大学院マクロ攻略マニュアル　第3巻

内生的成長モデル

AKモデル・外部性・独占的競争とマークアップ
拡大バラエティ・準内生的成長・開発会計

このマニュアルは、大学院のマクロ経済学（コアコース）で使う動学モデルを、学部の知識から順に積み上げて理解するための自習用スタディガイドです。第1・2巻の続きとして、全3巻（＋続巻）で、最終的にニューケインジアン・モデルとDSGEモデルを読めるようになることを目標にしています。
枠の色は、**青**＝要点、**赤**＝図の読み方、**灰**＝数式の読み方・計算例・補足、**緑**＝発展（飛ばしても本筋は追えます）です。

目次

序　第3巻の地図：成長率そのものを説明する　4

序.1 外生的成長から内生的成長へ 4

1　AKモデル：収穫逓減を外すと何が起きるか　6

1.1　成長はなぜ止まったのか 6

1.2　AKモデルの設定 7

1.3　AKモデルを解く 7

1.4　政策は成長率を変える 8

1.5　AKモデルの弱点 9

2　知識のスピルオーバーと外部性　11

2.1　学習効果とスピルオーバー 11

2.2 私的収益率と社会的収益率 12
2.3 市場の成長率と最適な成長率 12
2.4 政策：投資補助金 13

3 知識の経済学：非競合性と収穫逓増 15
3.1 財を分類する2つの基準 15
3.2 非競合性は収穫逓増を生む 16
3.3 収穫逓増と完全競争は両立しない 17
3.4 固定費と平均費用 17
3.5 独占のゆがみと研究の誘因 18

4 独占的競争とマークアップ価格設定 19
4.1 独占的競争とは 19
4.2 ディキシット＝スティグリッツ型の集計 19
4.3 費用最小化と需要関数 20
4.4 多様性の利益 21
4.5 マークアップ価格設定 21
4.6 NKモデルではどう使われるか 23

5 Romerモデル：研究開発で品種が増える経済 24
5.1 モデルの全体像 24
5.2 最終財部門：品種が増えると生産性が上がる 25
5.3 中間財部門：独占価格と利潤 26
5.4 特許の価値 26
5.5 研究開発部門と自由参入 26
5.6 均斉成長経路の成長率 27

6 研究開発は多すぎるか少なすぎるか：効率性と政策 30
6.1 社会計画者の成長率 30
6.2 市場の研究を過少にする力・過大にする力 31
6.3 政策の選択肢 31

7 スケール効果と準内生的成長 33

7.1 スケール効果の問題 33
7.2 アイデアの生産関数を一般化する 33
7.3 準内生的成長の成長率 34
7.4 政策の効果：成長率ではなく水準 35

8 開発会計：国の間の所得格差を分解する 37
8.1 成長会計から開発会計へ 37
8.2 資本・産出比率で書き直す 37
8.3 2つの国で計算してみる 38
8.4 多くの国での分解 39
8.5 主な実証結果 39
8.6 TFPの差はどこから来るのか 39

9 3つの成長理論の比較 41
9.1 理論を分ける鍵：蓄積できるものの収穫 41
9.2 理論ごとの予測 42
9.3 データとの対応 42

10 続巻へ：独占的競争からNKモデルへ 44
10.1 NKモデルの企業部門 44
10.2 シリーズ全体の道具の対応表 45

A 確認問題と記号表 46
A.1 確認問題 46
A.2 本巻で加わった記号 47

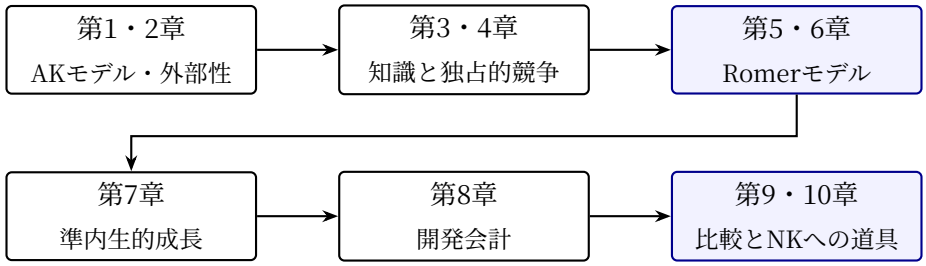
第3巻の地図：成長率そのものを説明する

> **第1・2巻で学んだこと**　ソローモデルでもRCKモデルでも、資本の収穫逓減のため、長期の一人当たり成長率は外から与えた技術進歩率 g に等しくなりました。貯蓄や政策は、所得の**水準**を変えても**成長率**は変えません。
> **第3巻の問い**　長期の成長率は、何によって、どのように決まるのか。政策は成長率を変えられるのか。

序.1　外生的成長から内生的成長へ

第1・2巻のモデルは、成長の「仕組み」をよく説明しますが、成長の「源」である技術進歩率 g は説明していません。g をモデルの中で決める理論を**内生的成長理論**と呼びます。本巻は、次の順で理論を積み上げます。

図 序.1　第3巻の流れ



- **第1・2章**：収穫逓減を外すと成長が止まらなくなること（AKモデル）、そしてそれを知識のスピルオーバー（外部性）で正当化する方法を学びます。
- **第3・4章**：知識（アイデア）が普通の財と違う**非競合性**を持つこと、そのため研究開発には**独占**が必要になることを示し、独占的競争とマークアップ価格設定の道具を準備します。この道具は、続巻のNKモデルの企業部門そのものです。
- **第5・6章**：研究開発で新しい財の種類が増えていくRomerモデルを組み立て、成長率を導き、市場の成長率が最適より低い理由と政策を考えます。
- **第7章**：Romerモデルの予測（人口が多いほど成長が速い）がデータと合わない問題を検討し、準内生的成長モデルを紹介します。
- **第8章**：国の間の所得格差を、資本と技術水準に分解する開発会計を学びます。
- **第9・10章**：3つの成長理論を比較し、本巻で準備した道具がNKモデルでどう使われるかを整理します。

補足：本巻の約束

第1・2巻と同じく離散時間を基本とし、必要に応じて連続時間の結果も示します。家計の最適化（オイラー方程式と横断性条件）、競争均衡、均斉成長経路は、第2巻の道具をそのまま使います。

第1章

AKモデル：収穫逓減を外すと何が起きるか

> **この章の問い**　資本の蓄積だけで、一人当たりの成長を永遠に続けることはできるのか。そのためには生産関数にどんな性質が必要か。
> **この章で分かること**　成長が止まる本当の理由（**限界生産物がゼロに向かうこと**）、最も簡単な内生的成長モデルである**AKモデル**の解き方、その結論（**移行過程がない、政策が成長率を変える**）と弱点です。

1.1　成長はなぜ止まったのか

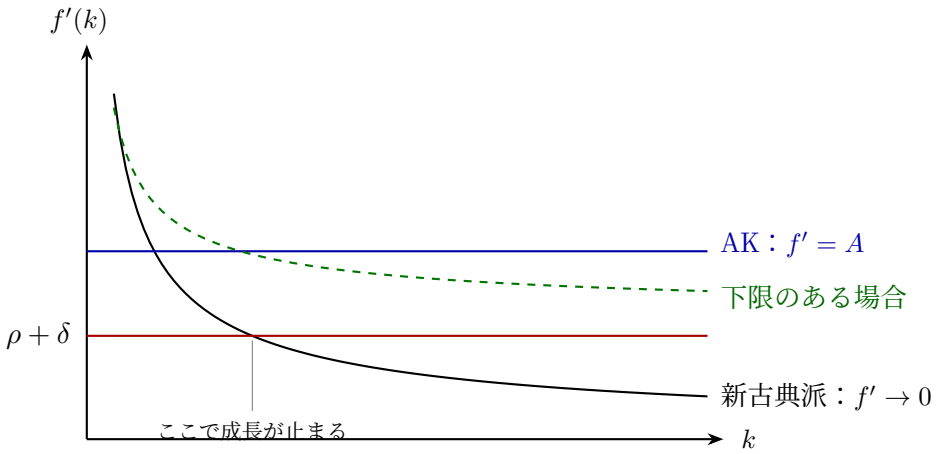
第2巻のRCKモデルで、資本1単位あたりの消費の伸びはオイラー方程式で決まりました。

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{\beta\left[1 + f'(k_{t+1}) - \delta\right]\right\}^{1/\sigma}.$$

消費が成長し続けるには、資本の純収益率 $f'(k) - \delta$ が時間選好率 ρ を**上回り続ける**必要があります。ところが稲田条件 $f'(\infty) = 0$ のもとでは、資本が増えるにつれて収益率はいずれ ρ を下回り、成長は止まります。

逆に言えば、資本の限界生産物に**正の下限**があり、その下限が $\rho + \delta$ より大きければ、成長は止まりません。

図 1.1　資本の限界生産物と成長が続く条件



図の読み方

- 赤の水平線 $\rho+\delta$ は、家計が資本を積み増し続けるのに必要な収益率です。
- 新古典派の生産関数（黒）では、限界生産物は赤の線を下回る点で止まります。それが修正黄金律の定常状態です。
- 限界生産物が赤の線より上にとどまり続ければ（青・緑）、資本の蓄積は止まらず、成長は永遠に続きます。その最も単純な形がAKモデル（青）です。

1.2 AKモデルの設定

生産関数を資本の1次式にします。

$$y_t = A\,k_t, \qquad A>0 \tag{1.1}$$

資本の限界生産物はいつも A で、逓減しません。ここでの k は機械や建物だけでなく、教育や技能（人的資本）、知識なども含む**広い意味の資本**と解釈します。すべての生産要素を蓄積できるなら、それらを同時に増やすことで収穫逓減を避けられる、という考え方です。

家計の問題は第2巻のRCKモデルと同じで、資本の純収益率は $A-\delta$ に固定されます。

1.3 AKモデルを解く

ステップ1（オイラー方程式）：CRRA型効用のもとで

要点：AKモデルの成長率

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = 1+g \equiv \left[\beta(1+A-\delta)\right]^{1/\sigma} \quad\Longrightarrow\quad g \approx \frac{A-\delta-\rho}{\sigma} \tag{1.2}$$

消費の成長率は**最初から一定**で、技術（A、δ）と選好（ρ、σ）で決まります。$A-\delta>\rho$ なら $g>0$ です。

ステップ2（消費関数）：資源制約は $k_{t+1}=(1+A-\delta)k_t-c_t$ です。消費が資本に比例する $c_t=\theta k_t$ と推測すると、$k_{t+1}=(1+A-\delta-\theta)k_t$ なので、資本も一定率で成長します。資本と消費の成長率が等しいことから

$$\theta = (1+A-\delta)-(1+g) > 0.$$

ステップ3（横断性条件）：$\theta>0$、すなわち $1+g<1+A-\delta$ が必要です。これは $\beta(1+g)^{1-\sigma}<1$ と同値で、生涯効用が有限であるための条件（第2巻第3章の補足）になっ

ています。

数式の読み方：AKモデルの3つの特徴

- **成長率が内生的**：g は選好と技術から決まる。我慢強い（ρ が小さい）経済ほど、成長率が**恒久的に**高い。
- **移行過程がない**：c、k、y はすべて最初から同じ率 g で成長する。経済は最初から均斉成長経路の上にいる。
- **収束しない**：貧しい国が速く成長する力が働かない。初期の所得の差は、いつまでも同じ比率で残る。

計算例：数値例

年次で $\beta = 0.97$（$\rho \approx 3.1\%$）、$\sigma = 2$、$A - \delta = 0.07$ とすると

$$1 + g = (0.97 \times 1.07)^{1/2} \approx 1.0188, \qquad g \approx 1.9\%.$$

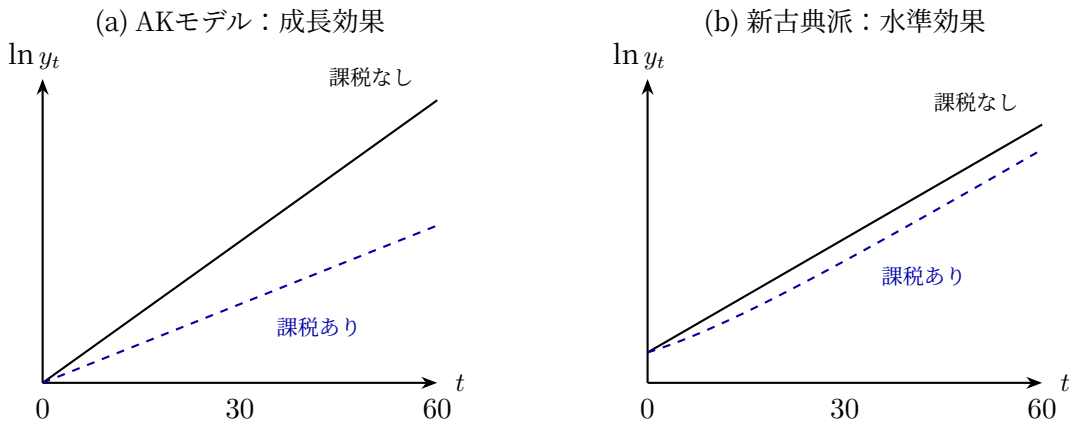
1.4 政策は成長率を変える

資本の純収益に率 τ で課税すると（税収は一括で返すとします）、家計が受け取る収益率は $(1-\tau)(A-\delta)$ になり、

$$1 + g_\tau = \big[\beta\big(1 + (1-\tau)(A-\delta)\big)\big]^{1/\sigma}.$$

上の数値例で $\tau = 0.25$ とすると、成長率は約1.9%から約1.0%に**恒久的に**下がります。

図 1.2　成長効果と水準効果



縦軸は対数目盛。$t = 0$ に資本所得税を導入。

図の読み方

- (a) AKモデルでは、課税によって経路の**傾き**（成長率）が恒久的に下がり、課税なしの経路との差は時間とともに際限なく広がります。これが**成長効果**です。
- (b) 新古典派のモデル（第2巻）では、課税は経路の**高さ**を下げますが、やがて同じ傾きに戻ります。差は一定にとどまる**水準効果**です。
- 同じ政策でも、どちらのモデルで考えるかによって、長期の影響の大きさがまったく違います。内生的成長理論が政策論で注目された理由です。

1.5 AKモデルの弱点

- **指数がちょうど1という仮定**：$y = Ak^{\gamma}$ で $\gamma < 1$ なら成長は止まり、$\gamma > 1$ なら成長率が加速し続けます。$\gamma = 1$ ちょうどでなければ均斉成長にならない、という「**ナイフエッジ**」の仮定に依存しています。
- **データとの不整合**：多くの国で投資率は戦後大きく上がりましたが、成長率が恒久的に上がったわけではありません。また、条件付き収束（第1巻第10章）が観察されることとも合いません。
- **技術の中身がない**：成長の源は「資本を積み上げること」だけで、技術進歩がどこから来るのかは説明していません。

発展：人的資本で成長するモデル

収穫逓減を避けるもう1つの方法は、人的資本の蓄積に注目することです。代表的なルーカス（1988）型のモデルでは、労働者が時間の一部を教育に使い、人的資本が $h_{t+1} = h_t[1 + B(1 - u_t)]$（$u_t$ は働く時間の割合）のように**線形に**増えると仮定します。人的資本の蓄積に収穫逓減がないので、AKモデルと同じく成長が続きます。ここでも「線形性」という仮定が成長を生んでいる点に注意しましょう。

要点

- 成長が続くには、蓄積できる要素の限界生産物が $\rho + \delta$ を上回り続ける必要がある。
- AKモデル：$g \approx (A - \delta - \rho)/\sigma$。移行過程がなく、政策は成長率を恒久的に変える（成長効果）。
- 弱点：指数がちょうど1という仮定、データとの不整合、技術の中身がないこと。

次の章へ　次章では、「資本の指数がちょうど1」という仮定を、企業の間の知識のスピルオーバー（外部性）で正当化します。そのとき、市場の成長率は最適な成長率と一致しなくなります。

第2章

知識のスピルオーバーと外部性

ここまでの流れ　第1章で、資本の限界生産物が逓減しなければ成長が続くことを見ました。しかし、個々の企業の生産関数が収穫逓減を持つのは自然な仮定です。
この章の問い　個々の企業には収穫逓減があるのに、経済全体では収穫逓減がなくなる、ということはありうるのか。そのとき市場の成長率は望ましい水準になるのか。
この章で分かること　**学習効果**と**知識のスピルオーバー**による外部性、**私的収益率**と**社会的収益率**のずれ、市場の成長率が**過小**になる理由と、それを直す**補助金**です。

2.1　学習効果とスピルオーバー

企業が投資をして生産を重ねると、作業のこつや改良のアイデアといった**知識**が生まれます（**学習効果**）。こうした知識の多くは、論文や技術者の移動、製品の観察などを通じて他の企業にも広がります（**スピルオーバー**）。

そこで、経済全体の知識の量が、経済全体の資本の量に比例すると仮定します。企業 i の生産関数を

$$y_i = A\, k_i^{\alpha}\, \bar{k}^{\,1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2.1}$$

とします。k_i は企業 i の（労働者一人当たりの）資本、$\bar{k}$ は経済全体の平均的な資本で、知識の水準を表します。

数式の読み方：生産関数の2つの顔

- **企業から見ると**：$\bar{k}$ は自分では動かせない外の条件です。自分の資本 k_i については指数 $\alpha < 1$ なので、限界生産物は逓減します。
- **経済全体で見ると**：すべての企業が同じなので均衡では $k_i = \bar{k} = k$ となり、$y = A\,k$。経済全体では収穫逓減がなく、第1章のAKモデルと同じ形になります。
- 企業が自分の投資で $\bar{k}$ を押し上げ、他の企業の生産性も高めていることを、企業自身は考慮しません。これが**外部性**（正の外部効果）です。

2.2 私的収益率と社会的収益率

資本を1単位増やしたときの収益は、誰の立場で測るかで変わります。

要点：2つの収益率

- **私的収益率**（企業・家計が受け取る）：$\dfrac{\partial y_i}{\partial k_i} = \alpha A$。市場ではこれが資本の賃料になる。
- **社会的収益率**（経済全体で生まれる）：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}k} = A$（$k_i = \bar{k} = k$ を代入してから微分）。

社会的収益率のうち $(1-\alpha)A$ は、他の企業に波及するスピルオーバーの分で、誰の所得にもならない。

2.3 市場の成長率と最適な成長率

競争均衡：家計は私的収益率 $\alpha A - \delta$ を見て貯蓄を決めるので、

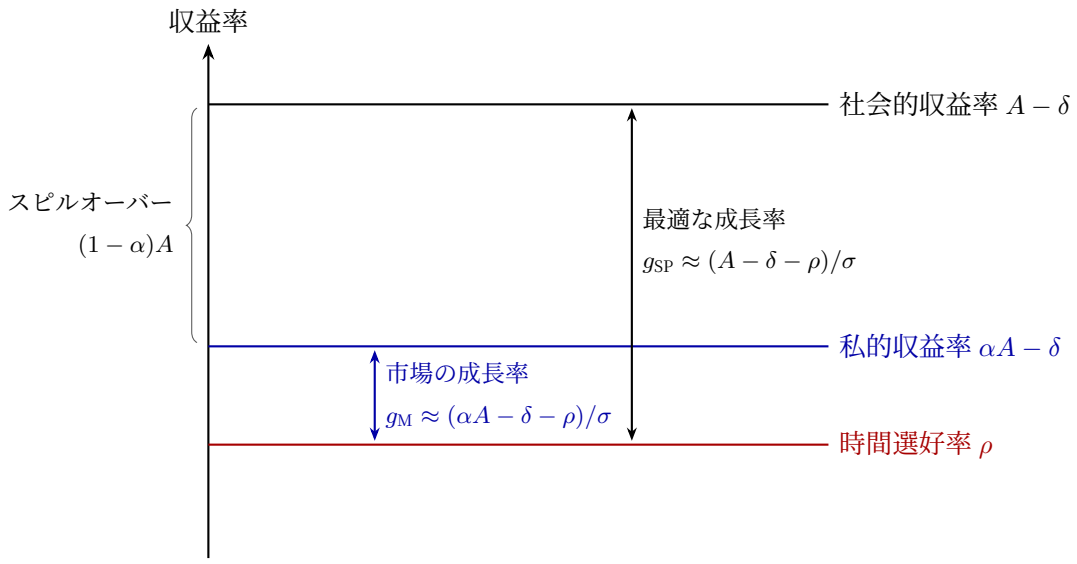
$$1 + g_{\mathrm{M}} = \left[\beta(1 + \alpha A - \delta)\right]^{1/\sigma}.$$

社会計画者：計画者はスピルオーバーを考慮して、社会的収益率 $A - \delta$ で判断するので、

$$1 + g_{\mathrm{SP}} = \left[\beta(1 + A - \delta)\right]^{1/\sigma}.$$

$\alpha < 1$ なので $g_{\mathrm{M}} < g_{\mathrm{SP}}$ です。

図 2.1　収益率と成長率の関係



図の読み方

- 成長率は「収益率が時間選好率をどれだけ上回るか」を σ で割ったものです（第2巻第1章）。
- 家計が受け取るのは私的収益率だけなので、市場の成長率は短い矢印の長さで決まります。
- スピルオーバーの分（左の括弧）は誰の所得にもならないので、貯蓄の誘因に反映されません。その分だけ、市場の成長率は最適な成長率より低くなります。

計算例：数値例

$A = 0.20$、$\alpha = 0.6$、$\delta = 0.05$、$\beta = 0.97$、$\sigma = 2$ とすると、私的な純収益率は 0.07、社会的な純収益率は 0.15 で

$$g_{\mathrm{M}} \approx 1.9\%, \qquad g_{\mathrm{SP}} \approx 5.6\%.$$

外部性が大きいと、市場の成長率と最適な成長率の差は非常に大きくなりえます。

2.4 政策：投資補助金

市場の成長率が低すぎるのは、家計が受け取る収益率が社会的収益率より低いからです。そこで政府が、資本の収益に率 s_K の補助金を出し、その財源を一括税で集めるとします。家計の受け取る収益率が $\alpha A/(1-s_K)$ になるとすると、

$$\frac{\alpha A}{1-s_K} = A \quad \Longleftrightarrow \quad s_K = 1-\alpha$$

で、私的収益率が社会的収益率に一致し、市場の成長率は最適な成長率まで上がります。外部性の大きさ $1-\alpha$ と同じ率の補助金で、ずれをちょうど埋めるのです（**ピグー補助金**）。

補足：第2巻の厚生定理との関係

このモデルでは、第2巻第4章の第1厚生定理が成り立ちません。その前提の1つ「外部性がない」が崩れているからです。市場の失敗があると、政策で配分を改善できる余地が生まれます。第2巻第9章の資本所得税は「ゆがみを持ち込む政策」でしたが、ここでの補助金は「すでにあるゆがみを直す政策」です。

発展：「知識は平均の資本に比例する」という仮定

式(2.1)では、知識が経済全体の**平均**の資本 $\bar{k}$ に比例すると仮定しました。もし知識が経済全体の資本の**総量** $\bar{K} = \bar{k}L$ に比例するなら、$y = A\,k\,L^{1-\alpha}$ となり、人口（労働者数）L が多い国ほど成長率が高くなります。この「規模が大きいほど成長が速い」という**スケール効果**は、第7章で中心的な問題になります。

要点

- 知識のスピルオーバーがあると、企業レベルでは収穫逓減でも、経済全体ではAK型になりうる。
- 私的収益率 αA は社会的収益率 A より低く、市場の成長率は最適な成長率より低い。
- 率 $1-\alpha$ の投資補助金で、市場の成長率を最適な水準に引き上げられる。
- ただし「経済全体で指数がちょうど1」というナイフエッジの仮定はなお残っている。

次の章へ　AKモデルの「資本」は、結局のところ知識の代わりでした。次章では、知識そのものの性質（非競合性）を正面から考え、なぜ知識が成長を生むのか、そしてなぜ知識を生み出すには独占が必要なのかを見ます。

第3章

知識の経済学：非競合性と収穫逓増

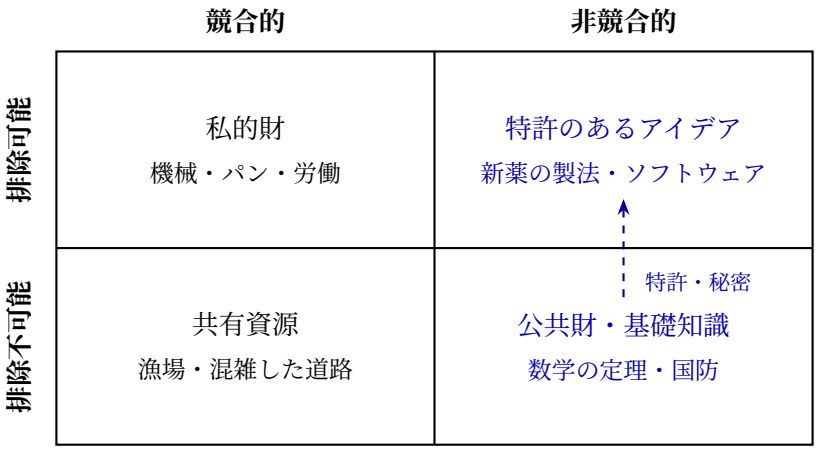
> **ここまでの流れ**　第1・2章のモデルでは、成長を生むのは「資本」でしたが、その本当の中身は知識でした。
> **この章の問い**　知識（アイデア）は、機械や労働とどこが違うのか。その違いは、成長と市場の仕組みにどんな意味を持つのか。
> **この章で分かること**　知識の**非競合性**と**部分的な排除可能性**、非競合性が生む**収穫逓増**、そして収穫逓増のもとでは完全競争では研究が行われず、**独占**（特許）が必要になる理由です。

3.1　財を分類する2つの基準

経済学では、財を次の2つの基準で分類します。

- **競合性**：ある人が使うと、他の人が同時に使えなくなるか。パンや機械は競合的です。
- **排除可能性**：対価を払わない人の利用を止められるか。所有権や特許、秘密によって決まります。

図 3.1　財の分類とアイデアの位置



図の読み方

- 資本や労働は、左上の「私的財」です。1台の機械を2つの工場で同時に使うことはできません。
- アイデアは右側の**非競合的**な財です。設計図や化学式は、何人が同時に使っても減りません。
- アイデアの排除可能性は、技術ではなく**制度**（特許や企業秘密）で決まります。基礎研究の成果は誰でも使える（右下）一方、特許で守られたアイデアは対価を払わないと使えません（右上）。

3.2 非競合性は収穫逓増を生む

生産関数を、資本 K、労働 L、アイデアの量 A の関数 $Y = F(K, L, A)$ とします。

複製の議論：工場をもう1つ建て、資本と労働を2倍にすれば、産出は2倍になるはずです。このとき設計図を2倍にする必要はありません。同じ設計図をもう1つの工場でも使えるからです（非競合性）。したがって

$$F(2K, 2L, A) = 2F(K, L, A)$$

（K, L について1次同次）。すると、アイデアも含めてすべてを2倍にすれば

$$F(2K, 2L, 2A) > 2F(K, L, A) \tag{3.1}$$

となり、K, L, A の全体については**収穫逓増**です。

数式の読み方：収穫逓増が成長を生む理由

- 資本だけを増やすと収穫逓減ですが、アイデアを増やせば、すべての工場・すべての労働者の生産性が同時に上がります。アイデアは一度作れば経済全体で使い回せるからです。
- 人口が増えればアイデアを使う人も増えるので、1つのアイデアの価値は経済の規模とともに大きくなります。これが、第7章の「人口と成長」の議論の出発点です。

3.3　収穫逓増と完全競争は両立しない

完全競争の市場では、各要素は限界生産物を報酬として受け取ります。K, L について1次同次なら、オイラーの定理（第1巻第8章）より

$$F_K K + F_L L = F(K, L, A)$$

で、資本と労働への支払いだけで産出が**ちょうど使い尽くされます**。アイデアにも限界生産物を払おうとすると

$$F_K K + F_L L + F_A A > F(K, L, A)$$

となり、支払いが産出を上回って赤字になります。

要点：知識の生産には独占が必要

完全競争では、アイデアを生み出した人に報酬を払う余地がない。そのため、研究開発に費用をかける人がいなくなる。研究開発が行われるためには、アイデアを使う財の価格が**限界費用を上回る**必要があり、そのためには何らかの**独占力**（特許など）が欠かせない。

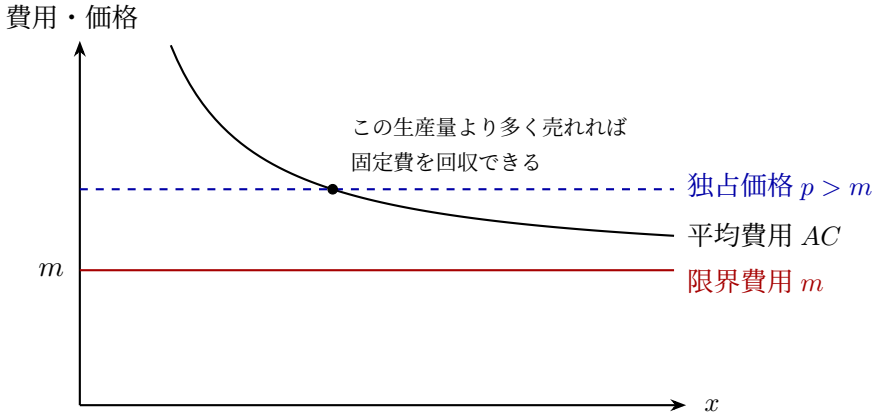
3.4　固定費と平均費用

同じことを費用の面から見ます。新しい財を作るには、まず研究開発の**固定費** F がかかり、その後は1単位あたり一定の**限界費用** m で生産できるとします。平均費用は

$$AC(x) = \frac{F}{x} + m$$

で、生産量 x とともに下がり続け、いつも限界費用 m より高くなります。

図 3.2　固定費があるときの費用と価格



図の読み方

- 平均費用（黒）は、固定費が多くの単位に分散されるので右下がりで、限界費用（赤）に近づきますが、決して下回りません。
- 価格を限界費用に等しくする（完全競争）と、どれだけ売っても平均費用を下回るので、固定費は永遠に回収できません。
- 価格を限界費用より高く設定できれば（青の破線）、十分な数量を売ることで固定費を回収できます。これが研究開発の報酬です。

3.5 独占のゆがみと研究の誘因

特許による独占は、研究の誘因を生む一方で、価格を限界費用より高くするため、本来なら作られるべき量が作られないという**ゆがみ（死荷重）**を生みます。

- 特許を強くする（期間を長く、範囲を広く）と、研究の誘因は増えるが、独占のゆがみも大きくなる。
- 特許を弱くすると、ゆがみは減るが、研究も減る。

最適な特許制度は、この**トレードオフ**の釣り合いで決まります。研究補助金や公的研究機関など、独占に頼らずに研究を促す政策が使われるのも、このためです。

要点

- アイデアは非競合的で、排除可能性は制度で決まる。
- 非競合性のため、K, L, A の全体では収穫逓増になる。
- 収穫逓増のもとでは完全競争で研究の報酬を払えず、価格が限界費用を上回る独占力が必要になる。

次の章へ　独占力を持つ多くの企業がそれぞれ少しずつ違う財を作る、という市場をモデルにするための道具が**独占的競争**です。次章でその道具を丁寧に準備します。これは続巻のNKモデルの企業部門と同じ道具です。

第4章

独占的競争とマークアップ価格設定

> **ここまでの流れ**　第3章で、アイデアを生み出すには独占力が必要であることを見ました。
> **この章の問い**　多くの企業がそれぞれ少しずつ違う財を作り、各企業が自分の財の価格を決める市場は、どうモデル化すればよいのか。
> **この章で分かること**　**ディキシット＝スティグリッツ型の集計**、そこから導かれる**需要関数**と**価格指数**、**多様性の利益**、そして**マークアップ価格設定**です。この章の道具は、Romerモデル（第5章）と続巻のNKモデルの両方で、まったく同じ形で使います。

4.1　独占的競争とは

独占的競争とは、次の2つの性質を同時に持つ市場です。

- **独占的**：各企業は、自分だけが作る差別化された財（品種）の唯一の売り手なので、価格を自分で決められる。
- **競争**：企業の数が多く、1つの企業の価格は経済全体の価格水準や需要の大きさに影響しない。

レストランや衣料品のブランドのように、それぞれ少しずつ違う商品が多数並ぶ市場をイメージしてください。

4.2　ディキシット＝スティグリッツ型の集計

品種 $i = 1, \dots, A$ の財 x_i を、1つの「合成財」X にまとめる関数を

要点：CES型の集計関数

$$X = \left(\sum_{i=1}^{A} x_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \qquad \varepsilon > 1 \tag{4.1}$$

とします。ε は品種どうしの**代替の弾力性**です。

数式の読み方：ε の意味

- ε が大きいほど、品種どうしは似ていて、互いに代わりになりやすい。$\varepsilon \to \infty$ では完全な代替財になり、普通の完全競争の市場に近づきます。
- ε が小さいほど品種は差別化されていて、各企業の独占力は強くなります。
- NKモデルでは、品種の数を連続体 $i \in [0,1]$ とし、和の代わりに積分 $\left(\int_0^1 x_i^{(\varepsilon-1)/\varepsilon}\mathrm{d}i\right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)}$ で書きます。計算の手順は同じです。

4.3 費用最小化と需要関数

合成財 X を作りたい買い手（最終財の企業、NKモデルでは家計）は、品種の価格 p_i を所与として、決められた X を最も安く手に入れる組合せを選びます。

$$\min_{\{x_i\}} \sum_i p_i x_i \quad \text{s.t.} \quad \Big(\sum_i x_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\Big)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = X.$$

乗数を μ とおいて x_i で微分すると

$$p_i = \mu\Big(\sum_j x_j^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\Big)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} x_i^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \mu\, X^{\frac{1}{\varepsilon}} x_i^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

これを x_i について解き、さらに集計関数に戻して μ を求めると（μ は合成財1単位の値段なので価格指数 P になります）、次の結果が得られます。

要点：需要関数と価格指数

$$x_i = \left(\frac{p_i}{P}\right)^{-\varepsilon} X, \qquad P = \Big(\sum_{i=1}^{A} p_i^{1-\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \qquad \sum_i p_i x_i = P\,X \tag{4.2}$$

数式の読み方：需要関数の読み方

- 品種 i の需要は、**相対価格** p_i/P と全体の需要の大きさ X で決まります。他の企業より1%高い価格をつけると、需要は ε% 減ります（価格弾力性が一定）。
- 1つの企業は P や X を動かせないので、自分の需要曲線を所与として価格を選びます。これが独占的競争の「競争」の部分です。
- P は合成財1単位の値段（**価格指数**）で、支出総額は PX にまとまります。NKモデルの「物価水準」はこの P です。

4.4 多様性の利益

すべての品種の価格が同じ p なら、$P = A^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p$ です。$\varepsilon > 1$ なので、**品種の数 A が多いほど、合成財は安くなります**。同じ支出でも、品種が多ければより多くの合成財が手に入るのです。これを**多様性の利益**と呼びます。

計算例：品種を増やす効果

総量 Z を A 種類に等しく分けると、$x_i = Z/A$ で

$$X = \left(A \cdot (Z/A)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = A^{\frac{1}{\varepsilon-1}} Z.$$

投入の総量 Z が同じでも、品種の数が増えれば合成財 X は増えます。「同じ資源を少しずつ多くの種類に使うほうが生産的」ということで、第5章のRomerモデルでは、これが技術進歩そのものになります。

4.5 マークアップ価格設定

品種 i を作る企業は、需要関数(4.2)を所与として、利潤を最大にする価格を選びます。限界費用を MC（一定）とすると

$$\max_{p_i} \, (p_i - MC)\, x_i(p_i), \qquad x_i(p_i) = \left(\frac{p_i}{P} \right)^{-\varepsilon} X.$$

p_i で微分すると、$x_i'(p_i) = -\varepsilon x_i / p_i$ を使って

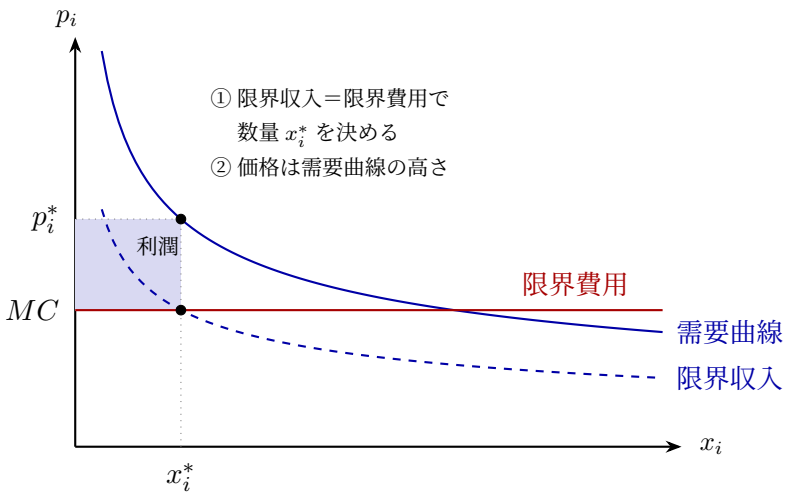
$$x_i + (p_i - MC)\left(-\varepsilon \frac{x_i}{p_i} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_i = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} MC.$$

要点：マークアップ価格設定

$$p_i = \mathcal{M} \cdot MC, \qquad \mathcal{M} \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} > 1, \qquad \frac{p_i - MC}{p_i} = \frac{1}{\varepsilon} \tag{4.3}$$

価格は限界費用に一定の比率 $\mathcal{M}$（**マークアップ**）をかけたもの。価格と限界費用の差の割合（ラーナー指数）は需要の弾力性の逆数。

図 4.1　需要曲線とマークアップ

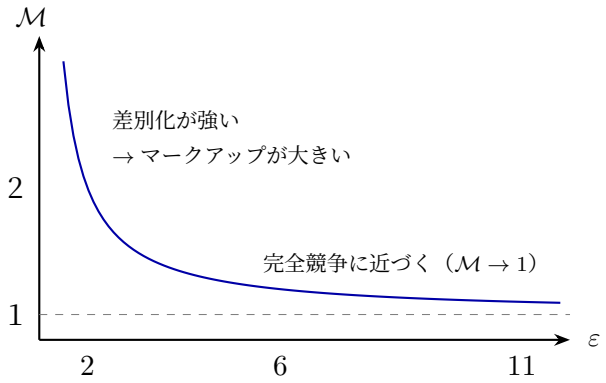


$\varepsilon = 2.5$（マークアップ約1.67）の場合。

図の読み方

- 需要の弾力性が一定なので、限界収入（破線）は需要曲線（実線）をいつも同じ割合 $1 - 1/\varepsilon$ だけ縮めた曲線になります。
- 企業は限界収入が限界費用に等しい数量を選び、その数量で買い手が払ってもよい価格（需要曲線の高さ）をつけます。
- 価格と限界費用の差に数量をかけた長方形（青）が、毎期の利潤です。Romer モデルでは、この利潤が研究開発の報酬になります。

図 4.2　代替の弾力性とマークアップ



図の読み方

- ε が小さい（品種が差別化されている）ほど、需要が価格に反応しにくいので、企業は大きなマークアップをつけられます。
- NKモデルの標準的なカリブレーションでは $\varepsilon \approx 6$（マークアップ約1.2）がよく使われます（$\varepsilon = 6$ の目盛）。

4.6 NKモデルではどう使われるか

補足：この章の道具とNKモデルの対応

- **家計の消費**：NKモデルでは、家計が多くの品種の消費財を式(4.1)の形で集計して消費します。需要関数(4.2)が、各企業の直面する需要曲線になります。
- **実質限界費用**：価格が伸縮的なら $p_i = \mathcal{M} \cdot MC$ なので、実質限界費用 MC/P は一定の $1/\mathcal{M}$ です。価格が硬直的だと、実質限界費用（＝マークアップの逆数）が景気とともに変動し、それがインフレ率を動かします（NKフィリップス曲線）。
- **独占のゆがみ**：マークアップがあると産出は効率的な水準より低くなります（第3章の死荷重）。NKモデルでは、この定常状態のゆがみを、雇用への補助金で取り除いてから分析することがよくあります。
- **価格改定**：価格を変えられる機会がランダムにしか来ない場合、企業は「当面のあいだの限界費用の予想」にマークアップをかけた価格を選びます。この問題の解き方が、続巻の中心的な内容の1つです。

要点

- CES型の集計から、需要関数 $x_i = (p_i/P)^{-\varepsilon} X$ と価格指数 P が導かれる。
- 品種が多いほど合成財は安くなる（多様性の利益）。
- 需要の弾力性が一定なので、最適な価格は限界費用の一定倍：$p = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} MC$。

次の章へ　道具がそろいました。次章では、研究開発によって品種の数が増え続けるRomerモデルを組み立てます。

第5章

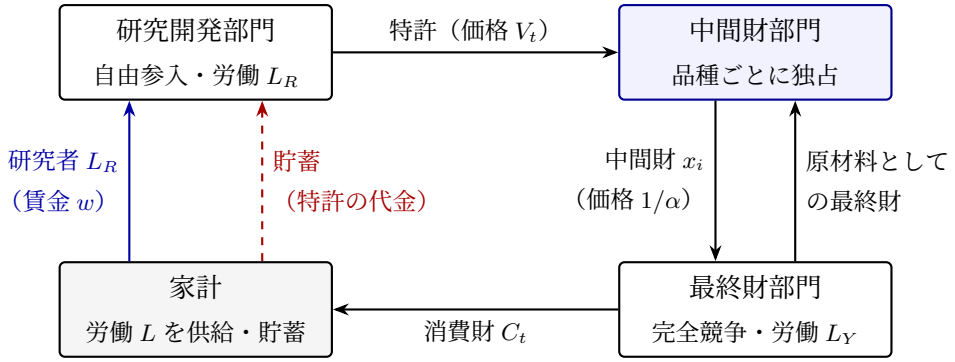
Romerモデル：研究開発で品種が増える経済

ここまでの流れ　第3章でアイデアには独占力が必要なこと、第4章で独占的競争とマークアップの道具を準備しました。
この章の問い　企業が利潤を求めて研究開発を行い、新しい種類の財が増え続ける経済では、成長率はどう決まるのか。
この章で分かること　Romerの**拡大バラエティ・モデル**の構造（最終財・中間財・研究開発の3部門）、独占利潤と**特許の価値**、**自由参入条件**、そして**均斉成長経路の成長率**です。

5.1　モデルの全体像

経済には、家計と3つの部門があります。技術水準は「利用できる中間財の**品種の数** A_t」で表され、研究開発によって増えていきます。

図 5.1　Romerモデルの構造



黒＝財、青＝労働、赤の破線＝資金の流れ。家計は貯蓄で特許を買い、中間財企業から配当 π を受け取ります。

図の読み方

- **最終財部門**：労働と多くの品種の中間財から、消費にも原材料にも使える最終財を作ります（完全競争）。
- **中間財部門**：各品種の特許を持つ企業が、その品種を独占的に作って売ります。毎期、独占利潤 π を得ます。
- **研究開発部門**：研究者を雇って新しい品種の設計図（特許）を作り、中間財企業に売ります。
- **家計**：労働を最終財部門と研究開発部門に配分し（$L_Y + L_R = L$）、貯蓄で特許を買って配当を受け取ります。家計の貯蓄が、研究者の賃金の財源になっています。

需要は下流から上流へ伝わるので、最終財 $\to$ 中間財 $\to$ 研究開発の順に各部門の問題を解きます。

5.2 最終財部門：品種が増えると生産性が上がる

最終財の生産関数を

$$Y_t = L_Y^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{A_t} x_{it}^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{5.1}$$

とします。これは第4章の集計関数で $\varepsilon = 1/(1-\alpha)$ とおき、労働とコブ＝ダグラス型に組み合わせたものと同じです。

数式の読み方：生産関数(5.1)の読み方

- 各品種には $\alpha < 1$ の収穫逓減が働きます。同じ量の原材料を使うなら、1つの品種に集中させるより、多くの品種に少しずつ使うほうが生産的です（第4章の多様性の利益）。
- すべての品種を同じ量 x だけ使うと、$Y = L_Y^{1-\alpha} A\, x^{\alpha} = (A\, L_Y)^{1-\alpha} (A\, x)^{\alpha}$。品種の数 A は**労働増大的**な技術として入ります。第1巻第7章で見た、均斉成長に必要な形が自然に出てくるのです。

最終財企業は、中間財の価格 p_i と賃金 w を所与として利潤を最大にします。1階条件は

$$x_{it} = L_Y \left(\frac{\alpha}{p_{it}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad w_t = (1-\alpha) \frac{Y_t}{L_Y}. \tag{5.2}$$

中間財への需要は、価格弾力性が一定の $1/(1-\alpha)$ です。

5.3 中間財部門：独占価格と利潤

品種 i の特許を持つ企業は、最終財1単位から中間財1単位を作れる（限界費用 $=1$）とします。需要の弾力性は $\varepsilon = 1/(1-\alpha)$ なので、第4章のマークアップ公式から

要点：独占価格・生産量・利潤

$$p = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot 1 = \frac{1}{\alpha}, \qquad x = L_Y \, \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}, \qquad \pi = (p-1)\, x = \frac{1-\alpha}{\alpha}\, x \tag{5.3}$$

すべての品種で価格と数量が同じなので、産出と賃金は

$$Y_t = \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} A_t L_Y, \qquad w_t = (1-\alpha)\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} A_t$$

となります。**産出も賃金も品種の数 A_t に比例します**。品種の数がそのまま経済の技術水準（TFP）の役割を果たすのです。また、利潤 π は L_Y に比例します。市場が大きいほど1品種あたりの利潤が大きい（**市場規模効果**）ことが、後で重要になります。

5.4 特許の価値

特許は、毎期利潤 π を生む**資産**です。家計は安全資産（利子率 r）と特許のどちらでも持てるので、両者の収益率は等しくなければなりません（**裁定条件**）。

$$\frac{\pi_{t+1} + V_{t+1}}{V_t} = 1 + r_{t+1}.$$

左辺は「配当＋売却価格」を購入価格で割った特許の粗収益率です。前向きに代入を繰り返し、遠い将来の項がゼロになる（バブルがない）とすると、特許の価値は将来の利潤の割引現在価値になります。均斉成長経路では π と r が一定なので

$$V = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi}{(1+r)^s} = \frac{\pi}{r}. \tag{5.4}$$

永久に配当を払い続ける債券（コンソル債）の価格と同じ形です。

5.5 研究開発部門と自由参入

新しい品種は次の**アイデアの生産関数**で生まれます。

$$A_{t+1} - A_t = \delta_R \, L_{Rt} \, A_t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \delta_R L_{Rt} \tag{5.5}$$

δ_R は研究の生産性です。右辺に A_t がかかっているのが重要で、**既存のアイデアが多いほど、研究者1人が生み出す新しいアイデアも多い**と仮定しています（**巨人の肩の上**）。研

究者は、この恩恵に対して誰にも対価を払いません。

研究者1人は1期に $\delta_R A_t$ 個の特許を生み、1個を V_t で売れます。研究所への参入が自由なら、研究者1人あたりの収入が賃金を上回る限り参入が続くので、均衡では

要点：自由参入条件

$$\delta_R \, A_t \, V_t = w_t \tag{5.6}$$

研究者1人あたりの収入（左辺）＝研究者1人あたりの費用（右辺）。研究開発部門の利潤はゼロになる。

中間財企業の独占利潤は正ですが、その現在価値は特許の購入費用として研究者の賃金に回り、研究開発部門全体の利潤はゼロになります。独占利潤が、研究への報酬に変換されているのです。

5.6 均斉成長経路の成長率

均斉成長経路では、A、Y、C、w が同じ率 g で成長し、L_R、L_Y、r は一定です。次の3つの条件が成り立ちます。

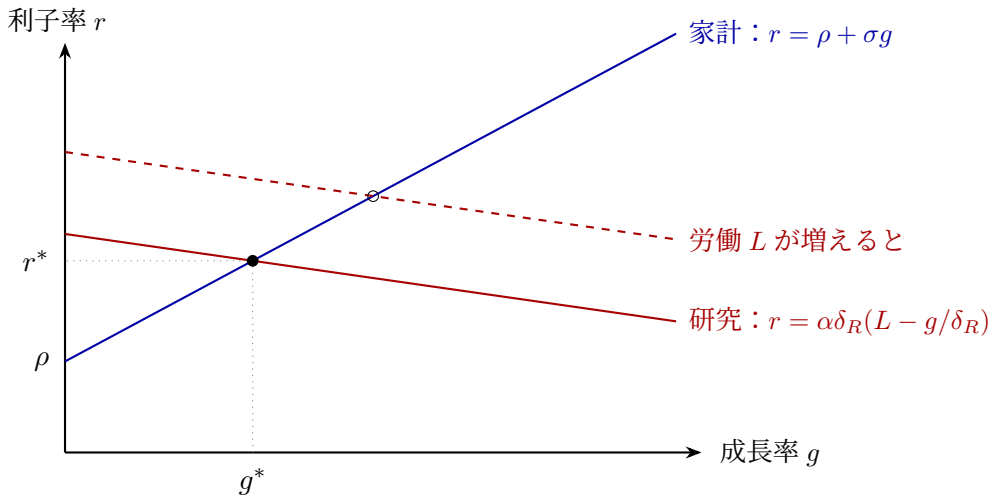
1. **技術**（式(5.5)）：$g = \delta_R L_R$。
2. **研究の収益**（自由参入条件(5.6)に $V = \pi/r$、π、w の式を代入して整理）：$r = \alpha \, \delta_R \, L_Y$。
3. **家計**（オイラー方程式の対数近似、第2巻第1章）：$r \approx \rho + \sigma g$。

2に $L_Y = L - L_R = L - g/\delta_R$ を代入すると $r = \alpha\delta_R L - \alpha g$ です。これを3と等しくおくと

要点：Romerモデルの成長率

$$g = \frac{\alpha \, \delta_R \, L - \rho}{\alpha + \sigma}, \qquad r = \rho + \sigma g, \qquad L_R = \frac{g}{\delta_R} \tag{5.7}$$

図 5.2　均斉成長経路の決まり方



黒丸＝均斉成長経路。白丸＝労働 L が多い経済の均斉成長経路。

図の読み方

- **青の右上がりの線（家計）**：成長率が高い経済では、将来の消費が今より多いので、家計に貯蓄してもらうには高い利子率が必要です（オイラー方程式）。
- **赤の右下がりの線（研究）**：成長率を上げるには研究者を増やす必要があり、その分だけ最終財部門の労働 L_Y が減ります。市場が小さくなると独占利潤が減るので、研究が割に合うための利子率は低くなければなりません。
- 2本の線の交点で、成長率と利子率が同時に決まります。
- 我慢強い経済（ρ が小さい）では青の線が下に移り、研究の生産性が高い経済（δ_R が大きい）では赤の線が上に移り、どちらも成長率が上がります。
- 労働 L が多い経済では赤の線が上に移り（破線）、成長率が上がります。この「規模が大きいほど成長が速い」という性質が**スケール効果**で、第7章で問題になります。

計算例：数値例

$\alpha = 0.4$、$\delta_R = 0.12$、$L = 1$、$\rho = 0.02$、$\sigma = 1.5$ とすると

$$g = \frac{0.4 \times 0.12 - 0.02}{0.4 + 1.5} \approx 1.5\%, \qquad r \approx 4.2\%, \qquad L_R \approx 12\%.$$

労働の約12%を研究に回すことで、年約1.5%の成長が続きます。研究者を増やせば成長は速くなりますが、そのぶん今期の生産に使う労働が減ります。**現在の生産と将来の成長のトレードオフ**が、内生的成長の本質です。

要点

- 中間財の独占企業はマークアップ $1/\alpha$ で価格をつけ、利潤 π を得る。特許の価値は $V = \pi/r$。
- 自由参入条件 $\delta_R AV = w$ が、研究への労働配分を決める。
- 成長率 $g = (\alpha\delta_R L - \rho)/(\alpha + \sigma)$ は、研究の生産性・労働の量・選好で決まる。

次の章へ　市場が選ぶこの成長率は、社会にとって望ましい水準なのでしょうか。次章では、計画者の成長率と比べ、政策の役割を考えます。

第6章

研究開発は多すぎるか少なすぎるか：効率性と政策

ここまでの流れ　第5章で、Romerモデルの市場の成長率 $g=(\alpha\delta_R L-\rho)/(\alpha+\sigma)$ を導きました。
この章の問い　市場は、社会にとって最適な量の研究開発を行っているのか。そうでないなら、どんな政策が望ましいのか。
この章で分かること　社会計画者の成長率、市場の研究が**過少**になる3つの理由と**過大**にしうる2つの理由、そして研究開発補助金などの政策です。

6.1　社会計画者の成長率

計画者は、品種の数 A が経済全体の生産性を高めること、そして今日のアイデアが将来の研究を助けること（巨人の肩の上）をすべて考慮して、研究への労働配分を選びます。中間財も効率的な量（限界費用での価格に当たる量）を使います。連続時間で解くと（導出は下の発展を参照）、計画者の成長率は

要点：計画者の成長率

$$g_{\mathrm{SP}}=\frac{\delta_R L-\rho}{\sigma} \tag{6.1}$$

となります。市場の成長率 $g_{\mathrm{M}}=(\alpha\delta_R L-\rho)/(\alpha+\sigma)$ と比べると、分子の α が消えて大きくなり、分母の α も消えて小さくなっています。第5章の数値例では $g_{\mathrm{M}}\approx 1.5\%$ に対して $g_{\mathrm{SP}}\approx 6.7\%$ で、市場の研究は大幅に過少です。

発展：計画者の成長率の導出

中間財の使い方を最適化すると、消費に回せる産出は $\psi A(L-L_R)$（ψ は定数）と書けます。計画者の問題は

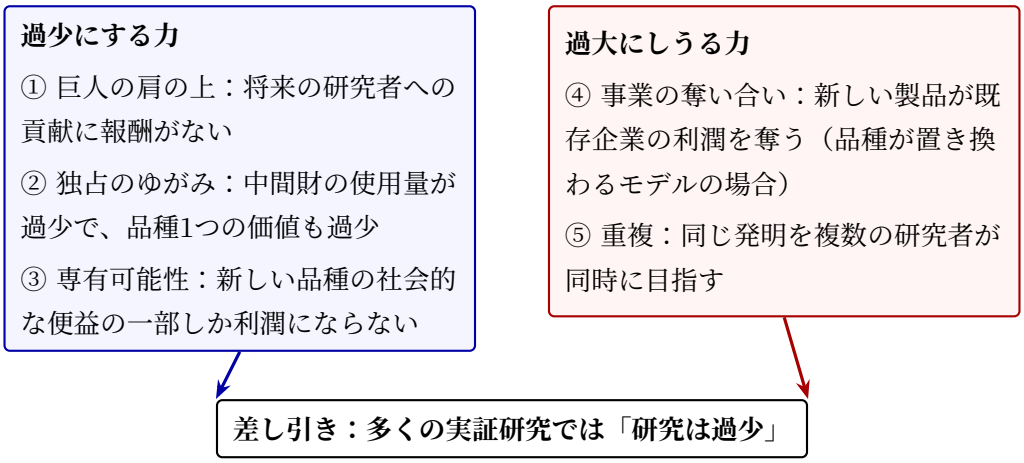
$$\max\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}\mathrm{d}t \quad \text{s.t.} \quad C=\psi A(L-L_R),\quad \dot{A}=\delta_R A L_R.$$

当期価値ハミルトニアン $\mathcal{H}=u(\psi A(L-L_R))+\mu\delta_R A L_R$ について、L_R の1階条件は $u'(C)\psi A=\mu\delta_R A$、共役変数の条件は $\dot{\mu}=\rho\mu-[u'(C)\psi(L-L_R)+\mu\delta_R L_R]=\mu(\rho-\delta_R L)$ です。均斉成長経路では $\mu\propto u'(C)\propto C^{-\sigma}$ なので $\dot{\mu}/\mu=-\sigma g$。これらを合わせて $g=(\delta_R L-\rho)/\sigma$ を得ます（第2巻第7章の手順）。

6.2 市場の研究を過少にする力・過大にする力

市場と計画者のずれは、次のような力の差し引きで生じます。

図 6.1　研究開発の私的な誘因と社会的な価値のずれ



図の読み方

- 左の3つは、研究者が受け取る報酬が社会への貢献より小さくなる理由です。Romerモデルでは、この3つすべてが働きます。
- 右の2つは、逆に研究者の報酬が社会への貢献より大きくなりうる理由です。④は、新しい品種が古い品種を置き換える**創造的破壊**のモデル（アギオン＝ホーウィット型）で重要になります。Romerモデルでは品種は消えないので、④は働きません。
- 研究開発の社会的収益率を推計した実証研究の多くは、それが私的収益率を大きく上回る（研究は過少）と結論しています。

6.3 政策の選択肢

- **研究開発補助金**：研究者の賃金の一部を補助すると、自由参入条件の左辺が実質的に大きくなり、L_R と g が上がる（①③への対策）。
- **中間財の購入への補助金**：最終財企業が中間財を買うときに率 $1-\alpha$ の補助をすると、実質的な価格が限界費用に等しくなり、独占のゆがみが解消される（②への対策）。
- **特許制度の設計**：特許の期間を延ばすと V が上がり研究は増えるが、独占のゆがみが長く続く（第3章のトレードオフ）。

数式の読み方：一括税と組み合わせる理由

補助金の財源を一括税で集めれば、補助金以外の判断はゆがみません。第2章の投資補助金と同じく、「すでにある外部性やゆがみを、それと同じ大きさの補助金で打ち消す」という考え方です。ただし現実には一括税は使いにくく、財源の調達そのものが新たなゆがみを生む点に注意が必要です。

発展：創造的破壊のモデル

アギオン＝ホーウィット（1992）型のモデルでは、技術進歩は品種の数ではなく「品質の階段」を上ることで起き、新しい発明者が既存の独占企業を市場から退出させます。発明者は、自分が奪う既存企業の利潤も自分の利潤として得るので（④事業の奪い合い）、研究が過大になる可能性も生まれます。企業の参入と退出、競争と成長の関係を分析できる点が、このモデルの強みです。

要点

- 計画者の成長率 $g_{\mathrm{SP}} = (\delta_R L - \rho)/\sigma$ は、市場の成長率より高い。
- 過少の原因：巨人の肩の上、独占のゆがみ、専有可能性。過大の原因：事業の奪い合い、重複。
- 研究開発補助金や中間財への補助金で、市場の成長率を引き上げられる。

次の章へ　Romerモデルには、データと大きく食い違う予測が1つあります。次章では、その「スケール効果」の問題と、それを解消する準内生的成長モデルを扱います。

第7章

スケール効果と準内生的成長

> **ここまでの流れ**　第5章のRomerモデルでは、成長率 $g = \delta_R L_R$ が研究者の数に比例しました。
> **この章の問い**　「研究者が多いほど成長が速い」という予測は、データと合っているのか。合わないなら、モデルのどこを直せばよいのか。
> **この章で分かること**　**スケール効果**の問題、アイデアの生産関数の一般化、**準内生的成長**の成長率 $g = \lambda n/(1-\phi)$、そして政策が成長率ではなく**水準**に効くという含意です。

7.1　スケール効果の問題

Romerモデルの成長率 $g = \delta_R L_R$ には、2つの強い予測が含まれています。

1. 人口（研究者の数）の多い国ほど、成長率が高いはずである。
2. 研究者の数が増え続ければ、成長率も**加速し続ける**はずである。

これを**スケール効果**と呼びます。ところが、先進国の研究者の数は第二次世界大戦後に何倍にも増えたのに、一人当たり所得やTFPの成長率は加速しておらず、むしろ横ばいか低下しています。ジョーンズ（1995）はこの事実を指摘し、Romer型のモデルはデータと合わないと批判しました。

さらに、ブルームらの研究（2020）は、半導体・農作物の収量・新薬などの個別の分野でも、同じ成長を保つために必要な研究者の数が増え続けていること、すなわち**研究者1人あたりの生産性が低下し続けている**ことを示しました。

7.2　アイデアの生産関数を一般化する

問題の原因は、アイデアの生産関数(5.5)で、既存の知識 A_t の指数を**ちょうど1**にしたことです。これは第1章のAKモデルと同じナイフエッジの仮定です。そこで次のように一般化します。

要点：一般化したアイデアの生産関数

$$A_{t+1} - A_t = \delta_R \, L_{Rt}^{\lambda} \, A_t^{\phi}, \qquad 0 < \lambda \leq 1, \quad \phi < 1 \tag{7.1}$$

Romerモデルは $\lambda = \phi = 1$ の特殊ケース。

数式の読み方：2つのパラメータの意味

- ϕ（**知識の波及**）：既存の知識が新しい発見をどれだけ助けるか。$\phi = 1$ なら「巨人の肩の上」が比例的に効く。$\phi < 1$ なら、易しい発見から先に見つかってしまい、次の発見は次第に難しくなる（**掘り尽くし**）。
- λ（**研究者の重複**）：研究者を2倍にしても、同じ発見を複数の人が目指すので、発見は2倍未満にしかならない（**足の踏み合い**）。
- どちらも、研究に**収穫逓減を戻す**方向に働きます。なお、この ϕ はNKモデルの φ（フリッシュ弾力性の逆数）とは無関係です。

7.3 準内生的成長の成長率

知識の成長率を書くと

$$g_{A,t} \equiv \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \delta_R \, L_{Rt}^{\lambda} \, A_t^{\phi - 1}.$$

均斉成長経路では g_A が一定なので、右辺も一定でなければなりません。研究者の数が人口と同じ率 n で増えるとすると、右辺の成長率がゼロという条件から $\lambda n + (\phi - 1) g_A = 0$、すなわち

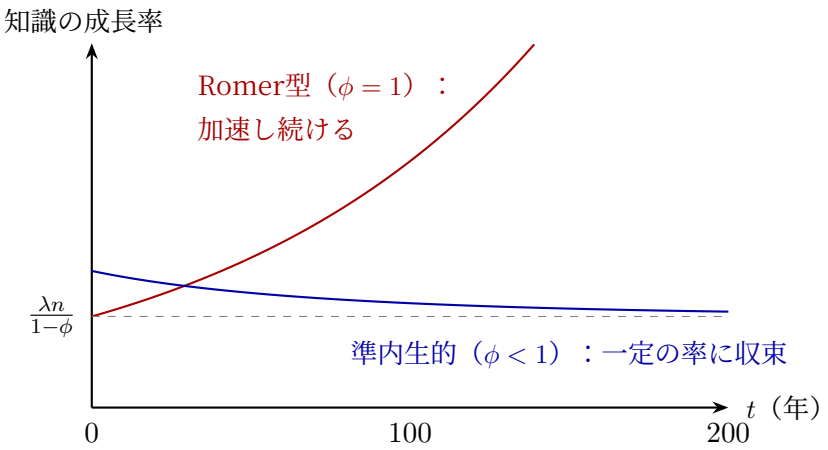
要点：準内生的成長の長期成長率

$$g_A = \frac{\lambda \, n}{1 - \phi} \tag{7.2}$$

数式の読み方：式(7.2)の読み方

- 知識が増えるほど $A^{\phi-1}$ が成長率を押し下げ、研究者の増加がそれを押し戻します。両者が釣り合う成長率が1つに決まります。
- 研究の生産性 δ_R も、研究者の数の**水準**も式に入っていません。長期の成長率は、研究者の数の**伸び**（人口成長率）と技術のパラメータだけで決まります。
- $\phi \to 1$ で $g_A \to \infty$ となり、Romerモデルはその極限に当たります。

図 7.1　研究者が増え続けるときの成長率



研究者の数が毎年1%増える場合のシミュレーション。

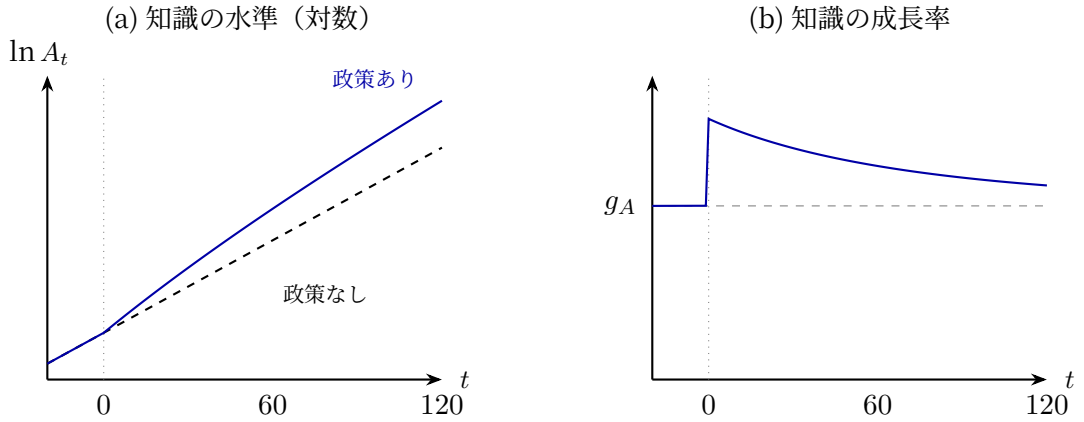
図の読み方

- Romer型（赤）では、研究者の増加がそのまま成長率の上昇になり、成長率は際限なく加速します。データとは合いません。
- 準内生的なモデル（青）では、発見が次第に難しくなるため、研究者が増えても成長率は加速せず、$\lambda n/(1-\phi)$ に落ち着きます。「研究者が増え続けて、ようやく成長率が保たれる」という実証結果と整合的です。

7.4　政策の効果：成長率ではなく水準

準内生的なモデルでは、研究開発補助金などで研究に回る労働の**割合**を恒久的に上げても、長期の成長率 $\lambda n/(1-\phi)$ は変わりません。変わるのは知識の**水準**の経路です。

図 7.2　研究への労働の割合を上げたとき（準内生的成長）



$t = 0$ に研究への労働の割合を恒久的に引き上げる。

図の読み方

- (b)：成長率は政策の直後に上がりますが、知識が増えるにつれて発見が難しくなり、ゆっくりと元の成長率に戻ります。
- (a)：知識の水準は、元の経路より恒久的に高い、平行な経路に移ります。第1巻のソローモデルで貯蓄率を上げたときと同じ**水準効果**です。
- ただし、移行には数十年かかり、その間は成長率が高い状態が続きます。「水準効果しかない」ことは「政策が無意味」という意味ではありません。

表 7.1　Romer型と準内生的成長の比較

	Romer型（$\phi = \lambda = 1$）	準内生的（$\phi < 1$）
長期成長率	$g = \delta_R L_R$	$g_A = \lambda n/(1-\phi)$
スケール効果	あり（規模が大きいほど速い）	なし（成長率は規模に依存しない）
研究開発補助金	成長率を恒久的に上げる	水準を上げる（移行は長い）
人口成長が止まると	影響なし	長期の成長率がゼロに近づく

補足：人口と長期の成長

準内生的なモデルでは、長期の成長を支えているのは研究者の数の増加です。人口成長が止まれば長期の成長率はゼロに近づき、人口が減れば成長率は負になりうる、という含意もあります。少子高齢化が進む国にとって、研究者の数をどう確保するか、研究の生産性をどう高めるかは、長期の成長に直結する問題です。

要点

- Romerモデルのスケール効果（研究者が増えれば成長が加速する）は、データと合わない。
- アイデアの生産に収穫逓減（$\phi < 1$、$\lambda < 1$）を入れると、長期成長率は $\lambda n/(1-\phi)$ となり、規模にも政策にも依存しなくなる。
- 政策は知識の水準の経路を恒久的に上げる。移行は長く、その間は成長率が高い。

次の章へ　成長率から、国の間の所得の**水準**の差に目を移します。次章では、所得の差のうちどれだけが資本の差で、どれだけが技術水準の差かを測る開発会計を学びます。

第8章

開発会計：国の間の所得格差を分解する

> **ここまでの流れ**　第1〜7章では、長期の**成長率**がどう決まるかを考えました。
> **この章の問い**　豊かな国と貧しい国の一人当たり所得の**水準**の差は、何によって生じているのか。資本や教育が足りないからか、それとも同じ投入から得られる産出（技術水準）が低いからか。
> **この章で分かること**　**開発会計**の枠組み、資本・産出比率を使う理由、分散を使った分解の指標、主要な実証結果、そしてTFPの差を生む原因についての考え方です。

8.1　成長会計から開発会計へ

第1巻第9章の**成長会計**は、**1つの国の時間を通じた**成長を資本・労働・TFPに分解しました。**開発会計**は、同じ考え方を**ある時点での国の間の**所得の差に当てはめます。

各国 i の労働者一人当たりの産出を、共通の生産関数で表します。

$$y_i = A_i \, k_i^{\alpha} \, h_i^{1-\alpha} \tag{8.1}$$

k_i は一人当たりの物的資本、h_i は一人当たりの**人的資本**、A_i はTFPです。α は推定せず、資本分配率から $1/3$ を与えます。

数式の読み方：人的資本の測り方

人的資本は、教育年数 s_i から $h_i = e^{\theta s_i}$ のように作るのが標準的です。θ は教育1年あたりの賃金の上昇率（**教育の収益率**）で、多くの国の研究からおよそ 0.1 程度とされます。教育年数が7年長い国では、労働者1人の人的資本が $e^{0.7} \approx 2$ 倍になる、という計算です。

8.2　資本・産出比率で書き直す

式(8.1)の両辺を y_i^{α} で割って整理すると（第1巻第9章と同じ操作）

$$y_i = \underbrace{A_i^{\frac{1}{1-\alpha}}}_{\text{TFPの項}} \underbrace{\left(\frac{k_i}{y_i}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_i}_{\text{要素の項 } X_i}, \qquad \ln y_i = \ln X_i + \frac{1}{1-\alpha} \ln A_i \tag{8.2}$$

数式の読み方：なぜ k ではなく k/y を使うのか

- TFPが高い国では、資本の収益率が高いので資本も多く蓄積されます。k のままで分解すると、TFPが**誘発した**資本蓄積まで「資本の寄与」に数えられ、TFPの役割が過小評価されます。
- 均斉成長経路では k/y は貯蓄率などで決まり、TFPとは独立です（第1巻第4・7章）。k/y を使えば、TFPが誘発した資本蓄積はTFPの項に数えられます。

8.3 2つの国で計算してみる

計算例：仮想的な2国の比較

豊かな国の一人当たり産出が貧しい国の20倍、資本・産出比率が3.0と2.1、教育年数が12年と5年だったとします（$\alpha = 1/3$、$\theta = 0.1$）。

- 資本・産出比率の項：$(3.0/2.1)^{1/2} \approx 1.20$ 倍
- 人的資本の項：$e^{0.1\times 7} \approx 2.01$ 倍
- 要素の項：$1.20 \times 2.01 \approx 2.41$ 倍
- TFPの項：$20/2.41 \approx 8.3$ 倍

対数で見ると $\ln 20 \approx 3.00 = \underbrace{0.18}_{k/y} + \underbrace{0.70}_{h} + \underbrace{2.12}_{\text{TFP}}$ で、所得の差の約7割がTFPの項によるものです。

図 8.1　所得の差の分解（対数で測った差）



図の読み方

- 帯の長さ全体が、2国の一人当たり所得の対数の差です。対数をとると、比の分解が足し算の分解になります。
- 資本・産出比率の違いはごく小さく、教育の違いが中程度、残りの大部分はTFPの違いで説明されます。
- 「貧しい国は資本や教育が足りない」だけでなく、「同じ資本と教育から生み出す産出が少ない」ことが、所得の差の主な原因だということです。

8.4 多くの国での分解

国が多いと、2国の比のような分解はできないので、**ばらつき（分散）**で測ります。式(8.2)の両辺と $\ln y$ との共分散をとって $\mathrm{var}(\ln y)$ で割ると

$$1 = \frac{\mathrm{cov}(\ln X, \ln y)}{\mathrm{var}(\ln y)} + \frac{\mathrm{cov}\left(\frac{1}{1-\alpha}\ln A, \ln y\right)}{\mathrm{var}(\ln y)}$$

と、2つの寄与がちょうど1に足し合います。第1項は「$\ln X$ を $\ln y$ に回帰したときの傾き」に等しく、要素の項で説明される割合を表します。

補足：文献でよく使われる2つの指標

「要素で説明できる割合」として、上の共分散を使う指標のほかに、$\mathrm{var}(\ln X)/\mathrm{var}(\ln y)$（要素の項だけで作れるばらつきの大きさ）もよく報告されます。後者は2つの寄与を足しても1になりません。論文を読むときは、どちらの定義かを確かめましょう。

8.5 主な実証結果

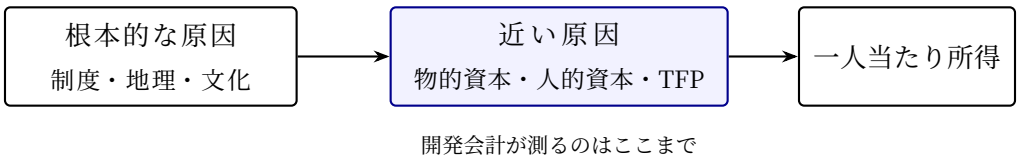
- ホール＝ジョーンズ（1999）、クレノウ＝ロドリゲス＝クレア（1997）、カセッリ（2005）などの研究は、国の間の所得の差のうち、**半分から3分の2程度**がTFPの差によると報告しています。数値は研究や指標によって幅がありますが、「TFPが主役」という結論は頑健です。

- これは、第1巻第10章の拡張ソローモデル（マンキュー＝ローマー＝ワイル）が「投資率の差で所得の差の大部分を説明できる」としたのと逆の結論です。違いは、拡張ソローモデルがTFPの差を誤差項に入れて「投資率と無関係」と仮定したのに対し、開発会計は α を分配率から与え、TFPを国ごとに測ったことにあります。

8.6 TFPの差はどこから来るのか

第3章で見たように、アイデアは非競合的なので、原理的には世界中の国が同じ技術を使えるはずです。それでもTFPに大きな差があるのはなぜでしょうか。

図 8.2　所得の差の「近い原因」と「根本的な原因」



TFPの差を生む候補として、次のようなものが研究されています。

- **技術採用の障壁**：新しい技術を使うには、それを理解する人材、補完的な設備、導入の費用が必要です。
- **資源配分のゆがみ**：税・規制・金融の制約などで、生産性の高い企業に資本や労働が十分に回らないと、個々の企業の技術が同じでも経済全体のTFPは下がります。
- **制度**：財産権の保護、契約の履行、参入の自由といった制度は、投資と技術採用の誘因を左右します。制度は所得の結果でもあるので、因果関係の識別が難しく、歴史的な条件などを使った工夫が行われています。

要点

- 開発会計：$y = A^{1/(1-\alpha)}(k/y)^{\alpha/(1-\alpha)}h$ で、国の間の所得の差を要素の項とTFPの項に分ける。
- 実証的には、所得の差の半分から3分の2程度がTFPの差による。
- 開発会計は「何が違うか」（近い原因）を測るが、「なぜ違うか」（根本的な原因）は、技術採用・資源配分・制度の研究に委ねられる。

次の章へ　次章では、本シリーズで学んだ3つの成長理論を比較し、それぞれがどの事実を説明できるかを整理します。

第9章

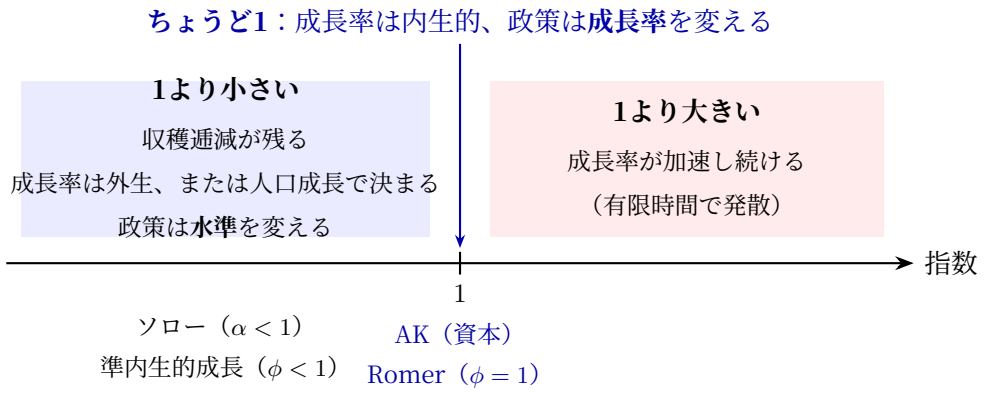
3つの成長理論の比較

ここまでの流れ　第1巻でソローモデル（外生的成長）、本巻で内生的成長と準内生的成長を学びました。
この章の問い　3つの理論は何が違い、それぞれどの事実を説明できるのか。
この章で分かること　3つの理論を分ける**1つの鍵**（蓄積できる要素の収穫）、理論ごとの予測の違い、そしてデータとの対応です。

9.1　理論を分ける鍵：蓄積できるものの収穫

3つの理論の違いは、ほぼ1点に集約できます。「蓄積できるもの（資本や知識）を増やしたとき、その増え方を決める式の**指数**がいくつか」です。

図 9.1　蓄積できる要素の指数と成長の性質



図の読み方

- ソローモデルの資本の指数 α、準内生的成長の知識の指数 ϕ は1より小さく、収穫逓減が残ります。
- AKモデルとRomerモデルは、指数を**ちょうど1**にすることで、成長率をモデルの中で決め、政策が成長率を変えられるようにしました。
- 1をわずかでも外れると結論が大きく変わる、というのが「ナイフエッジ」の問題です。データが支持するのは、1より小さい側（準内生的成長）だと考えられています。

9.2 理論ごとの予測

表 9.1 3つの成長理論の比較

	ソローモデル	内生的成長（AK・Romer）	準内生的成長
成長の源	外生の技術進歩	資本の蓄積・研究開発	研究開発（収穫逓減あり）
長期成長率	g（外生）	選好・技術・規模で決まる	$\lambda n/(1-\phi)$
政策の効果	水準効果	成長効果	水準効果
スケール効果	なし	あり（Romer）	なし
移行過程	あり	なし（AK）	あり
国際格差の見方	定常状態の水準の差	成長率の差（拡大しうる）	技術水準の差

9.3 データとの対応

表 9.2 理論と実証的な事実

事実	ソロー	内生的成長	準内生的成長
均斉成長（カルドアの事実1〜5）	合う（g は仮定）	合う	合う
国によって成長率が違う	移行過程として	合う	移行過程として
条件付き収束（年2%程度）	方向は合う	合わない（AK）	方向は合う
投資率が上がっても成長は加速しない	合う	合わない	合う
研究者が増えても成長は加速しない	合う	合わない（Romer）	合う
所得の差の多くはTFPの水準の差	A は説明外	成長率の差と読む	技術水準の差として整合

数式の読み方：表の読み方

- 内生的成長モデル（AK・Romer）は「なぜ成長率が国で違うのか」に正面から答えますが、時系列の事実（投資率や研究者が増えても成長が加速しない）とは合いません。
- 準内生的成長モデルは時系列の事実と合いますが、長期の成長率の違いは人口成長率の違いに還元されます。
- 開発会計の結果（所得の差の多くは技術水準の差）は、「説明すべきは成長率の差より、技術の**水準**の差だ」ということを示唆しています。どの理論を使うかは、何を説明したいかで選ぶことになります。

要点

- 3つの理論の違いは、蓄積できるものの指数が1より小さいか、ちょうど1か、にほぼ集約される。
- 指数が1なら政策は成長率を変え、1より小さければ水準だけを変える。
- データは、時系列では収穫逓減の側（ソロー・準内生的成長）を支持し、国の間の格差では技術水準の差の重要性を示している。

第10章

続巻へ：独占的競争からNKモデルへ

ここまでの流れ　本巻では、研究開発の誘因を説明するために独占的競争とマークアップを導入しました。第2巻では、RBCモデルとその解き方を学びました。
この章の問い　この2つを組み合わせ、価格の硬直性を加えると、どのようにNKモデルになるのか。
この章で分かること　NKモデルの企業部門の組み立て方の見取り図と、本シリーズの3巻で準備した道具の対応表です。

10.1　NKモデルの企業部門

NKモデルの企業部門は、本巻第4章の独占的競争をほぼそのまま使います。

1. **家計の需要**：家計は多くの品種の財を、ディキシット＝スティグリッツ型で集計して消費します。各企業 i の財への需要は $C_t(i) = \left(P_t(i)/P_t\right)^{-\varepsilon} C_t$ です（第4章の式(4.2)）。
2. **生産**：各企業は労働を使って生産し（RBCモデルと同じく生産性ショックを受けます）、名目の限界費用 MC_t は全企業で共通です。
3. **価格が伸縮的なら**：各企業は毎期 $P_t(i) = \mathcal{M} \cdot MC_t$（第4章のマークアップ公式）で価格を決めます。すると実質限界費用 MC_t/P_t は常に $1/\mathcal{M}$ で一定となり、経済はRBCモデルとほぼ同じ動きをします。
4. **価格が硬直的なら**：各企業は毎期、確率 $1-\theta$ でしか価格を改定できない（**カルボ型**の価格設定）とします。改定できた企業は、「価格が据え置かれる可能性のある将来の期間」の限界費用を見通して価格を決めます。

要点：価格を改定する企業の最適価格（予告）

価格を改定できる企業が選ぶ価格 P_t^* は、おおよそ

$$P_t^* \approx \mathcal{M} \times \left(\text{今期から将来にかけての名目限界費用の加重平均}\right)$$

の形になる。将来の期 $t+k$ の重みは $(\beta\theta)^k$ に比例し、「その期まで価格が据え置かれている確率」と「家計の割引」を反映する。

数式の読み方：なぜインフレが「前向き」になるのか

- 価格を改定できる企業は、将来の限界費用が上がると予想すれば、今のうちに価格を高めに設定します。
- 経済全体の物価上昇率は、改定する企業の価格の動きで決まるので、今日のインフレ率は**将来の予想インフレ率**と**今の実質限界費用**に依存します。これを対数線形化したものが、第2巻第12章で予告したNKフィリップス曲線 $\pi_t = \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + \kappa \tilde{y}_t$ です。
- 価格が硬直的だと、実質限界費用（＝実際のマークアップの逆数）が景気とともに動きます。需要が強いときは限界費用が上がってもすぐに値上げできないので、実際のマークアップが縮み、生産が増えるのです。

10.2 シリーズ全体の道具の対応表

表 10.1　本シリーズで準備した道具とNK・DSGEモデルでの使われ方

道具	学んだ場所	NK・DSGEモデルでの役割
差分方程式・安定性・1次近似	第1巻第2章	モデル全体の解き方の土台
トレンド除去・均斉成長経路	第1巻第7章	成長する変数の扱い
カリブレーション	第1巻第9章、第2巻第10章	パラメータの決め方
オイラー方程式・横断性条件	第2巻第1・2章	動学的IS曲線
競争均衡と厚生定理	第2巻第4章	均衡の定義・政策の役割の判断
鞍点経路・固有値・BK条件	第2巻第5・6章	均衡の一意性（テイラー原則）
対数線形化・未定係数法	第2巻第11章	3本方程式モデルの導出と解法
インパルス応答	第2巻第8・11章	金融政策ショックの分析
独占的競争・マークアップ	第3巻第4章	企業部門・NKフィリップス曲線

続巻へ　続巻では、ここまでの道具を組み合わせて、カルボ型の価格設定からNKフィリップス曲線を導出し、3本方程式モデルを解いて、金融政策のショックや最適な金融政策を分析します。その後、中規模のDSGEモデルの構造と推定へと進みます。

付録

確認問題と記号表

A.1 確認問題

1. AKモデルでオイラー方程式から成長率を求め、消費が資本に比例すると推測して消費関数を導け。横断性条件が意味する条件は何か。

2. AKモデルと新古典派のモデルで、資本所得税の長期的な影響がどう違うかを図で説明せよ。

3. 知識のスピルオーバーがある生産関数 $y_i = Ak_i^{\alpha}\bar{k}^{1-\alpha}$ で、私的収益率と社会的収益率を求め、市場の成長率が過小になる理由を説明せよ。最適な投資補助金の率はいくらか。

4. 非競合性が収穫逓増を生むことを、複製の議論で説明せよ。なぜ完全競争では研究開発が行われないのか。

5. CES型の集計関数から、費用最小化によって需要関数と価格指数を導け。

6. 需要の価格弾力性が一定の ε のとき、独占企業の価格が $\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}MC$ になることを示せ。

7. Romerモデルで、均斉成長経路の3つの条件（技術・研究の収益・家計）を書き、成長率を導け。L が増えると成長率はどう変わるか。

8. Romerモデルで市場の研究が過少になる理由を3つ挙げよ。

9. アイデアの生産関数 $A_{t+1} - A_t = \delta_R L_R^{\lambda} A^{\phi}$（$\phi < 1$）のもとで、長期成長率 $\lambda n/(1-\phi)$ を導け。研究開発補助金の長期的な効果は何か。

10. 開発会計で、資本ではなく資本・産出比率を使う理由を説明せよ。

補足：略解

1. 第1章を参照。$1+g=[\beta(1+A-\delta)]^{1/\sigma}$、$c=\theta k$、$\theta=(1+A-\delta)-(1+g)>0$。
2. 第1章の図1.2。AKでは成長率が下がり（成長効果）、新古典派では水準だけが下がる。
3. 第2章を参照。私的 αA、社会的 A。補助金の率は $1-\alpha$。
4. 第3章を参照。
5. 第4章の式(4.2)。
6. 第4章の式(4.3)。
7. 第5章の式(5.7)。L が増えると成長率が上がる（スケール効果）。
8. 第6章：巨人の肩の上、独占のゆがみ、専有可能性。
9. 第7章を参照。補助金は成長率ではなく知識の水準を恒久的に上げる。
10. 第8章を参照。TFPが誘発した資本蓄積をTFPの側に数えるため。

A.2　本巻で加わった記号

表 A.1　第3巻の記号表

記号	意味	備考
A（第1・2章）	AKモデルの資本の生産性	$y=Ak$
A_t（第4章以降）	品種の数＝知識の量	Romerモデルの技術水準
$\bar{k}$	経済全体の平均的な資本	スピルオーバーの源
ε	品種の間の代替の弾力性	Romerモデルでは $1/(1-\alpha)$
$\mathcal{M}$	マークアップ	$\varepsilon/(\varepsilon-1)$
P	価格指数	NKモデルの物価水準
π	中間財企業の毎期の利潤	NKモデルのインフレ率とは別
V_t	特許の価値	均斉成長経路で π/r
δ_R	研究の生産性	
L_Y, L_R	最終財部門・研究開発部門の労働	$L_Y+L_R=L$
ϕ, λ	知識の波及・研究者の重複の程度	NKモデルの φ とは別
h_i, θ	人的資本・教育の収益率	開発会計（カルボ型の θ とは別）