれだけ動かすかという、**所得の分配**の問題に帰着します。

14.3 HANKモデル

14.3.1 不完備市場と所得リスク

TANKでは家計のタイプが固定されていましたが、現実の家計は、失業や昇進などの個別のショックによって、貯蓄家計になったりその日暮らし家計になったりします。**HANK**（Heterogeneous Agent New Keynesian）モデルは、次の要素をNKモデルに組み込んだものです。

- 家計は、保険のかけられない個別の所得ショックに直面する（不完備市場）。
- 家計は借入制約のもとで、予備的な動機から資産を蓄える（Aiyagari, 1994）。
- その結果、資産の分布が内生的に決まり、資産の少ない家計ほど限界消費性向が高くなる。

14.3.2 直接効果と間接効果

Kaplan, Moll and Violante (2018) は、流動性の低い資産（住宅など）と流動性の高い資産を区別したHANKモデルで、金融政策の効果を二つに分解しました。

- **直接効果**：金利の変化が、異時点間の代替を通じて家計の消費を直接動かす効果。代表的家計のモデルでは、ほぼすべてがこの効果です。
- **間接効果**：金利の変化が総需要を動かし、労働所得の変化を通じて消費を動かす効果。

彼らのモデルでは、金融政策の消費への効果の大部分が間接効果によるものでした。金融政策の効果が「金利そのもの」より「所得の変化」を通じて現れるなら、財政政策がどう反応するか、所得の変化が誰に及ぶかによって、金融政策の効果も大きく変わることになります。

14.3.3 計算の考え方

HANKモデルの難しさは、状態変数に資産の**分布全体**が入ることです。分布は無限次元なので、第5章の方法をそのまま使うことはできません。いくつかの方法が開発されています。

- **近似集計**（Krusell and Smith, 1998）：家計は分布全体ではなく、平均資産などの少数の統計量だけを見て将来を予測する、と近似する。
- **系列空間ヤコビアン**（Auclert, Bardóczy, Rognlie and Straub, 2021）：総量の経路（金利や所得の時系列）に対する家計全体の反応を、定常状態の周りの線形写像（ヤコビ行列）として一度だけ計算し、それを使って一般均衡を高速に解く。本書の第5章の解法と同じく、総量のショックについては線形近似を使う。

発展：HANKと第11章のパズル

第11章のフォワード・ガイダンスのパズルを思い出してください。HANKモデルでは、借入制約に直面する家計は遠い将来の金利の変化にほとんど反応しないので、集計されたIS曲線の前向きの項が割り引かれます。McKay, Nakamura and Steinsson (2016) は、これがパズルを緩和することを示しました。異質性は、代表的家計のモデルの「おかしな」予測を修正する手段にもなるのです。

要点：この章のまとめ

- 現実の家計の多くは流動的な資産をもたず、限界消費性向が高い。
- TANKモデルでは、その日暮らし家計の所得が景気にどれだけ敏感か（χ）によって、金融政策の効果が増幅も減衰もする。
- HANKモデルでは、金融政策の効果の多くが所得の変化を通じた間接効果となりうる。
- 分布を状態変数にもつモデルを解くために、近似集計や系列空間ヤコビアンなどの方法が開発されている。

終章：DSGE編を振り返って

DSGE編の出発点は、NK編の3方程式モデルを「実際のデータと対話できるモデルに育てる」ことでした。ここまでの道のりを振り返っておきます。

作る（第I部）
: ルーカス批判を出発点に、習慣形成、投資の調整費用、稼働率、賃金の硬直性、インデクセーションといった摩擦を一つずつ加え、15本の線形方程式からなる中規模モデルを組み立てました。どの摩擦も、データのある特徴を再現するために入れられたものでした。

解く（第II部）
: ブランシャール＝カーン条件とQZ分解によって、期待を含む体系を状態空間表現に直しました。中規模モデルでもテイラー原理が成り立つことを、固有値で確かめました。

推定する（第III部）
: 観測方程式でモデルとデータをつなぎ、カルマンフィルタで尤度を計算し、ベイズ推定で事後分布を求めました。人工データの実験では、推定が真のパラメータをよく捉えることを確かめました。

使う（第IV部）
: インパルス応答の不確実性、分散分解、歴史分解、そして政策ルールを変える反実仮想分析を行い、DSGEモデルへの批判とその応答を見ました。

広げる（第V部）
: ゼロ金利制約、金融摩擦、開放経済、異質的経済主体という四つの方向への入口を紹介しました。

次に読むもの

本書の内容をさらに深めるために、次の文献を勧めます。

- **中規模モデルの原典**：Christiano, Eichenbaum and Evans (2005)、Smets and Wouters (2007)。本書のモデルと見比べながら読むと、どこを単純化したかがよく分かります。
- **推定**：Herbst and Schorfheide (2016) は、本書の第III部の内容をより厳密かつ実践的に扱った標準的な教科書です。
- **金融摩擦**：Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999)、Gertler and Kiyotaki (2010) の

ハンドブック論文、そして Brunnermeier and Sannikov (2014)。

- **異質的経済主体**：Kaplan, Moll and Violante (2018)、Auclert, Bardóczy, Rognlie and Straub (2021)。
- **政策と批判**：Christiano, Eichenbaum and Trabandt (2018) と、Oxford Review of Economic Policy の2018年の特集号（Blanchard、Lindé ほか）。

実際に手を動かすには、各部に添付したPythonスクリプトを出発点に、パラメータやショックを変えて計算してみるのが近道です。研究で使う段階になれば、Dynareなどのソフトウェアや Sequence-Space Jacobian のライブラリを使うのが一般的ですが、その内部で何が行われているかは、本書の内容で理解できるはずです。

参考文献

本書の各部で引用・参照した文献を、著者名のアルファベット順にまとめました。

欧文文献

Abel, A. B. (1990) “Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses,” American Economic Review 80(2), 38–42.

Adolfson, M., Laséen, S., Lindé, J., & Villani, M. (2007) “Bayesian Estimation of an Open Economy DSGE Model with Incomplete Pass-Through,” Journal of International Economics 72(2), 481–511.

Aiyagari, S. R. (1994) “Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving,” Quarterly Journal of Economics 109(3), 659–684.

An, S., & Schorfheide, F. (2007) “Bayesian Analysis of DSGE Models,” Econometric Reviews 26(2–4), 113–172.

Auclert, A., Bardóczy, B., Rognlie, M., & Straub, L. (2021) “Using the Sequence-Space Jacobian to Solve and Estimate Heterogeneous-Agent Models,” Econometrica 89(5), 2375–2408.

Bernanke, B. S., Gertler, M., & Gilchrist, S. (1999) “The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework,” Handbook of Macroeconomics 1C, 1341–1393.

Bernanke, B., & Gertler, M. (1989) “Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations,” American Economic Review 79(1), 14–31.

Bilbiie, F. O. (2008) “Limited Asset Markets Participation, Monetary Policy and (Inverted) Aggregate Demand Logic,” Journal of Economic Theory 140(1), 162–196.

Blanchard, O. (2018) “On the Future of Macroeconomic Models,” Oxford Review of Economic Policy 34(1–2), 43–54.

Blanchard, O. J., & Kahn, C. M. (1980) “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations,” Econometrica 48(5), 1305–1311.

Brunnermeier, M. K., & Sannikov, Y. (2014) “A Macroeconomic Model with a Financial Sector,” American Economic Review 104(2), 379–421.

Calvo, G. A. (1983) “Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework,” Journal of Monetary Economics 12(3), 383–398.

Canova, F. (2007) Methods for Applied Macroeconomic Research, Princeton University Press.

Canova, F. (2014) "Bridging DSGE Models and the Raw Data," Journal of Monetary Economics 67, 1–16.

Canova, F., & Sala, L. (2009) "Back to Square One: Identification Issues in DSGE Models," Journal of Monetary Economics 56(4), 431–449.

Carlstrom, C. T., & Fuerst, T. S. (2005) "Investment and Interest Rate Policy: A Discrete Time Analysis," Journal of Economic Theory 123(1), 4–20.

Chari, V. V., Kehoe, P. J., & McGrattan, E. R. (2009) "New Keynesian Models: Not Yet Useful for Policy Analysis," American Economic Journal: Macroeconomics 1(1), 242–266.

Christiano, L. J., Eichenbaum, M. S., & Trabandt, M. (2018) "On DSGE Models," Journal of Economic Perspectives 32(3), 113–140.

Christiano, L. J., Eichenbaum, M., & Evans, C. L. (1999) "Monetary Policy Shocks: What Have We Learned and to What End?" Handbook of Macroeconomics 1A, 65–148.

Christiano, L. J., Eichenbaum, M., & Evans, C. L. (2005) "Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy," Journal of Political Economy 113(1), 1–45.

Christiano, L. J., Motto, R., & Rostagno, M. (2014) "Risk Shocks," American Economic Review 104(1), 27–65.

DeJong, D. N., & Dave, C. (2011) Structural Macroeconometrics, 2nd ed., Princeton University Press.

Del Negro, M., & Schorfheide, F. (2004) "Priors from General Equilibrium Models for VARs," International Economic Review 45(2), 643–673.

Del Negro, M., Giannoni, M. P., & Schorfheide, F. (2015) "Inflation in the Great Recession and New Keynesian Models," American Economic Journal: Macroeconomics 7(1), 168–196.

Del Negro, M., Giannoni, M., & Patterson, C. (2012) "The Forward Guidance Puzzle," Federal Reserve Bank of New York Staff Reports, No. 574.

Dornbusch, R. (1976) "Expectations and Exchange Rate Dynamics," Journal of Political Economy 84(6), 1161–1176.

Durbin, J., & Koopman, S. J. (2012) Time Series Analysis by State Space Methods, 2nd ed., Oxford University Press.

Edge, R. M., & Gürkaynak, R. S. (2010) "How Useful Are Estimated DSGE Model Fore-

casts for Central Bankers?" Brookings Papers on Economic Activity 2010(2), 209–244.

Eggertsson, G. B., & Woodford, M. (2003) "The Zero Bound on Interest Rates and Optimal Monetary Policy," Brookings Papers on Economic Activity 2003(1), 139–233.

Erceg, C. J., Henderson, D. W., & Levin, A. T. (2000) "Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts," Journal of Monetary Economics 46(2), 281–313.

Fernández-Villaverde, J., & Rubio-Ramírez, J. F. (2007) "Estimating Macroeconomic Models: A Likelihood Approach," Review of Economic Studies 74(4), 1059–1087.

Fernández-Villaverde, J., Rubio-Ramírez, J. F., & Schorfheide, F. (2016) "Solution and Estimation Methods for DSGE Models," Handbook of Macroeconomics 2, 527–724.

Fisher, I. (1933) "The Debt-Deflation Theory of Great Depressions," Econometrica 1(4), 337–357.

Fuhrer, J. C. (2000) "Habit Formation in Consumption and Its Implications for Monetary-Policy Models," American Economic Review 90(3), 367–390.

Gabaix, X. (2020) "A Behavioral New Keynesian Model," American Economic Review 110(8), 2271–2327.

Galí, J. (2015) Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle, 2nd ed., Princeton University Press.

Galí, J., & Monacelli, T. (2005) "Monetary Policy and Exchange Rate Volatility in a Small Open Economy," Review of Economic Studies 72(3), 707–734.

Galí, J., López-Salido, J. D., & Vallés, J. (2007) "Understanding the Effects of Government Spending on Consumption," Journal of the European Economic Association 5(1), 227–270.

Gelman, A., & Rubin, D. B. (1992) "Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences," Statistical Science 7(4), 457–472.

Gertler, M., & Karadi, P. (2011) "A Model of Unconventional Monetary Policy," Journal of Monetary Economics 58(1), 17–34.

Gertler, M., & Kiyotaki, N. (2010) "Financial Intermediation and Credit Policy in Business Cycle Analysis," Handbook of Monetary Economics 3, 547–599.

Geweke, J. (1999) "Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development, and Communication," Econometric Reviews 18(1), 1–73.

Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013) Matrix Computations, 4th ed., Johns Hopkins University Press.

Goodfriend, M., & King, R. G. (1997) “The New Neoclassical Synthesis and the Role of Monetary Policy,” NBER Macroeconomics Annual 12, 231–283.

Guerrieri, L., & Iacoviello, M. (2015) “OccBin: A Toolkit for Solving Dynamic Models with Occasionally Binding Constraints Easily,” Journal of Monetary Economics 70, 22–38.

Hamilton, J. D. (1994) Time Series Analysis, Princeton University Press.

Hamilton, J. D. (2018) “Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter,” Review of Economics and Statistics 100(5), 831–843.

Hayashi, F. (1982) “Tobin’s Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation,” Econometrica 50(1), 213–224.

Herbst, E. P., & Schorfheide, F. (2014) “Sequential Monte Carlo Sampling for DSGE Models,” Journal of Applied Econometrics 29(7), 1073–1098.

Herbst, E. P., & Schorfheide, F. (2016) Bayesian Estimation of DSGE Models, Princeton University Press.

Iskrev, N. (2010) “Local Identification in DSGE Models,” Journal of Monetary Economics 57(2), 189–202.

Kalman, R. E. (1960) “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,” Journal of Basic Engineering 82(1), 35–45.

Kaplan, G., Moll, B., & Violante, G. L. (2018) “Monetary Policy According to HANK,” American Economic Review 108(3), 697–743.

Kass, R. E., & Raftery, A. E. (1995) “Bayes Factors,” Journal of the American Statistical Association 90(430), 773–795.

King, R. G., & Watson, M. W. (1998) “The Solution of Singular Linear Difference Systems under Rational Expectations,” International Economic Review 39(4), 1015–1026.

King, R. G., Plosser, C. I., & Rebelo, S. T. (1988) “Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model,” Journal of Monetary Economics 21(2–3), 195–232.

Kiyotaki, N., & Moore, J. (1997) “Credit Cycles,” Journal of Political Economy 105(2), 211–248.

Klein, P. (2000) “Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model,” Journal of Economic Dynamics and Control 24(10), 1405–1423.

Koop, G., Pesaran, M. H., & Smith, R. P. (2013) “On Identification of Bayesian DSGE Models,” Journal of Business & Economic Statistics 31(3), 300–314.

Krusell, P., & Smith, A. A. (1998) “Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy,” Journal of Political Economy 106(5), 867–896.

Kydland, F. E., & Prescott, E. C. (1982) “Time to Build and Aggregate Fluctuations,” Econometrica 50(6), 1345–1370.

Lindé, J. (2018) “DSGE Models: Still Useful in Policy Analysis?” Oxford Review of Economic Policy 34(1–2), 269–286.

Lubik, T. A., & Schorfheide, F. (2003) “Computing Sunspot Equilibria in Linear Rational Expectations Models,” Journal of Economic Dynamics and Control 28(2), 273–285.

Lubik, T. A., & Schorfheide, F. (2004) “Testing for Indeterminacy: An Application to U.S. Monetary Policy,” American Economic Review 94(1), 190–217.

Lucas, R. E. (1976) “Econometric Policy Evaluation: A Critique,” Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1, 19–46.

McKay, A., Nakamura, E., & Steinsson, J. (2016) “The Power of Forward Guidance Revisited,” American Economic Review 106(10), 3133–3158.

McLeay, M., & Tenreyro, S. (2020) “Optimal Inflation and the Identification of the Phillips Curve,” NBER Macroeconomics Annual 34, 199–255.

Modigliani, F., & Miller, M. H. (1958) “The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment,” American Economic Review 48(3), 261–297.

Nakamura, E., & Steinsson, J. (2008) “Five Facts about Prices: A Reevaluation of Menu Cost Models,” Quarterly Journal of Economics 123(4), 1415–1464.

Robert, C. P., & Casella, G. (2004) Monte Carlo Statistical Methods, 2nd ed., Springer.

Roberts, G. O., Gelman, A., & Gilks, W. R. (1997) “Weak Convergence and Optimal Scaling of Random Walk Metropolis Algorithms,” Annals of Applied Probability 7(1), 110–120.

Romer, D. (2019) Advanced Macroeconomics, 5th ed., McGraw-Hill.

Sims, C. A. (2002) “Solving Linear Rational Expectations Models,” Computational Economics 20(1–2), 1–20.

Smets, F., & Wouters, R. (2003) “An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area,” Journal of the European Economic Association 1(5), 1123–1175.

Smets, F., & Wouters, R. (2007) “Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach,” American Economic Review 97(3), 586–606.

Taylor, J. B. (1993) “Discretion versus Policy Rules in Practice,” Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 39, 195–214.

Townsend, R. M. (1979) “Optimal Contracts and Competitive Markets with Costly State Verification,” Journal of Economic Theory 21(2), 265–293.

Uhlig, H. (1999) “A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily,” in R. Marimon & A. Scott (eds.), Computational Methods for the Study of Dynamic Economies, Oxford University Press.

Woodford, M. (2003) Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy, Princeton University Press.

和文文献

加藤涼 (2007)『現代マクロ経済学講義』東洋経済新報社.

※ 書誌情報は公表時点のものです。引用に用いる際は、出版社のページ等でご確認ください。

索引

欧文

DSGEモデルへの批判 115
HANK 142
HPフィルター 68
Kleinの方法 55
QZ分解 54
RBCモデル 49
Simsの方法 59
TANK 140

あ行

新しい新古典派総合 7
鞍点経路 49
一般化固有値 54
インデクセーション 18
インパルス応答 104
インフレ安定と産出安定のトレードオフ 113

か行

階数条件 53
外部資金プレミアム 128
外部習慣 14
価格マークアップ・ショック 21
確率的特異性 71
影の金利 123
カバーなし金利平価 136
カリブレーション 35
カルボ型の価格設定 21
カルマン・ゲイン 78
カルマンフィルタ 79
カルマン平滑化 83
間接効果 142
観測方程式 62
銀行の自己資本制約 134
近似集計 142
均斉成長 33
金融アクセラレーター 129
金利の平滑化 24
金利平価 136
区分線形（OccBin） 123
系列空間ヤコビアン 142
決定性 57
限界消費性向 140
限界代替率 19
交易条件 136
構造VAR 9
構造パラメータ 5
こぶ型の応答 8

さ行

最適な単純ルール 114
最尤法 75
識別 82
事後オッズ 98
事後分布 87
事後モード 92
事前分布 87
資本稼働率 21
資本サービス 15
射影法 126
ジャンプ変数 48
習慣形成 13
修正調和平均法 98
収束の診断 92
周辺尤度 87
小国開放経済 137
詳細つり合い条件 91
状態空間表現 47
情報の非対称性 128
信用区間 90

政策関数 49
政策のフロンティア 113
政府支出ショック 24
摂動法 126
ゼロ金利制約 122
遷移核 90
遷移方程式 60
線形状態空間モデル 70
線形性 121
先決変数 48
潜在的縮小係数 93
その日暮らし家計 140

た行

対数線形化 37
大比率 33
担保制約 134
逐次モンテカルロ法 100
中規模DSGEモデル 7
直接効果 142
貯蓄家計 140
賃金マークアップ・ショック 19
定常状態 30
定常分布 90
テイラー原理 57
投資固有の技術ショック 15
投資の調整費用 15
トービンの q 17
トレースプロット 92

な行

内部習慣 14

は行

バーンイン 93
ハイブリッド型NKPC 23
反実仮想分析 112
費用のかかる状態検証 129
フィリップス曲線
　価格 21
　賃金 21
フォワード・ガイダンス 124
フォワード・ガイダンスのパズル 126
不完備市場 142
負債デフレ 131
ブランシャール＝カーン条件 52
分散分解 106
ベイズ推定 75
ベイズ・ファクター 98

ま行

マクロプルーデンス政策 134
マルコフ連鎖 90
マルコフ連鎖モンテカルロ法 91
ミクロ的基礎 7
未定係数法 59
無限大の固有値 54
名目為替レート 136
メトロポリス＝ヘイスティングス法 91
モディリアーニ＝ミラーの定理 128
モンテカルロ法 90

や行

有効サンプルサイズ 94
誘導形 5
尤度関数 75
予測誤差 59
予測誤差分解 75

ら行

ラプラス近似 98
ランダムウォーク・メトロポリス法 92
リスク・ショック 130
リャプノフ方程式 62
粒子フィルタ 127
ルーカス批判 5
歴史分解 108

DSGEモデル研究マニュアル

版　第1版（2026年11月）
作成　@dokugaku_econ
公開　econ-manuals.netlify.app
組版　XeLaTeX