大学院マクロ攻略マニュアル　第2巻

ラムゼイ＝キャス＝クープマンス・モデルとRBC

無限視野の最適化・競争均衡・鞍点経路から
対数線形化・インパルス応答まで

> このマニュアルは、大学院のマクロ経済学（コアコース）で使う動学モデルを、学部の知識から順に積み上げて理解するための自習用スタディガイドです。第1巻（ソローモデル）の続きとして、全3巻（＋続巻）で、最終的にニューケインジアン・モデルとDSGEモデルを読めるようになることを目標にしています。
> 枠の色は、**青**＝要点、**赤**＝図の読み方、**灰**＝数式の読み方・計算例・補足、**緑**＝発展（飛ばしても本筋は追えます）です。

目次

序　第2巻の地図：貯蓄を「選ぶ」経済へ　5

序.1 ソローモデルから何が変わるのか 5

序.2 本巻の構成 6

1　異時点間の選択：2期間モデルとオイラー方程式　7

1.1　2期間の家計 7

1.2　効用の最大化とオイラー方程式 7

1.3　CRRA型効用と異時点間の代替の弾力性 9

1.4　利子率の変化：代替効果と所得効果 10

2　無限視野の最適化：オイラー方程式・横断性条件・ベルマン方程式　11

2.1　なぜ「無限」の期間を考えるのか 11

2.2 家計の問題 11
2.3 オイラー方程式 12
2.4 生涯の予算制約とポンジー・ゲームの禁止 12
2.5 横断性条件 13
2.6 ベルマン方程式：もう1つの解き方 14

3 RCKモデル（1）：社会計画者の問題 17
3.1 なぜ計画者から始めるのか 17
3.2 経済の設定 17
3.3 計画者のオイラー方程式 18
3.4 定常状態と修正黄金律 18
3.5 内生的に決まる貯蓄率 20
3.6 本巻の基準となるカリブレーション 20

4 RCKモデル（2）：競争均衡と厚生定理 22
4.1 一般均衡の考え方 22
4.2 家計の問題 23
4.3 企業の問題 23
4.4 競争均衡の定義 24
4.5 競争均衡は計画者の解と一致する 24
4.6 厚生定理が崩れるとき 25

5 RCKモデルの動学：位相図と鞍点経路 27
5.1 均衡を2本の差分方程式にまとめる 27
5.2 位相図の描き方 27
5.3 鞍点経路だけが均衡である理由 29
5.4 状態変数とジャンプ変数 29

6 線形化と固有値：鞍点経路を計算する 31
6.1 定常状態のまわりで線形化する 31
6.2 固有値：1つは1より小さく、1つは1より大きい 32
6.3 安定な解と線形の政策関数 32
6.4 収束の速さと σ 33

6.5 ブランシャール＝カーン条件 34

7 連続時間版：ハミルトニアンとケインズ＝ラムゼイ・ルール 36

7.1 連続時間の計画者問題 36

7.2 ハミルトニアンによる解法 36

7.3 ケインズ＝ラムゼイ・ルール 37

7.4 連続時間の位相図と固有値 37

7.5 離散時間と連続時間の対応表 38

8 移行動学と比較動学 39

8.1 資本の少ない経済の発展 39

8.2 比較動学：生産性の恒久的な上昇 40

8.3 比較動学：人々がより我慢強くなる 42

9 政府を加える：財政支出・リカード等価・課税 44

9.1 政府のモデル化 44

9.2 恒久的な政府支出の増加 44

9.3 一時的な政府支出の増加 45

9.4 リカード等価 46

9.5 資本所得税 46

10 RBCモデル（1）：労働供給と確率的な生産性 49

10.1 景気循環の定型化された事実 49

10.2 RCKモデルに加える2つの要素 49

10.3 家計：消費と労働の選択 50

10.4 企業と生産性 51

10.5 均衡条件と定常状態 51

10.6 四半期モデルのカリブレーション 52

10.7 生産性ショックへの直観：労働市場 53

11 RBCモデル（2）：対数線形化・解法・インパルス応答 55

11.1 対数線形化の4つの規則 55

11.2 RBCモデルを対数線形化する 55

11.3 未定係数法で解く 56
11.4 インパルス応答 58
11.5 モデルの評価：シミュレーションとデータ 59

12 NK・DSGEモデルへの橋渡し **61**
12.1 NKモデルが加える3つの要素 61
12.2 RBCモデルの式とNKモデルの式の対応 62
12.3 3本方程式モデルの見取り図 62
12.4 DSGEモデルの分析の流れ 63
12.5 続巻に進む前のチェックリスト 64

A 確認問題と記号表 **65**
A.1 確認問題 65
A.2 本巻で加わった記号 67

第2巻の地図：貯蓄を「選ぶ」経済へ

> **第1巻で学んだこと**　ソローモデルでは、所得のうち一定割合 s が貯蓄されるという「ルール」から、資本の遷移式 $k_{t+1} = g(k_t)$ が導かれました。経済は定常状態に収束し、その近くでは1次近似で動きが分かりました。
> **第2巻の問い**　貯蓄を家計の**最適な選択**として導くと、経済の動きはどう変わるのか。そのモデルに景気変動を持ち込むには、何を加えればよいのか。

序.1　ソローモデルから何が変わるのか

第2巻の主役は、**ラムゼイ＝キャス＝クープマンス（RCK）モデル**です。ソローモデルとの違いはただ1点、「消費と貯蓄の分け方を家計が最適に選ぶ」ことです。しかしこの1点の変更で、モデルの構造は大きく変わります。

表 序.1　ソローモデルとRCKモデルの比較

	ソローモデル（第1巻）	RCKモデル（本巻）
貯蓄の決まり方	一定の率 s（ルール）	生涯効用の最大化（選択）
遷移式	$k_{t+1} = g(k_t)$ の1本	資本の蓄積式＋オイラー方程式の2本
消費	今期の資本で決まる	**将来の予想**で決まる
収束する経路	どこから出発しても収束	ただ1本の**鞍点経路**
定常状態の資本	貯蓄率 s で決まる	時間選好率で決まる（修正黄金律）
効率性	過剰蓄積もありうる	常に効率的（厚生定理）

表の3行目と4行目が、本巻で最も大切な新しい考え方です。家計は「将来いくら稼げるか、利子率はどうなるか」を見通して今日の消費を決めます。すると今日の消費は、過去に縛られた変数ではなく、将来の予想に応じて**自由に動ける（ジャンプできる）**変数になります。この「過去に縛られた変数（状態変数）」と「将来を見て動く変数（ジャンプ変数）」の組合せが、RBCモデル、NKモデル、DSGEモデルのすべてに共通する構造です。

序.2　本巻の構成

図 序.1　第2巻の流れ



- **第1・2章（道具）**：2期間モデルで**オイラー方程式**の意味をつかみ、それを無限の将来まで続く問題に広げます。**横断性条件**と**動的計画法（ベルマン方程式）**もここで導入します。
- **第3・4章（均衡）**：同じ経済を「全知の計画者が最適な配分を選ぶ」問題と、「家計と企業が市場で取引する」問題の2通りで解き、両者が一致すること（**厚生定理**）を確かめます。
- **第5〜7章（均衡の動き方）**：均衡を2本の差分方程式にまとめ、**位相図**と**鞍点経路**で動きを描き、**線形化と固有値**で解きます。連続時間版（ハミルトニアン）もここで扱います。
- **第8・9章（応用）**：生産性や選好の変化、政府支出、課税が経済をどう動かすかを分析します。
- **第10・11章（RBC）**：労働供給と確率的な生産性ショックを加え、**対数線形化・カリブレーション・インパルス応答**で景気循環を分析します。
- **第12章（橋渡し）**：NKモデルとDSGEモデルが、本巻のモデルに何を付け加えたものかを整理します。

補足：本巻の約束

第1巻と同じく**離散時間を基本**とし、連続時間版は第7章でまとめて示します。本文では人口成長と技術進歩を省いて（$n = g = 0$）式を見やすくします。それらを入れる方法は第3章の補足で説明します。記号は第1巻の付録の記号表に従います。

第1章

異時点間の選択：2期間モデルとオイラー方程式

この章の問い　家計は、今日の消費と明日の消費をどう配分するのか。利子率はその配分をどう変えるのか。
この章で分かること　**異時点間の予算制約**、本巻全体の主役である**オイラー方程式**とその直観、**CRRA型効用**と**異時点間の代替の弾力性**です。オイラー方程式は、NKモデルでは「動学的IS曲線」として再登場します。

1.1　2期間の家計

家計は「今期（1期）」と「来期（2期）」の2期間だけ生きるとします。各期に所得 y_1, y_2 を得て、消費 c_1, c_2 を選びます。今期の所得の残り $a = y_1 - c_1$ は利子率 r で貯蓄（$a<0$ なら借入）でき、来期に $(1+r)a$ になります。

$$c_1 + a = y_1, \qquad c_2 = y_2 + (1+r)a.$$

a を消去すると、1本の式にまとまります。

要点：異時点間の予算制約

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \tag{1.1}$$

消費の**割引現在価値**は、所得の割引現在価値（**生涯所得**）に等しい。

数式の読み方：$1+r$ は「来期の消費の値段」

今期の消費1単位をあきらめると、来期に $1+r$ 単位の消費が手に入ります。言いかえると、来期の消費1単位の「今期の価格」は $1/(1+r)$ です。予算制約(1.1)は、2つの財（今期の消費と来期の消費）を、それぞれの価格で買う普通の予算制約と同じ形をしています。異時点間の選択は、学部ミクロの「2財の消費選択」とまったく同じ問題なのです。

1.2　効用の最大化とオイラー方程式

家計の効用は

$$U = u(c_1) + \beta\, u(c_2), \qquad 0 < \beta < 1$$

とします。u は増加的で凹（$u' > 0$、$u'' < 0$）な**期間効用関数**、β は**割引因子**で、来期の効用を今期の効用に比べてどれだけ軽く見るかを表します。$\beta = 1/(1+\rho)$ と書いたときの ρ を**時間選好率**と呼びます。

予算制約(1.1)のもとで U を最大化します。ラグランジュ関数

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right]$$

を c_1, c_2 で微分してゼロとおくと、$u'(c_1) = \lambda$、$\beta u'(c_2) = \lambda/(1+r)$。$\lambda$ を消去して

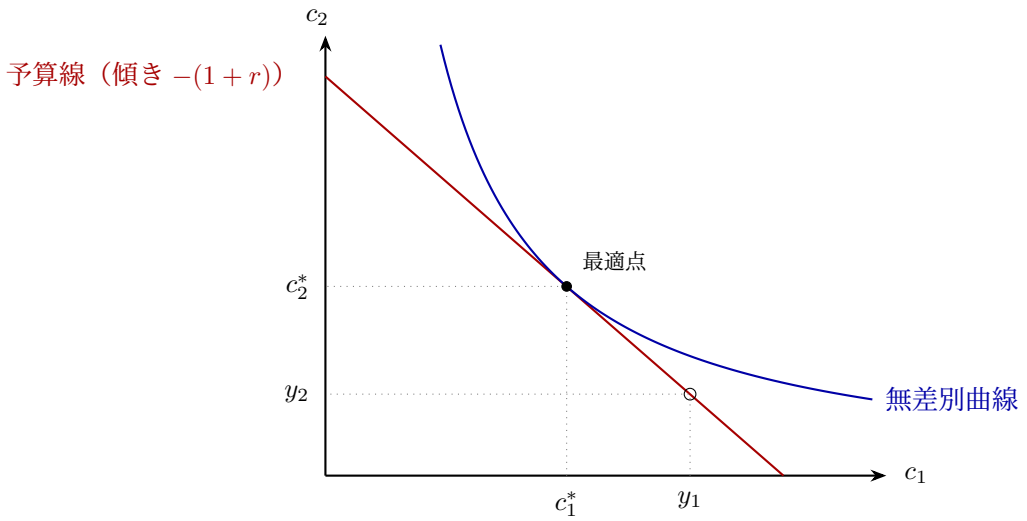
要点：オイラー方程式

$$u'(c_1) = \beta(1+r)\,u'(c_2) \tag{1.2}$$

数式の読み方：オイラー方程式の読み方

- **左辺（今日の限界費用）**：今日の消費を1単位減らして貯蓄すると、今日の効用が $u'(c_1)$ だけ減ります。
- **右辺（明日の限界便益）**：その1単位は明日 $1+r$ 単位になり、明日の効用を $(1+r)u'(c_2)$ だけ増やします。今日の視点では β で割り引きます。
- 最適な配分では、両者がちょうど等しくなります。左辺が大きければ消費を増やし、右辺が大きければ貯蓄を増やすべきだからです。
- 「**1単位をずらしても得をしない**」という条件は、何期間のモデルでも、確率的なモデルでも、同じ形で成り立ちます。本巻のすべてのモデルに登場します。

図 1.1　2期間の消費選択



図の読み方

- 赤の直線は予算制約(1.1)です。所得の点（白丸）(y_1, y_2) を必ず通り、傾きは $-(1+r)$ です。
- 最適点は、無差別曲線が予算線に**接する**点です。無差別曲線の傾き（限界代替率 $u'(c_1)/[\beta u'(c_2)]$）が予算線の傾き $1+r$ に等しい、という条件がオイラー方程式(1.2)です。
- この図では最適点が所得の点より左上にあるので、家計は今期に**貯蓄**しています。

1.3 CRRA型効用と異時点間の代替の弾力性

マクロ経済学で最もよく使う期間効用は、**CRRA型**（相対的危険回避度一定）です。

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad (\sigma > 0,\ \sigma \neq 1), \qquad u(c) = \ln c \quad (\sigma = 1) \tag{1.3}$$

$u'(c) = c^{-\sigma}$ なので、オイラー方程式(1.2)は

$$\frac{c_2}{c_1} = \big[\beta(1+r)\big]^{1/\sigma} \quad \Longrightarrow \quad \ln c_2 - \ln c_1 \approx \frac{1}{\sigma}(r - \rho) \tag{1.4}$$

となります（対数をとり、$\ln\beta = -\ln(1+\rho) \approx -\rho$、$\ln(1+r) \approx r$ を使いました）。

数式の読み方：式(1.4)の読み方

- **消費の成長率は、利子率と時間選好率の差で決まる**。利子率が時間選好率より高ければ、我慢して貯蓄するご褒美が大きいので、消費は時間とともに増えます。
- その反応の大きさが $1/\sigma$ で、**異時点間の代替の弾力性**（EIS）と呼ばれます。利子率が1%ポイント上がると、消費の成長率は $1/\sigma$%ポイント上がります。
- σ が大きい家計は、消費が時間とともに変動するのを嫌い、消費を**平準化**しようとします。利子率が変わっても、消費の計画をあまり変えません。

補足：σ の2つの顔

CRRA型では、同じ σ が「時間を通じた消費の変動を嫌う度合い（EISの逆数）」と「不確実性のもとでの危険回避度」の両方を表します。本来は別々の概念ですが、この関数形では1つのパラメータで結びついています。両者を分ける効用関数もありますが、本巻と続巻のNKモデルでは、標準的なCRRA型を使います。

1.4 利子率の変化：代替効果と所得効果

利子率 r が上がると、今期の消費はどう変わるでしょうか。答えは一通りではありません。

- **代替効果**：来期の消費が相対的に安くなるので、今期の消費を減らして貯蓄を増やす。
- **所得効果**：貯蓄している家計にとっては、同じ貯蓄から得られる利息が増えて豊かになるので、今期の消費も増やす。
- **富の効果**：来期の所得 y_2 の現在価値 $y_2/(1+r)$ が下がるので、生涯所得が減り、消費を減らす。

対数効用（$\sigma = 1$）で $y_2 = 0$ のとき、代替効果と所得効果はちょうど打ち消し合い、今期の消費は利子率に依存しません（$c_1 = y_1/(1+\beta)$）。$\sigma < 1$ なら代替効果が勝ち、利子率の上昇は今期の消費を減らします。

発展：NKモデルの「動学的IS曲線」

続巻のNKモデルでは、オイラー方程式(1.4)を、名目利子率 i_t と期待インフレ率 π_{t+1} を使って

$$\hat{c}_t = \mathbb{E}_t \hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \rho\right)$$

と書きます（$\hat{c}_t$ は定常状態からの対数偏差）。実質利子率 $i_t - \mathbb{E}_t\pi_{t+1}$ が上がると、今日の消費が明日に比べて減る、という式で、中央銀行が金利を通じて需要を動かす経路そのものです。学部の「IS曲線」の役割を果たすので**動学的IS曲線**と呼ばれますが、中身は本章のオイラー方程式です。

要点

- 異時点間の予算制約：消費の現在価値 ＝ 所得の現在価値。$1+r$ は来期の消費の相対価格の逆数。
- オイラー方程式 $u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)$：今日の消費1単位をずらしても得をしない条件。
- CRRA型では $\Delta \ln c \approx (r-\rho)/\sigma$。$1/\sigma$ が異時点間の代替の弾力性。

次の章へ　次章では、2期間を「無限の期間」に広げます。オイラー方程式はそのまま使えますが、無限の将来に関する新しい条件（横断性条件）が必要になります。

第2章

無限視野の最適化：オイラー方程式・横断性条件・ベルマン方程式

ここまでの流れ　第1章で、2期間の家計の最適条件がオイラー方程式であることを見ました。
この章の問い　家計が無限の将来まで計画を立てるとき、最適な消費の経路はどんな条件で決まるのか。
この章で分かること　無限期間の**予算制約**と**ポンジー・ゲームの禁止**、毎期成り立つ**オイラー方程式**、無限の将来に関する**横断性条件**、そして同じ問題を別の角度から解く**ベルマン方程式**（動的計画法）です。

2.1　なぜ「無限」の期間を考えるのか

人の寿命は有限なのに、なぜ無限期間の家計を考えるのでしょうか。標準的な理由は、家計を**王朝**（親・子・孫…と続く家系）とみなし、親が子の効用も気にかけて遺産を残す、という解釈です。そうすると、家計は事実上終わりのない計画を立てることになります。

もう1つの理由は技術的なものです。無限期間なら「残りの期間の長さ」がどの時点でも同じ（無限）なので、どの時点の問題も同じ形になります。これが、後で見るベルマン方程式や定常状態の分析を可能にします。

2.2　家計の問題

家計は t 期の期首に資産 a_t を持ち、利子率 r_t で運用し、賃金 w_t を得て、消費 c_t を選びます。

要点：無限期間の家計の問題

$$\max_{\{c_t,a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad a_{t+1} = (1+r_t)a_t + w_t - c_t, \quad a_0 \text{ は所与} \tag{2.1}$$

各期の制約を**フローの予算制約**と呼びます。家計は利子率と賃金の経路 $\{r_t, w_t\}$ を所与として行動します（自分の行動が価格に影響しないと考える、価格受容者）。

2.3 オイラー方程式

各期の予算制約にそれぞれ乗数 $\beta^t \lambda_t$ をつけて、ラグランジュ関数を作ります。

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big\{ u(c_t) + \lambda_t \big[(1+r_t)a_t + w_t - c_t - a_{t+1} \big] \Big\}.$$

c_t と a_{t+1} で微分します。a_{t+1} は t 期の制約（$-a_{t+1}$）と $t+1$ 期の制約（$(1+r_{t+1})a_{t+1}$）の2か所に登場することに注意します。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} : \; u'(c_t) = \lambda_t, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{t+1}} : \; \lambda_t = \beta(1+r_{t+1})\lambda_{t+1}.$$

λ を消去すると、2期間モデルと同じ形の条件が**毎期**成り立ちます。

要点：オイラー方程式（無限期間）

$$u'(c_t) = \beta(1+r_{t+1})\, u'(c_{t+1}), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

数式の読み方：乗数 λ_t の意味

$\lambda_t = u'(c_t)$ は、「t 期に資産が1単位増えたら、生涯効用がどれだけ増えるか」を表す**資産の潜在価格**です。最適な計画では、追加の1単位は今すぐ消費しても（$u'(c_t)$）、貯蓄して来期に回しても（$\beta(1+r_{t+1})\lambda_{t+1}$）同じ価値を持ちます。DSGEモデルの文献では、この λ_t をそのまま変数として残して式を書くことがよくあります。

2.4 生涯の予算制約とポンジー・ゲームの禁止

オイラー方程式は「隣り合う2期の消費の比」を決めるだけで、消費の**水準**を決めません。水準を決めるのは、生涯を通した予算です。

フローの予算制約を $t=0$ から順に代入していくと、利子率が一定（$r_t = r$）の場合

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} + \frac{a_{T+1}}{(1+r)^T} = (1+r)a_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} \tag{2.3}$$

が得られます。$T \to \infty$ としたときの最後の項（遠い将来に残す資産の現在価値）の扱いが問題になります。

- もし資産を**いくらでもマイナス**にできれば、家計は借金を借金で返し続け（**ポンジー・ゲーム**）、無限に消費できてしまいます。そこで、借金の現在価値が遠い将来に

プラスで残らないことを要求します。

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a_{T+1}}{(1+r)^T} \geq 0 \qquad \text{(ポンジー・ゲームの禁止)} \tag{2.4}$$

- 逆に、遠い将来に資産を**プラスで残す**のは、消費に使えたはずの資源を捨てているので最適ではありません。

2つを合わせると、最適な計画では極限がちょうどゼロになり、

要点：生涯の予算制約

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{(1+r)^t} = (1+r)a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^t} \tag{2.5}$$

が成り立ちます。オイラー方程式が消費の「傾き」を、生涯の予算制約が消費の「高さ」を決めるのです。

2.5 横断性条件

「遠い将来に資産を無駄に残さない」という条件を、効用の言葉で表したものが**横断性条件**（TVC）です。

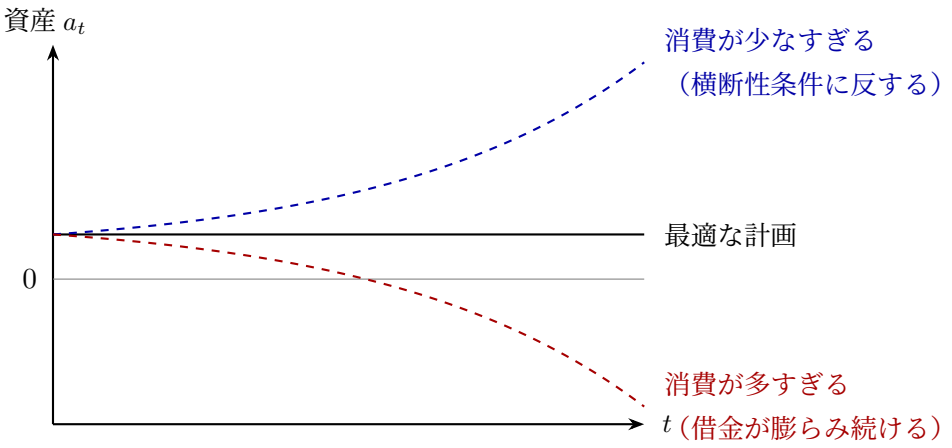
要点：横断性条件

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T u'(c_T)\, a_{T+1} = 0 \tag{2.6}$$

数式の読み方：横断性条件の読み方

- $\beta^T u'(c_T)$ は、T 期の資産1単位の価値を、今日の効用で測ったものです（乗数 $\beta^T \lambda_T$）。a_{T+1} はそのとき持っている資産の量です。
- その積は「遠い将来に残している資産の、今日から見た価値」です。最適な計画では、これがゼロに近づかなければなりません。正の価値を持つ資産を使わずに残すのは損だからです。
- 有限期間のモデルでは「最後の期には資産をゼロにする」という条件に当たります。無限期間では「最後の期」がないので、極限の形で書きます。
- 効用関数が凹で、制約が凸（本巻のモデルはすべてそうです）なら、**オイラー方程式とフローの予算制約と横断性条件**を満たす経路は最適であり、逆も成り立ちます。

図 2.1　オイラー方程式を満たす3つの計画



利子率と時間選好率が等しく、賃金が一定の家計。3つの計画はどれも「消費を一定に保つ」というオイラー方程式を満たし、最初の消費の水準だけが違う。

図の読み方

- オイラー方程式だけでは、最初の消費 c_0 の水準が決まりません。どの水準から始めても、消費の**傾き**の条件は満たせるからです。
- c_0 が低すぎると、資産は際限なく積み上がります（青の破線）。使わない資産を残すので、横断性条件に反し、最適ではありません。
- c_0 が高すぎると、借金が膨らみ続けます（赤の破線）。これはポンジー・ゲームの禁止に反します。
- ちょうど1つの c_0 だけが、資産を発散させない（黒）。**無限の将来に関する条件が、今日の消費を決める**のです。この考え方は、第5章の鞍点経路でそのまま使います。

2.6　ベルマン方程式：もう1つの解き方

ここまでの方法は、すべての期の消費 $\{c_0, c_1, \dots\}$ を一度に選ぶ**逐次的な方法**でした。同じ問題を、「今期の選択」と「来期以降のすべて」の2つに分けて解く方法があります。それが**動的計画法**です。

価値関数 $V(a)$ を、「資産 a を持って今期を迎えた家計が、そこから最適に行動したときに得られる生涯効用」と定義します（簡単のため r、w は一定とします）。今期に c を消費すると来期の資産は $a' = (1+r)a + w - c$ になり、来期からの最適な効用は $V(a')$ です。したがって

要点：ベルマン方程式

$$V(a) = \max_{c} \left\{ u(c) + \beta V(a') \right\} \quad \text{s.t.} \quad a' = (1+r)a + w - c \tag{2.7}$$

最大化の結果として得られる $c = h(a)$ を**政策関数**と呼ぶ。

計算例：ベルマン方程式からオイラー方程式を導く

1. **1階条件**：c で微分して $u'(c) = \beta V'(a')$。
2. **包絡線定理**：V を a で微分すると、最適な c の変化の効果は1階条件により消えるので、$V'(a) = \beta V'(a')(1+r)$。
3. 1を2に代入して $V'(a) = (1+r)u'(c)$。これを1期先にずらすと $V'(a') = (1+r)u'(c')$。
4. 1に戻すと $u'(c) = \beta(1+r)u'(c')$。オイラー方程式(2.2)が再び得られます。

数式の読み方：2つの解き方の関係

- **逐次的な方法**（ラグランジュ法）は、最適な**経路**を求めます。本巻の前半ではこちらを使います。
- **動的計画法**は、どんな状態からでも最適な行動を返す**ルール**（政策関数）を求めます。答えが「状態 $\to$ 行動」の関数なので、ショックが毎期起きる確率的なモデルと相性がよく、コンピュータでの数値計算にも向いています。
- DSGEモデルの「解」とは、まさにこの政策関数（を1次近似したもの）です。第6章と第11章で、線形化したモデルの政策関数を求めます。

要点

- 無限期間の家計の最適条件：毎期のオイラー方程式＋フローの予算制約＋横断性条件。
- オイラー方程式が消費の傾きを、生涯の予算制約（横断性条件）が消費の水準を決める。
- ベルマン方程式は同じ問題を「今期＋残りの価値」に分けて解き、答えを政策関数として与える。

次の章へ　道具がそろいました。次章では、この家計を生産のある経済に置き、RCKモデルを組み立てます。まずは、経済全体を見渡す「計画者」の問題として解きます。

第3章

RCKモデル（1）：社会計画者の問題

> **ここまでの流れ**　第1・2章で、無限期間の最適化の道具（オイラー方程式・横断性条件）を準備しました。
> **この章の問い**　経済全体を見渡せる計画者が、人々の生涯効用を最大にするように消費と投資を選ぶと、どんな経路になるのか。
> **この章で分かること**　RCKモデルの**社会計画者問題**、そのオイラー方程式、定常状態を決める**修正黄金律**、そして定常状態の貯蓄率が**内生的に**決まる様子です。

3.1　なぜ計画者から始めるのか

RCKモデルを解く方法は2つあります。

1. **社会計画者問題**：資源をすべて自由に配分できる仮想的な計画者が、代表的な家計の効用を最大にする配分を選ぶ。
2. **競争均衡**：家計と企業がそれぞれ価格を所与として最適化し、市場で価格が決まる（第4章）。

計画者の問題には価格が出てこないので、式が少なく見通しがよいのが利点です。そして第4章で示すように、このモデルでは2つの答えが一致します。そこで、まず計画者の問題を解きます。

3.2　経済の設定

第1巻のソローモデルと同じ技術を使います。人口は一定（$L=1$ に基準化）で、技術進歩もないとします。一人当たりの生産関数 $f(k)$ は、収穫逓減と稲田条件を満たします。

要点：RCKモデル（社会計画者問題）

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t, \quad k_0 \text{ は所与} \tag{3.1}$$

制約式は経済全体の**資源制約**です。今期の産出と残った資本の合計 $f(k_t)+(1-\delta)k_t$ を、今期の消費 c_t と来期の資本 k_{t+1} に分けます。ソローモデルでは「その s 割を投資する」と決めていた分け方を、ここでは計画者が最適に選びます。

3.3 計画者のオイラー方程式

第2章とまったく同じ手順です。ラグランジュ関数

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big\{ u(c_t) + \lambda_t \big[f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t - k_{t+1} \big] \Big\}$$

を c_t と k_{t+1} で微分すると、$u'(c_t) = \lambda_t$、$\lambda_t = \beta \lambda_{t+1} \big[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \big]$。したがって

要点：RCKモデルのオイラー方程式

$$u'(c_t) = \beta \big[1 + f'(k_{t+1}) - \delta \big] \, u'(c_{t+1}) \tag{3.2}$$

横断性条件：$\lim_{T \to \infty} \beta^T u'(c_T) \, k_{T+1} = 0$。

数式の読み方：家計のオイラー方程式との対応

- 第2章の家計のオイラー方程式 $u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1}) u'(c_{t+1})$ と比べると、利子率 r_{t+1} の場所に $f'(k_{t+1}) - \delta$ が入っています。
- 計画者にとって「貯蓄」とは資本を1単位増やすことで、その見返りは来期の追加の産出 $f'(k_{t+1})$ と、減耗せずに残る $1-\delta$ です。$f'(k) - \delta$ は**資本の純収益率**で、市場経済ではこれが利子率になります（第4章）。
- CRRA型なら $c_{t+1}/c_t = \{\beta[1 + f'(k_{t+1}) - \delta]\}^{1/\sigma}$。資本が少なく収益率が高いうちは消費が増え続け、資本が増えて収益率が下がると、消費の伸びは止まります。

3.4 定常状態と修正黄金律

定常状態では $c_t = c_{t+1} = c^*$、$k_t = k_{t+1} = k^*$ です。オイラー方程式(3.2)で $u'(c_t) = u'(c_{t+1})$ とおくと、$1 = \beta[1 + f'(k^*) - \delta]$、すなわち

要点：修正黄金律

$$f'(k^*) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta = \rho + \delta, \qquad c^* = f(k^*) - \delta k^* \tag{3.3}$$

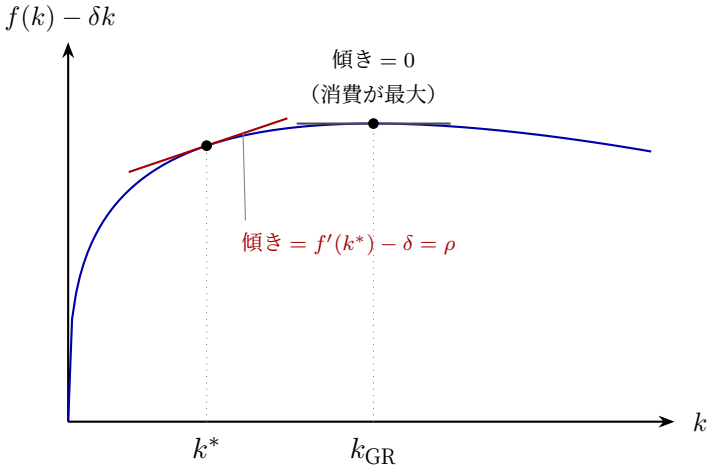
資本の純収益率 $f'(k^*) - \delta$ が、時間選好率 ρ に等しくなるところで、資本の蓄積が止まる。

コブ＝ダグラス型 $f(k) = k^\alpha$ なら $k^* = \big(\alpha/(\rho+\delta)\big)^{1/(1-\alpha)}$ です。

数式の読み方：定常状態を決めるもの

- 定常状態の資本は、**技術**（f、δ）**と選好**（ρ）だけで決まります。効用関数の曲率 σ は定常状態には影響せず、そこへの**近づき方**にだけ影響します。
- 資本の限界生産物が逓減するので、ρ が低い（我慢強い）ほど k^* は大きくなります。
- 第1巻の黄金律（$n=0$ なら $f'(k_{\mathrm{GR}})=\delta$）と比べると、右辺に $\rho>0$ が加わっています。限界生産物が大きい、すなわち**資本は黄金律より少ない**ところで止まります。

図 3.1　修正黄金律と黄金律



曲線は、各資本の水準で維持できる定常状態の消費。

図の読み方

- 曲線 $f(k)-\delta k$ は「その資本を保ったまま毎期消費できる量」です。その頂点が黄金律 k_{GR} で、接線の傾きがゼロ（$f'=\delta$）になる点です。
- 修正黄金律 k^* は、接線の傾きがちょうど ρ になる点で、頂点より**左**にあります。
- k^* から頂点まで資本を積み増せば、定常状態の消費は増えます。しかしそのためには、いまの消費を削って投資しなければなりません。将来を ρ の率で割り引く家計にとって、その犠牲は割に合わないのです。だからRCKモデルの経済は、決して過剰蓄積（動学的非効率）にはなりません。

3.5 内生的に決まる貯蓄率

定常状態では投資は減耗を補う分 δk^* だけなので、定常状態の貯蓄率は

$$s^* = \frac{\delta k^*}{f(k^*)} = \frac{\alpha\delta}{\rho+\delta} \qquad \text{(コブ＝ダグラス型)} \tag{3.4}$$

となります（$f'(k^*) = \alpha f(k^*)/k^* = \rho+\delta$ を使いました）。ソローモデルでは外から与えていた貯蓄率が、技術と選好から**導かれた**のです。黄金律の貯蓄率 α より必ず小さい点も確認できます。

ただし、ソローモデルと違って、定常状態の外では貯蓄率は一定ではありません。資本が少なく収益率が高いうちは貯蓄率が高く、資本が増えるにつれて変化していきます（第8章）。

3.6 本巻の基準となるカリブレーション

第1巻第9章の考え方で、年次モデルのパラメータを決めておきます。

表 3.1　RCKモデルのカリブレーション（年次）

パラメータ	値	決め方	定常状態での含意
α	$1/3$	資本分配率	
β	0.96	平均的な実質利子率（約4%）	$\rho = 1/\beta - 1 \approx 0.042$
δ	0.06	I/Y と K/Y から逆算	
σ	2	消費のEISの推計（$1/\sigma = 0.5$）	定常状態には影響しない
含意：$K/Y = \alpha/(\rho+\delta) \approx 3.3$、貯蓄率 $s^* \approx 0.20$			

発展：人口成長と技術進歩を入れるには

労働増大的な技術が率 g で進歩する場合、第1巻第7章と同じく効率単位 $\tilde{c} = c/A$、$\tilde{k} = k/A$ で書き直します（人口成長は、効用を人数で重み付けするかどうかで細部が変わるので省略します）。CRRA型では $u(c_t) = A_t^{1-\sigma}u(\tilde{c}_t)$ の形に分解でき、割引因子が実質的に $\tilde{\beta} = \beta(1+g)^{1-\sigma}$ に変わります。オイラー方程式は

$$\tilde{c}_t^{-\sigma} = \beta(1+g)^{-\sigma}\left[1 + f'(\tilde{k}_{t+1}) - \delta\right]\tilde{c}_{t+1}^{-\sigma}$$

となり、定常状態では $f'(\tilde{k}^*) - \delta \approx \rho + \sigma g$ です。生涯効用が有限であるためには $\tilde{\beta} < 1$ が必要で、これが連続時間でよく見る条件 $\rho > (1-\sigma)g$ に当たります。

要点

- 計画者のオイラー方程式：$u'(c_t) = \beta[1 + f'(k_{t+1}) - \delta]u'(c_{t+1})$。資本の純収益率が利子率の役割を果たす。
- 定常状態は修正黄金律 $f'(k^*) = \rho + \delta$ で決まり、資本は黄金律より少ない（常に動学的に効率的）。
- 定常状態の貯蓄率 $s^* = \alpha\delta/(\rho + \delta)$ は技術と選好から内生的に決まる。

次の章へ　計画者は仮想的な存在です。次章では、現実の経済のように家計と企業が市場で取引するとき、同じ配分が実現するかどうかを確かめます。

第4章

RCKモデル（2）：競争均衡と厚生定理

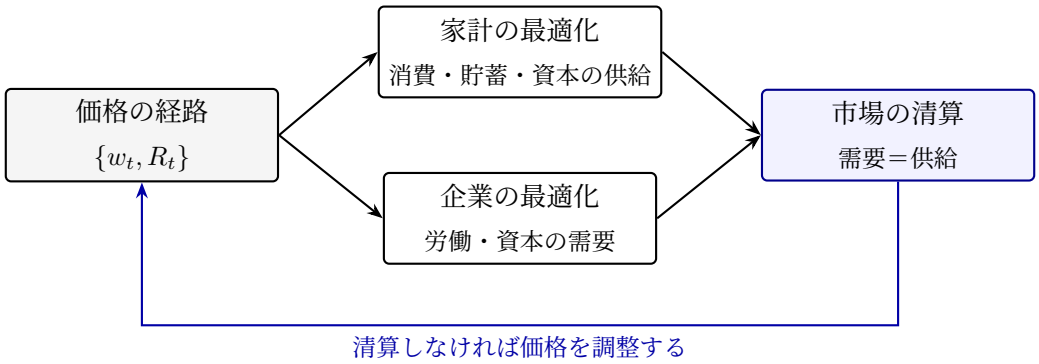
ここまでの流れ　第3章で、計画者が選ぶ最適な配分を求めました。
この章の問い　計画者がいなくても、家計と企業が市場で自由に取引するだけで、同じ配分が実現するのか。
この章で分かること　動学的な**一般均衡**の組み立て方、**競争均衡**の正確な定義、それが計画者の解と一致すること（**厚生定理**）、そして一致しないのはどんなときか、です。この章の「均衡の定義」は、RBC・NK・DSGEのすべてのモデルで同じ形をしています。

4.1　一般均衡の考え方

「一般均衡」と聞くと難しく感じるかもしれませんが、手順は次の3段階だけです。

1. **価格をいったん所与とする**：家計も企業も、自分の行動が価格を動かさないと考えて最適化する。
2. **各主体の最適な行動を求める**：価格の関数として、家計の消費・貯蓄、企業の雇用・資本の需要が決まる。
3. **市場の清算で価格を決める**：すべての市場で需要と供給が一致するように、価格が決まる。

図 4.1　一般均衡の考え方



図の読み方

- 左から右へ：価格を所与として各主体が行動を決め、それが市場に持ち込まれます。
- 下の矢印：需要と供給が一致しなければ、価格が変わります。一致したときの価格と配分が**均衡**です。
- 動学モデルでは、「価格」が1つの数ではなく**無限の将来までの経路**になる点だけが新しい点です。

4.2 家計の問題

家計は資本 k_t を所有して企業に貸し、1単位あたり R_t の賃料を受け取ります。労働1単位を非弾力的に供給して賃金 w_t を得ます。資本は毎期 δ の率で減耗するので、資本を持つことの純収益率は $r_t = R_t - \delta$ です。

要点：家計の問題

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad k_{t+1} = (1 + R_t - \delta)k_t + w_t - c_t \tag{4.1}$$

最適条件：$u'(c_t) = \beta(1 + R_{t+1} - \delta)u'(c_{t+1})$、および横断性条件。

これは第2章の家計の問題で、資産 a_t が資本 k_t、利子率が $R_t - \delta$ になったものです。

4.3 企業の問題

企業は毎期、資本を借り、労働を雇って生産し、利潤を最大にします。企業の問題は1期ごとに完結しています（資本を持たず、借りるだけなので）。

$$\max_{K_t, L_t} F(K_t, L_t) - w_t L_t - R_t K_t \quad \Longrightarrow \quad R_t = f'(k_t), \qquad w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t).$$

第1巻第8章と同じく、要素価格は限界生産物に等しく、オイラーの定理より利潤はゼロです。

4.4 競争均衡の定義

要点：競争均衡

初期資本 k_0 が与えられたとき、**競争均衡**とは、配分 $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ と価格 $\{w_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$ の列で、次を満たすものである。

1. （家計）価格を所与として、$\{c_t, k_{t+1}\}$ は家計の問題(4.1)を解く。
2. （企業）価格を所与として、各期の資本と労働の需要は利潤を最大にする：$R_t = f'(k_t)$、$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$。
3. （市場の清算）労働市場：需要＝1。資本のレンタル市場：需要＝k_t。財市場：$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = f(k_t)$。

数式の読み方：定義を書くときのチェックリスト

- **所与のもの**（初期条件、外生変数）を最初に書いたか。
- **決まるもの**を「配分」と「価格」に分けて、すべて列挙したか。
- 各主体について「**価格を所与として**最適化する」と書いたか。
- **すべての市場**の清算条件を書いたか。

第1巻第8章のソロー経済の定義と比べると、違いは家計の行動が「ルール」から「最適化」に変わった点だけです。

補足：ワルラス法則

3つの市場の清算条件のうち、1つは残りから自動的に導かれます。家計の予算制約に $R_t k_t + w_t = f(k_t)$（オイラーの定理）を代入すると、財市場の清算条件がそのまま出てくるからです。n 個の市場があるとき独立な清算条件は $n-1$ 個で、これを**ワルラス法則**と呼びます。価格が「相対価格」としてしか決まらない（財の価格を1に基準化できる）のも同じ理由です。

4.5 競争均衡は計画者の解と一致する

競争均衡の条件を整理すると、次の2つのことが分かります。

1. **資源制約**：家計の予算制約に企業の条件 $R_t = f'(k_t)$、$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$ を代入すると

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \underbrace{f'(k_t)k_t + f(k_t) - k_t f'(k_t)}_{=f(k_t)} - c_t,$$

すなわち計画者の資源制約(3.1)と同じ式になります。

2. **オイラー方程式**：家計のオイラー方程式に $R_{t+1} = f'(k_{t+1})$ を代入すると、計画者のオイラー方程式(3.2)と同じ式になります。

横断性条件も同じ形です。したがって、**競争均衡の配分は計画者の解とまったく同じ**です。

要点：厚生定理

- **第1厚生定理**：（市場が完備で、外部性がなく、全員が価格受容者なら）競争均衡の配分はパレート最適である。
- **第2厚生定理**：（凸性などの条件のもとで）どんなパレート最適な配分も、適当な所得の再分配を行えば競争均衡として実現できる。

代表的家計の経済では、パレート最適な配分は計画者の解そのものなので、「競争均衡＝計画者の解」となる。

4.6 厚生定理が崩れるとき

厚生定理は便利ですが、その前提が崩れると、計画者の解と競争均衡は一致しなくなります。そのときは、競争均衡を直接解かなければなりません。そして、まさにそのような「ずれ」があるからこそ、**政策の役割**が生まれます。

表 4.1　厚生定理が崩れる典型例

原因	例	扱う場所
ゆがみのある税	資本所得税、労働所得税	第9章
外部性	知識のスピルオーバー	第3巻
不完全競争	独占的競争・マークアップ	第3巻、続巻（NK）
価格の硬直性	価格をすぐに変えられない企業	続巻（NK）
不完備市場・異質性	借入制約、保険できないリスク	続巻

補足：DSGEモデルを読むときの視点

RBCモデルは厚生定理が成り立つ世界なので、景気変動は「最適な反応」であり、政策で改善する余地はありません。NKモデルは、独占的競争と価格の硬直性によって厚生定理が崩れた世界です。そのため、景気変動の一部は非効率であり、金融政策でそれを和らげることができます。「このモデルではどの厚生定理の前提が崩れているか」は、DSGEモデルを読むときの最初のチェックポイントです。

要点

- 一般均衡：価格を所与として各主体が最適化し、市場の清算で価格が決まる。動学モデルでは価格は経路になる。
- 競争均衡の定義：所与・配分と価格・家計と企業の最適化・すべての市場の清算。
- RCKモデルでは厚生定理が成り立ち、競争均衡は計画者の解と一致する。
- 税・外部性・独占・価格の硬直性があると一致しなくなり、政策の役割が生まれる。

次の章へ　均衡は「資源制約」と「オイラー方程式」の2本の式にまとまりました。次章では、この2本の式に従って資本と消費がどう動くかを図に描き、経済の動きを目で見えるようにします。

第5章

RCKモデルの動学：位相図と鞍点経路

> **ここまでの流れ**　第3・4章で、RCKモデルの均衡が「資源制約」と「オイラー方程式」の2本の式で表されることを示しました。
> **この章の問い**　2本の差分方程式に従う経済は、どのように動くのか。どこから出発しても定常状態に向かうのか。
> **この章で分かること**　**位相図**の描き方、**鞍点経路**、そして**状態変数**と**ジャンプ変数**の役割です。DSGEモデルの解の性質を図で理解する、本巻の中心となる章です。

5.1　均衡を2本の差分方程式にまとめる

CRRA型効用 $u'(c) = c^{-\sigma}$ のもとで、均衡は次の2本の式で表されます。

要点：RCKモデルの動学体系

$$k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \tag{5.1}$$

$$c_{t+1} = c_t \left\{ \beta \left[1 + f'(k_{t+1}) - \delta \right] \right\}^{1/\sigma} \tag{5.2}$$

初期条件は k_0 だけが与えられ、c_0 は与えられていない。

ソローモデルの遷移式は1本で、初期値 k_0 を与えれば経路がすべて決まりました。ここでは変数が2つあるのに、初期条件は k_0 の1つしかありません。c_0 は、モデルの中で（将来の予想を通じて）決まる変数だからです。この「足りない1つの条件」を補うのが、第2章の横断性条件です。

5.2　位相図の描き方

資本と消費という2つの変数が互いに影響し合いながらどう動くか（第1巻第4章の発展で紹介した「2変数の力学系」）は、横軸に k、縦軸に c をとった**位相図**（phase diagram）で描けます。手順は次の4ステップです。

ステップ1：k が動かない線。式(5.1)で $k_{t+1} = k_t$ とおくと

$$\Delta k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = f(k) - \delta k.$$

これは第3章の図3.1の山型の曲線です。この曲線より**上**では消費が多すぎて資本が減り（k は左へ）、**下**では資本が増えます（k は右へ）。

ステップ2：c が動かない線。式(5.2)で $c_{t+1} = c_t$ となるのは $f'(k_{t+1}) = \rho + \delta$、すなわち $k_{t+1} = k^*$ のときです。近似的には

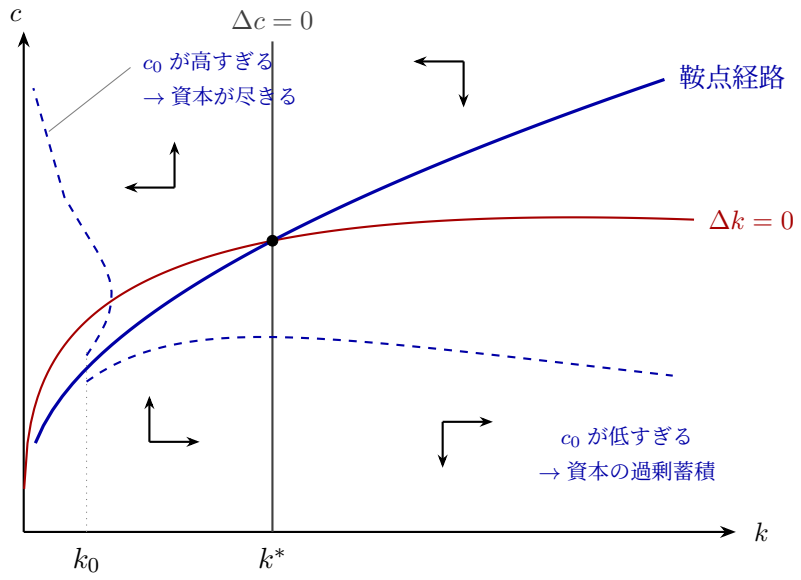
$$\Delta c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = k^*$$

という**垂直な線**です（厳密には k_{t+1} についての条件なので少し傾きますが、定性的な性質は同じです）。この線より**左**では資本の収益率が ρ より高いので消費は増え（上へ）、**右**では消費は減ります（下へ）。

ステップ3：矢印を描く。2本の線で4つの領域に分かれ、各領域で k と c の動く向きが決まります。

ステップ4：定常状態。2本の線の交点 (k^*, c^*) が定常状態です。

図 5.1　RCKモデルの位相図



青の太線＝鞍点経路、青の破線＝k_0 から出発して鞍点経路を外れた経路。

図の読み方

- 赤の山型の曲線が $\Delta k = 0$、灰色の垂直線が $\Delta c = 0$ です。黒い矢印は、4つの領域で経済が動く向きを表します。
- 定常状態に向かう経路は、左下と右上から定常状態に入る**1本の曲線**だけです。これを**鞍点経路**（安定経路）と呼びます。
- k_0 から出発するとき、c_0 を鞍点経路の高さちょうどに選べば、経済は鞍点経路に沿って定常状態に向かいます。
- c_0 が少しでも高いと（左上へ向かう破線）、資本が減り続けて有限の時間で尽きてしまいます。c_0 が少しでも低いと（右へ向かう破線）、消費が減りながら資本が黄金律を超えて積み上がり続けます。

5.3 鞍点経路だけが均衡である理由

鞍点経路以外の経路が均衡にならない理由を、2つの場合に分けて確認します。

- **消費が高すぎる経路**：資本がいずれゼロに達し、その後は資源制約 $k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \geq 0$ を満たす消費ができなくなります。オイラー方程式は「消費を増やし続けよ」と言っているのに、それが実行不可能になるので、最適な計画ではありません。
- **消費が低すぎる経路**：資本は黄金律を超えて積み上がり、資本の純収益率 $f'(k) - \delta$ は 0 を下回り、さらに $-\delta$ に近づきます。家計は「収益を生まない資産を使わずに抱え続ける」ことになり、横断性条件 $\lim \beta^T u'(c_T) k_{T+1} = 0$ が満たされません。消費を増やせば全期間の効用を上げられるので、最適ではありません。

要点：鞍点経路の性質

- 与えられた k_0 に対して、オイラー方程式・資源制約・横断性条件をすべて満たす c_0 は**ただ1つ**であり、その点は鞍点経路の上にある。
- 均衡では、経済は鞍点経路に沿って**単調に**定常状態へ収束する。
- 鞍点経路は「k が与えられたときの最適な c」を表す関数 $c = h(k)$ であり、第2章の**政策関数**そのものである。

5.4 状態変数とジャンプ変数

位相図での k と c の扱いの違いは、次のようにまとめられます。

表 5.1　2種類の変数

	状態変数（先決変数）	ジャンプ変数（非先決変数）
例	資本 k_t	消費 c_t
t 期の値の決まり方	過去の行動の結果として期首に決まっている	t 期に、将来の予想を見て決まる
予期しない変化のとき	連続的にしか動けない	その瞬間に不連続に動ける
条件の数	初期条件 k_0	横断性条件（将来の条件）

予期しない出来事（たとえば生産性の恒久的な上昇）が起きると、位相図の曲線が動き、鞍点経路も動きます。そのとき、資本はすぐには変わりませんが、消費は新しい鞍点経路の上まで**ジャンプ**します（第8章）。第1巻第6章で、ソローモデルの消費が貯蓄率の変化に応じてジャンプしたのと似ていますが、RCKモデルでは消費のジャンプの大きさが「将来の見通し」によって決まる点が本質的に違います。

補足：DSGEモデルでの言い方

DSGEモデルの文献では、状態変数を**先決変数**（predetermined variable）、ジャンプ変数を**非先決変数**または**前向きの変数**（forward-looking variable）と呼びます。消費のほか、投資、労働時間、資産価格、NKモデルのインフレ率なども前向きの変数です。モデルが一意の均衡を持つかどうかは、「前向きの変数の数」と「発散する方向の数」が一致するかどうかで判定します（第6章のブランシャール＝カーン条件）。

次の章へ　位相図は定性的な動きを教えてくれますが、鞍点経路の傾きや収束の速さは分かりません。次章では、定常状態のまわりで体系を線形化し、固有値を使って鞍点経路を計算します。

第6章

線形化と固有値：鞍点経路を計算する

> **ここまでの流れ**　第5章で、均衡は鞍点経路という1本の曲線の上を動くことを、位相図で確かめました。
> **この章の問い**　鞍点経路の傾きや、定常状態への収束の速さを、具体的に計算するにはどうすればよいのか。
> **この章で分かること**　2変数の体系の**線形化**、**固有値**による安定性の判定、**線形の政策関数**の求め方、そしてDSGEモデルの解の存在と一意性を判定する**ブランシャール＝カーン条件**です。

6.1　定常状態のまわりで線形化する

第1巻第2章の1変数の1次近似を、2変数に広げます。定常状態からの偏差を $\tilde{k}_t \equiv k_t - k^*$、$\tilde{c}_t \equiv c_t - c^*$ と書きます。

資本の式：式(5.1)を (k^*, c^*) のまわりで1次近似すると、$f'(k^*) + 1 - \delta = 1/\beta = 1 + \rho$ なので

$$\tilde{k}_{t+1} = (1+\rho)\,\tilde{k}_t - \tilde{c}_t .$$

消費の式：式(5.2)の中括弧は定常状態で1なので、その対数の変化は $\beta f''(k^*)\tilde{k}_{t+1}$ です。したがって $\tilde{c}_{t+1} = \tilde{c}_t + \frac{c^*}{\sigma}\beta f''(k^*)\tilde{k}_{t+1}$。ここで正の定数

$$\kappa \equiv -\frac{c^* \beta f''(k^*)}{\sigma} > 0$$

を定義し、$\tilde{k}_{t+1}$ に資本の式を代入すると、次の体系を得ます。

要点：線形化したRCKモデル

$$\begin{pmatrix} \tilde{k}_{t+1} \\ \tilde{c}_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\rho & -1 \\ -\kappa(1+\rho) & 1+\kappa \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

数式の読み方：行列 M の各要素の意味

- 1行目：資本が1単位多いと、来期の資本は $1+\rho$ 単位多い（定常状態での粗収益率）。消費が1単位多いと、その分だけ来期の資本は減る。
- 2行目：資本が多いと来期の収益率が下がる（$f''<0$）ので、消費の伸びが鈍る。κ はその強さで、σ **が大きいほど小さい**。消費の平準化を好む家計は、収益率の変化に対して消費の伸びをあまり変えないからです。

6.2 固有値：1つは1より小さく、1つは1より大きい

第1巻第2章の発展で予告したとおり、2変数の線形系の動きは行列 M の**固有値**で決まります。固有値 λ は特性方程式

$$p(\lambda)\equiv \lambda^2-\operatorname{tr}(M)\,\lambda+\det(M)=0,\qquad \operatorname{tr}(M)=2+\rho+\kappa,\quad \det(M)=1+\rho$$

の解です。ここで $p(1)=1-(2+\rho+\kappa)+(1+\rho)=-\kappa<0$、$p(0)=1+\rho>0$ なので、

要点：RCKモデルの固有値

2つの固有値は $0<\lambda_1<1<\lambda_2$ を満たす。λ_1 の方向に動く成分は縮み（**安定**）、λ_2 の方向に動く成分は拡大する（**不安定**）。これが**鞍点**の数学的な意味である。

計算例：基準のカリブレーションでの固有値

第3章の表3.1（$\alpha=1/3$、$\beta=0.96$、$\delta=0.06$、$\sigma=2$）では、$\kappa\approx 0.008$ で

$$\lambda_1\approx 0.932,\qquad \lambda_2\approx 1.117.$$

（確かめ：$\lambda_1\lambda_2=\det M=1+\rho\approx 1.042$。）

6.3 安定な解と線形の政策関数

線形系(6.1)の一般解は、2つの固有ベクトル v_1, v_2 を使って

$$\begin{pmatrix}\tilde{k}_t\\ \tilde{c}_t\end{pmatrix}=A_1\lambda_1^{t}\,v_1+A_2\lambda_2^{t}\,v_2$$

と書けます（A_1, A_2 は定数）。$\lambda_2>1$ なので、$A_2\neq 0$ なら経路は発散し、第5章で見たように横断性条件か実行可能性に反します。したがって均衡では $A_2=0$ でなければならず、経済は**安定な固有ベクトル** v_1 **の方向**だけを動きます。

v_1 の方向は直線 $\tilde{c}=\theta\,\tilde{k}$ で表せます。この直線上では資本の式から $\tilde{k}_{t+1}=(1+\rho-\theta)\tilde{k}_t$ で

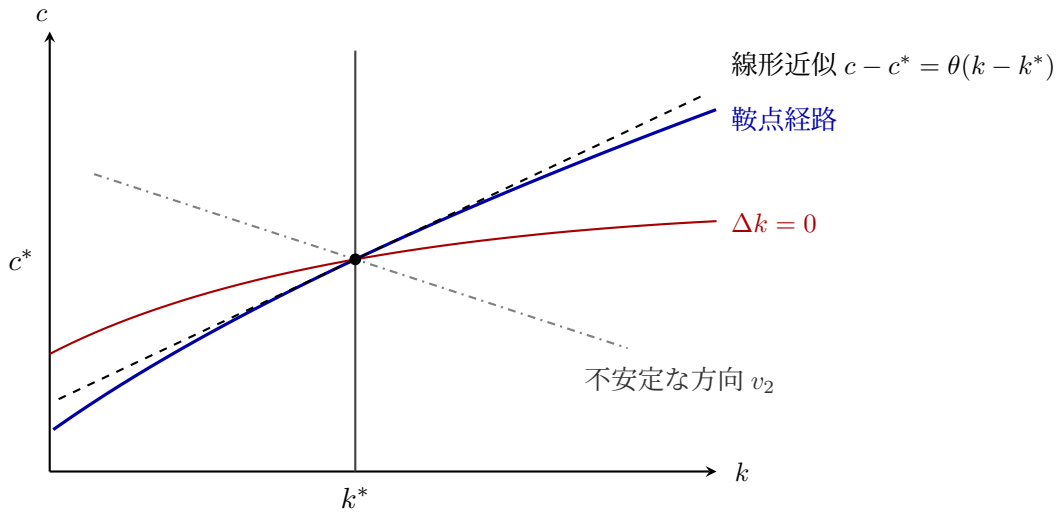
あり、これが $\lambda_1 \tilde{k}_t$ に等しいことから $\theta = 1 + \rho - \lambda_1$ が分かります。

要点：線形の政策関数と遷移式

$$c_t - c^* = \theta\,(k_t - k^*), \qquad k_{t+1} - k^* = \lambda_1\,(k_t - k^*), \qquad \theta = 1 + \rho - \lambda_1 > 0 \tag{6.2}$$

- 政策関数：今期の資本から今期の消費を決めるルール（鞍点経路の1次近似）。
- 遷移式：資本は毎期 $1 - \lambda_1$ の割合で定常状態に近づく。

図 6.1　鞍点経路と線形近似



図の読み方

- 青の曲線は数値計算で求めた正確な鞍点経路、黒の破線は線形化で求めた政策関数（安定な固有ベクトルの方向）です。定常状態の近くでは2本はほぼ重なり、離れるにつれて少しずれます。
- 灰色の一点鎖線は不安定な固有ベクトルの方向です。この方向の成分が少しでも含まれると、経路は定常状態から離れていきます。
- 線形化による政策関数は「定常状態の近くでは正確」です。景気循環のような小さな変動を分析するDSGEモデルが1次近似で十分とされるのは、このためです。

6.4　収束の速さと σ

収束速度 $1 - \lambda_1$ は σ に依存します。基準のパラメータで計算すると次のとおりです。

表 6.1　効用の曲率と収束速度

σ	安定な固有値 λ_1	収束速度 $1-\lambda_1$	半減期
1	0.899	約10%	約7年
2	0.932	約7%	約10年
5	0.962	約4%	約18年

σ が大きい家計ほど消費の変化を嫌い、資本が少ないときでも今の消費を大きく削って投資しようとはしないので、収束は遅くなります。ソローモデルでは収束速度が技術と人口だけで決まりましたが、RCKモデルでは**選好も収束速度を左右する**のです。

6.5　ブランシャール＝カーン条件

RCKモデルでは、不安定な固有値の数（1つ）とジャンプ変数の数（c_t の1つ）がちょうど一致していました。だからこそ、ジャンプ変数を選んで不安定な成分を消すことで、ただ1つの均衡経路が決まりました。この関係は一般のモデルでも成り立ちます。

要点：ブランシャール＝カーン条件

線形化したモデル $\mathbf{x}_{t+1} = M\mathbf{x}_t$ について、

- 絶対値が1より大きい固有値の数 ＝ ジャンプ変数の数 ⇒ 安定な均衡がただ1つ存在する（**決定的**）。
- 絶対値が1より大きい固有値の数 ＞ ジャンプ変数の数 ⇒ 安定な均衡は存在しない。
- 絶対値が1より大きい固有値の数 ＜ ジャンプ変数の数 ⇒ 安定な均衡が無数にある（**不決定**）。

補足：NKモデルの「テイラー原則」

続巻のNKモデルでは、インフレ率と産出ギャップという2つのジャンプ変数があります。中央銀行がインフレ率の上昇に対して名目金利を**1対1より強く**引き上げる（テイラー原則）と、不安定な固有値がちょうど2つになり、均衡が一意に決まります。反応が弱いと不安定な固有値が足りず、人々の予想だけでインフレが自己実現的に動きうる（不決定）状態になります。金融政策の設計の基本原則が、この章の固有値の数え方から出てくるのです。

要点

- 定常状態のまわりで線形化すると、RCKモデルは2変数の線形差分方程式になる。
- 固有値は $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$（鞍点）。均衡では不安定な成分がゼロになるように消費が決まる。
- 解は線形の政策関数 $c_t - c^* = \theta(k_t - k^*)$ と遷移式 $k_{t+1} - k^* = \lambda_1(k_t - k^*)$。
- 不安定な固有値の数＝ジャンプ変数の数なら、均衡はただ1つ（ブランシャール＝カーン条件）。

次の章へ　多くの教科書や論文は、RCKモデルを連続時間で書きます。次章では、ハミルトニアンを使って連続時間版を解き、離散時間版との対応を確認します。

第7章

連続時間版：ハミルトニアンとケインズ＝ラムゼイ・ルール

ここまでの流れ　第3〜6章では、RCKモデルを離散時間で解きました。
この章の問い　連続時間で書かれたRCKモデル（多くの成長論の教科書の書き方）は、どのように解き、離散時間版とどう対応しているのか。
この章で分かること　**当期価値ハミルトニアン**による解き方、消費の動きを表す**ケインズ＝ラムゼイ・ルール**、連続時間の位相図と固有値、そして離散時間との対応表です。

7.1　連続時間の計画者問題

時間 $t \geq 0$ が連続的に流れるとき、割引は β^t の代わりに $e^{-\rho t}$ で表し、和は積分になります（第1巻第2章の対応表）。

要点：RCKモデル（連続時間）

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u\big(c(t)\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{s.t.} \quad \dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - \delta k(t) - c(t), \quad k(0) \text{ は所与} \tag{7.1}$$

7.2　ハミルトニアンによる解法

連続時間の最適化では、ラグランジュ法の代わりに**ハミルトニアン**を使います。ここでは、割引を外に出した**当期価値ハミルトニアン**

$$\mathcal{H}(c, k, \mu) = u(c) + \mu\big[f(k) - \delta k - c\big]$$

を作ります。$\mu(t)$ は資本の潜在価格（**共役変数**）で、離散時間の乗数 λ_t に当たります。

要点：最適性の条件（当期価値ハミルトニアン）

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0: \quad u'(c) = \mu \tag{7.2}$$

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k}: \quad \dot{\mu} = \mu\big[\rho + \delta - f'(k)\big] \tag{7.3}$$

$$\text{横断性条件}: \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu(t)k(t) = 0 \tag{7.4}$$

数式の読み方：ハミルトニアンの直観

- $\mathcal{H}$ は「今この瞬間の効用 $u(c)$」と「資本が増えることの価値 $\mu\dot{k}$」の和です。消費を増やせば今の効用は増えますが、資本の増加は減ります。条件(7.2)は、その2つが限界的に釣り合うことを言っています。
- 条件(7.3)は**資産価格の式**として読めます。$\rho\mu = \dot{\mu} + \mu[f'(k) - \delta]$ と書き直すと、「資本という資産を持つことの要求収益（$\rho\mu$）＝ 価格の上昇（$\dot{\mu}$）＋ 配当（$\mu[f' - \delta]$）」となります。
- 条件(7.4)は第2章の横断性条件の連続時間版です。

7.3 ケインズ＝ラムゼイ・ルール

CRRA型 $u'(c) = c^{-\sigma}$ なら、条件(7.2)より $\mu = c^{-\sigma}$。対数をとって時間で微分すると $\dot{\mu}/\mu = -\sigma\dot{c}/c$ です。これを条件(7.3)に代入すると

要点：ケインズ＝ラムゼイ・ルール

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\big[f'(k) - \delta - \rho\big] \tag{7.5}$$

離散時間のオイラー方程式(3.2)の対数近似 $\ln c_{t+1} - \ln c_t \approx \frac{1}{\sigma}[f'(k_{t+1}) - \delta - \rho]$ と、まったく同じ内容です（第1章の式(1.4)も参照）。連続時間では近似が「$=$」になり、「k_{t+1} か k_t か」という時点のずれもなくなります。

7.4 連続時間の位相図と固有値

動学体系は

$$\dot{k} = f(k) - \delta k - c, \qquad \dot{c} = \frac{c}{\sigma}\big[f'(k) - \delta - \rho\big]$$

の2本です。$\dot{k} = 0$ の線は $c = f(k) - \delta k$、$\dot{c} = 0$ の線は**ちょうど垂直な** $k = k^*$ になり、位相図は第5章の図5.1と同じ形です。

定常状態のまわりで線形化すると（$f'(k^*) - \delta = \rho$ を使います）

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{k}} \\ \dot{\tilde{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ \dfrac{c^* f''(k^*)}{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{c} \end{pmatrix}.$$

行列式 $c^* f''(k^*)/\sigma$ は負なので、2つの固有値は**符号が逆**です。連続時間では「実部が負＝安定、正＝不安定」なので、これが連続時間での鞍点の条件です。安定な固有値を $-\nu$ と書くと

$$\nu = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\rho^2 + \frac{4c^*|f''(k^*)|}{\sigma}} - \rho\right]$$

が収束速度です。基準のパラメータでは $\nu \approx 0.073$ で、離散時間の $1 - \lambda_1 \approx 0.068$ とほぼ一致します。

7.5 離散時間と連続時間の対応表

表 7.1　RCKモデル：離散時間と連続時間の対応

	離散時間	連続時間
目的関数	$\sum_t \beta^t u(c_t)$	$\int e^{-\rho t} u(c)\,\mathrm{d}t$
資源制約	$k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t$	$\dot{k} = f(k) - \delta k - c$
解き方	ラグランジュ法（乗数 λ_t）	ハミルトニアン（共役変数 μ）
消費の動き	$u'(c_t) = \beta[1 + f'(k_{t+1}) - \delta]u'(c_{t+1})$	$\dot{c}/c = [f'(k) - \delta - \rho]/\sigma$
定常状態	$f'(k^*) = 1/\beta - 1 + \delta$	$f'(k^*) = \rho + \delta$
横断性条件	$\lim \beta^T u'(c_T) k_{T+1} = 0$	$\lim e^{-\rho t}\mu k = 0$
鞍点の条件	$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$	固有値の符号が逆

補足：どちらで学ぶべきか

成長論の古典的な文献や、多くの教科書の成長モデルは連続時間で書かれています。一方、RBC・NK・DSGEモデルはほぼ例外なく離散時間です。データが四半期ごとに観測されること、コンピュータで解くこと、そして期待（$\mathbb{E}_t$）を扱いやすいことが理由です。本巻の残りの章も離散時間で進めますが、この対応表があれば、連続時間で書かれた文献もそのまま読めます。

次の章へ　次章では、計算した鞍点経路を使って、生産性や選好が変化したときに経済がどう動くか（移行動学と比較動学）を描きます。

第8章

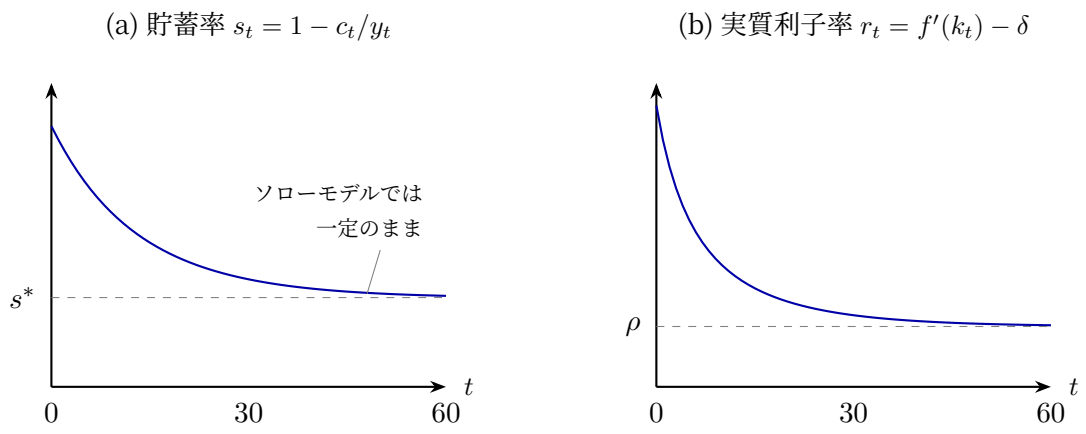
移行動学と比較動学

ここまでの流れ　第5〜7章で、均衡は鞍点経路の上を動き、その経路は線形化や数値計算で求められることを示しました。
この章の問い　資本の少ない経済はどのように発展していくのか。生産性や人々の我慢強さが変わると、経済はどう反応するのか。
この章で分かること　鞍点経路に沿った**移行動学**（貯蓄率と利子率の動き）、予期しない恒久的な変化への反応（**比較動学**）と**消費のジャンプ**、そしてソローモデルとの違いです。

8.1　資本の少ない経済の発展

資本が定常状態よりずっと少ない経済（$k_0 = k^*/4$）が、鞍点経路に沿って発展していく様子を見ます。ソローモデルとの最大の違いは、**貯蓄率が時間とともに変化する**ことです。

図 8.1　移行過程での貯蓄率と利子率



基準のカリブレーション、$k_0 = k^*/4$ から出発。破線は定常状態の値。

図の読み方

- (b)：資本が少ないうちは資本の収益率（利子率）が非常に高く、資本の蓄積とともに時間選好率 ρ まで下がっていきます。
- (a)：利子率が高いうちは、貯蓄のご褒美が大きいので、貯蓄率は定常状態より高くなります。利子率が下がるにつれて、貯蓄率も定常状態の値 s^* に向かって下がります。
- ソローモデルでは貯蓄率は最初から最後まで s^* のまま（破線）でした。RCKモデルの経済は、資本が少ないときほど熱心に貯蓄するので、ソローモデルより**速く**定常状態に近づきます（第6章の収束速度約7%、第1巻の同じパラメータのソローモデルでは約4%）。

補足：貯蓄率は必ず下がるのか

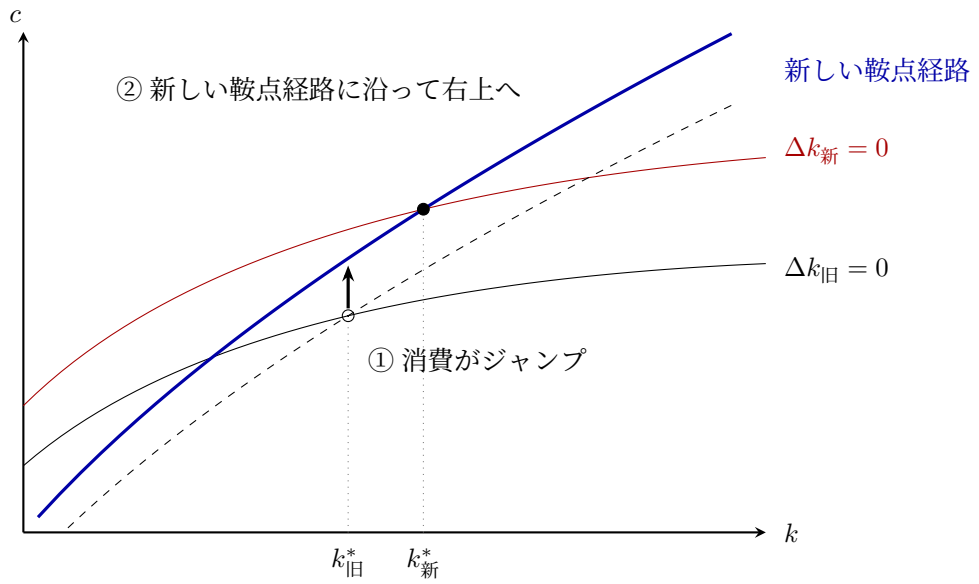
貯蓄率が移行過程で下がるか上がるかは、σ の大きさに依存します。利子率が高いと、代替効果は貯蓄を増やしますが、「将来もっと豊かになる」という所得効果は今の消費を増やします（第1章）。σ が小さい（代替効果が強い）と貯蓄率は下がり、σ が十分大きいと逆に上がることもあります。ちょうど一定になる特殊ケースが、次の発展で見るブロック＝マーマン・モデルです。

8.2 比較動学：生産性の恒久的な上昇

定常状態にある経済で、$t = 0$ に生産性が予期せず恒久的に10%上がった（$f(k) = Ak^{\alpha}$ で A が1から1.1になった）とします。

位相図では、$\Delta k = 0$ の曲線が上に移り（同じ資本でより多く生産できる）、$\Delta c = 0$ の線が右に移ります（資本の収益率が上がるので、定常状態の資本が増える）。鞍点経路も新しいものに変わります。

図 8.2　生産性の恒久的な上昇：位相図

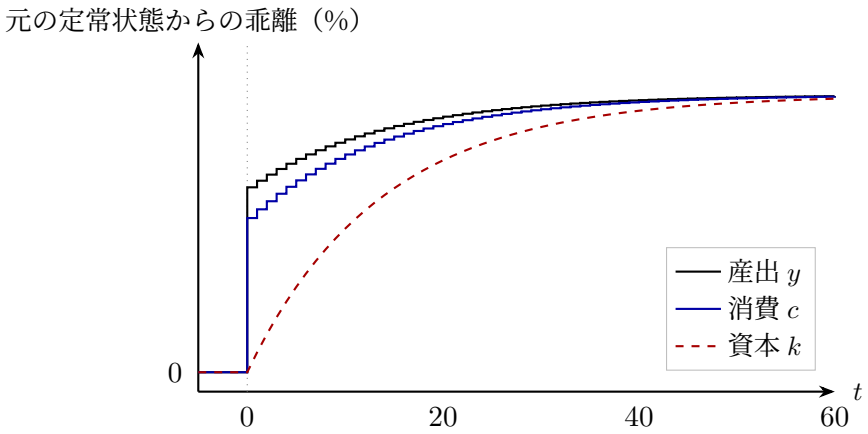


白丸＝元の定常状態、黒丸＝新しい定常状態。黒の破線は元の鞍点経路。

図の読み方

- $t = 0$ の時点で資本は元の水準 $k^*_{旧}$ のまま動けません（状態変数）。
- 消費はジャンプ変数なので、その瞬間に**新しい鞍点経路の上まで**ジャンプします（①）。これが、横断性条件を満たして新しい定常状態に向かう唯一の選び方です。
- その後、経済は新しい鞍点経路に沿って右上へ進み、消費と資本がともに増えながら新しい定常状態に近づきます（②）。

図 8.3　生産性の恒久的な上昇：時間経路



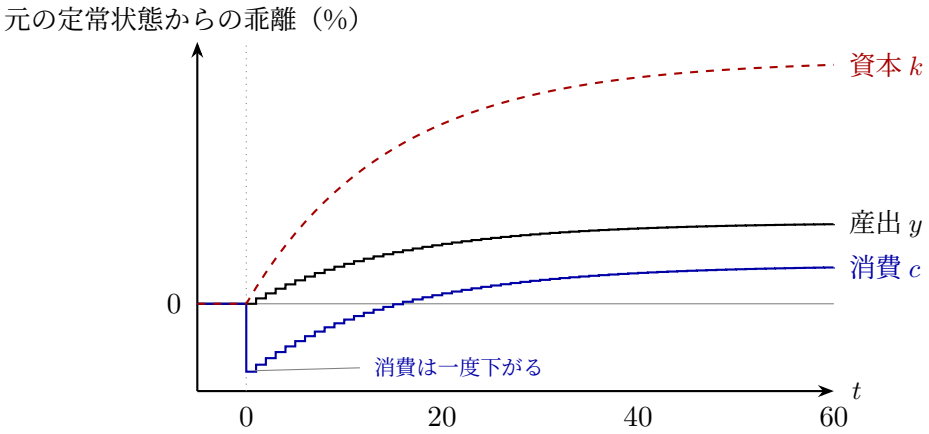
図の読み方

- 産出は $t = 0$ に生産性の上昇分だけ即座に増え、その後は資本の蓄積とともにさらに増えます。
- 消費も $t = 0$ に跳ね上がりますが、産出ほどではありません。収益率が上がったので、増えた所得の一部を投資に回すからです。
- 資本はゆっくりと積み上がります。最終的には、y、c、k がすべて同じ割合（約14%）だけ高い新しい定常状態に落ち着きます。
- 景気循環への含意：生産性の上昇に対して、投資が産出以上に、消費が産出ほどではなく反応する。これは第11章のRBCモデルのインパルス応答の原型です。

8.3 比較動学：人々がより我慢強くなる

今度は、$t = 0$ に割引因子 β が0.96から0.97に上がった（時間選好率 ρ が下がった）とします。修正黄金律 $f'(k^*) = \rho + \delta$ から、新しい定常状態の資本は増えます。生産性は変わらないので、$\Delta k = 0$ の曲線は動かず、$\Delta c = 0$ の線だけが右に移ります。

図 8.4 時間選好率の低下：時間経路



図の読み方

- 我慢強くなった家計は、$t = 0$ に消費を**下げて**貯蓄を増やします。資本はまだ動けないので、産出は $t = 0$ では変わりません。
- 資本が積み上がるにつれて産出と消費は増え、やがて消費は元の水準を上回ります。
- 第1巻第6章のソローモデルで貯蓄率を上げた図とよく似ています。違いは、RCKモデルでは「我慢強さ」という選好の変化が、家計の最適な選択を通じて貯蓄率を変えている点です。

発展：ブロック＝マーマン・モデル：解析的に解ける特殊ケース

対数効用（$\sigma = 1$）、コブ＝ダグラス型 $y = Ak^{\alpha}$、資本が1期で完全に減耗する（$\delta = 1$）という特殊ケースでは、政策関数を式で書けます。$c_t = (1-\alpha\beta)y_t$ と推測してオイラー方程式 $1/c_t = \beta\,\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}/c_{t+1}$ に代入すると、$k_{t+1} = \alpha\beta y_t$ を使って両辺が一致することが確かめられます。したがって

$$k_{t+1} = \alpha\beta A k_t^{\alpha}, \qquad c_t = (1-\alpha\beta)A k_t^{\alpha}.$$

貯蓄率は $\alpha\beta$ で**一定**になり、ソローモデルの遷移式（$n = 0$、$\delta = 1$、$s = \alpha\beta$）とまったく同じ形になります。ソローモデルは、RCKモデルの特殊ケースとして正当化できる場合があるのです。政策関数が式で書けるので、動的計画法や数値計算の練習問題としてもよく使われます。

要点

- 移行過程では利子率と貯蓄率が変化する。資本が少ないうちは利子率が高く、（標準的なパラメータでは）貯蓄率も高い。
- 予期しない恒久的な変化が起きると、資本は動けず、消費が新しい鞍点経路の上までジャンプする。
- 生産性の上昇には、産出・消費・投資がすべて正に反応し、投資の反応が最も大きい。時間選好率の低下には、消費が一度下がってから上昇する。

次の章へ　次章では政府を加え、政府支出と課税が経済に与える影響を、同じ道具で分析します。

第9章

政府を加える：財政支出・リカード等価・課税

> **ここまでの流れ**　第8章で、生産性や選好の変化に経済がどう反応するかを見ました。
> **この章の問い**　政府が財やサービスを買ったり、税を課したり、国債を発行したりすると、経済はどう変わるのか。
> **この章で分かること**　政府支出の**クラウディング・アウト**、恒久的な支出と一時的な支出の違い、**リカード等価**、そして**資本所得税**が定常状態を変える仕組みです。

9.1　政府のモデル化

政府は毎期、財 g_t を購入します。この財は家計の効用にも生産にも寄与しない（単に使われてしまう）とします。財源は家計から一括して徴収する税（**一括税**）τ_t と、国債 b_t の発行です。

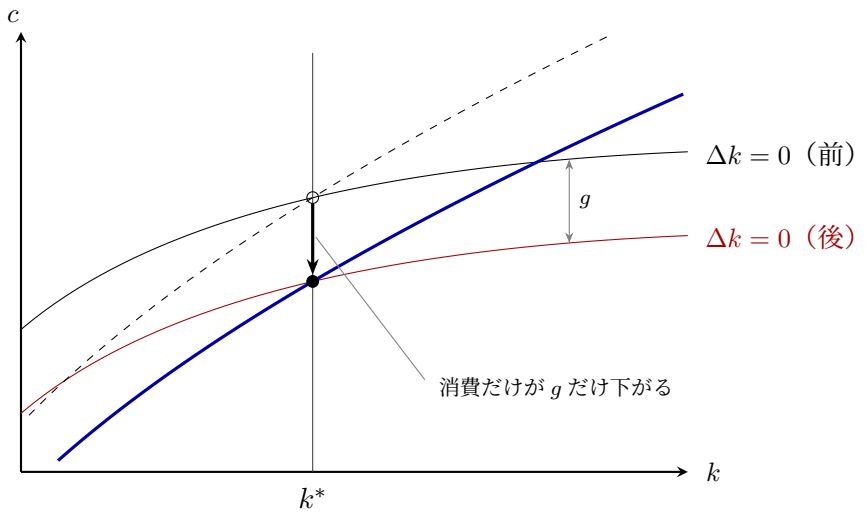
- **政府の予算制約**：$b_{t+1} = (1+r_t)b_t + g_t - \tau_t$（借金の残高は、利払いと支出から税収を引いた分だけ増える）。
- **経済全体の資源制約**：$k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t - g_t$。

一括税は、家計の選択（いくら働くか、いくら貯蓄するか）に応じて変わらない税です。そのため、家計の限界的な判断をゆがめません。

9.2　恒久的な政府支出の増加

$t=0$ に政府支出が予期せず恒久的に g だけ増えたとします。資源制約から、$\Delta k = 0$ の曲線は $c = f(k) - \delta k - g$ となり、ちょうど g だけ**下に平行移動**します。一方、オイラー方程式は変わらないので、$\Delta c = 0$ の線（$k = k^*$）は動きません。

図 9.1　恒久的な政府支出の増加



黒の破線＝元の鞍点経路、青の太線＝新しい鞍点経路。

図の読み方

- 新しい定常状態は、資本が同じ k^* で、消費だけが g だけ低い点です。
- 経済は元の定常状態から、消費が g だけ**真下にジャンプ**して、すぐに新しい定常状態に移ります。資本も産出も利子率も変わりません。
- 政府支出が民間消費を1対1で押しのける（**完全なクラウディング・アウト**）のです。家計は、恒久的に増える税負担（生涯所得の減少）に合わせて、すべての期の消費を同じだけ減らします。

9.3　一時的な政府支出の増加

支出の増加が一時的（たとえば数年間だけ）な場合は、結果が変わります。生涯所得の減少は小さいので、家計は消費を少しだけ減らし、残りは**貯蓄を取り崩して**（資本を減らして）乗り切ろうとします。

- 支出の期間中：消費は少し下がり、投資が大きく減って資本が減少する。資本が減るので利子率は上がる。
- 支出の終了後：資本が元の水準に戻るまで、投資が増え、消費は徐々に回復する。

一時的なショックに対して「貯蓄で平準化する」という反応は、RBCモデルで一時的な生産性ショックを分析するときにも現れます（第11章）。

9.4 リカード等価

政府支出の経路 $\{g_t\}$ を固定したまま、**税の取り方**だけを変えたら、経済はどうなるでしょうか。たとえば今期の税を減らして国債を発行し、将来の税で返済する場合です。

政府の予算制約を無限の将来まで積み上げると（第2章の生涯の予算制約と同じ手順で）

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\tau_t}{(1+r)^t} = (1+r)b_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g_t}{(1+r)^t}$$

となります。税の現在価値は、支出の経路が決まれば決まってしまいます。家計の生涯の予算制約に入るのは税の現在価値だけなので、

要点：リカード等価

政府支出の経路が同じなら、それを今期の税で賄っても、国債を発行して将来の税で賄っても、家計の消費と経済の配分はまったく変わらない。減税で増えた所得は、将来の増税に備えてすべて貯蓄される（国債の購入に回る）。

数式の読み方：リカード等価が成り立つための条件

- 家計が無限の期間を考える（または子孫の税負担を気にかける）こと。寿命が有限で子孫を気にかけないなら、自分が死んだ後の増税は負担にならない。
- 家計が自由に借り入れできること。借入制約があると、減税で手元のお金が増えたときに消費を増やす。
- 税が一括税であること。所得に比例する税なら、税の時期が働き方や貯蓄の判断を変える。

現実にはどの条件も完全には成り立たないので、リカード等価は「財政政策の効果を考えるときの基準点」として使われます。

9.5 資本所得税

最後に、ゆがみのある税の例として、資本所得に率 τ_k で課税する場合を考えます（税収は一括で家計に返すとします）。家計が受け取る税引き後の収益率は $(1-\tau_k)(R_t - \delta)$ になるので、家計のオイラー方程式は

$$u'(c_t) = \beta\big[1 + (1-\tau_k)(f'(k_{t+1}) - \delta)\big]u'(c_{t+1})$$

となり、定常状態では

$$(1-\tau_k)\big[f'(k^*)-\delta\big]=\rho \quad\Longrightarrow\quad f'(k^*)=\delta+\frac{\rho}{1-\tau_k}. \tag{9.1}$$

数式の読み方：資本所得税の効果

- 税引き後の収益率が ρ に等しくなるまで資本が蓄積されるので、税引き前の収益率 $f'(k^*)-\delta$ は ρ より高くなります。つまり**資本は修正黄金律より少なくなります**。
- 税収を一括で返しても、家計の「貯蓄するかどうか」の判断がゆがめられたままなので、資本の減少は元に戻りません。これは第4章の「厚生定理が崩れる」典型例です。
- 一括税なら配分をゆがめないのに、資本所得税はゆがめる。どの税をどう組み合わせるのが望ましいかを考えるのが、**最適課税**の理論です。

発展：財政の持続可能性：利子率と成長率

国債残高の対GDP比 b/y の動きは、近似的に

$$\Delta\Big(\frac{b}{y}\Big)\approx (r-g_y)\frac{b}{y}+\frac{g-\tau}{y}$$

で表されます（g_y は経済の成長率、$g-\tau$ は利払いを除いた財政赤字）。$r>g_y$ なら、利払いを除いた収支を黒字にしない限り債務比率は発散します。$r<g_y$ なら、ある程度の赤字を続けても債務比率は安定しうる。RCKモデルの定常状態は動学的に効率的なので $r>g_y$ ですが、現実の安全資産の利子率は成長率を下回ることも多く、この差が近年の財政政策の議論の焦点になっています。

要点

- 一括税で賄う恒久的な政府支出は、民間消費を1対1でクラウド・アウトし、資本は変わらない。一時的な支出は資本を一時的に減らす。
- リカード等価：支出の経路が同じなら、税か国債かという財源の時期は配分を変えない。
- 資本所得税は定常状態の資本を減らす。ゆがみのある税があると、競争均衡は最適でなくなる。

次の章へ　ここまでは、将来が完全に予見できる経済を考えてきました。次章からは、生産性が確率的に変動し、家計が働く時間も選べるようにして、景気循環を説明する**RBCモデル**に進みます。

第10章

RBCモデル（1）：労働供給と確率的な生産性

> **ここまでの流れ**　第3〜9章で、将来が完全に予見できるRCKモデルの動きを分析しました。第8章では、生産性の上昇に対して投資が産出以上に、消費が産出ほどではなく反応することを見ました。
> **この章の問い**　景気循環は、生産性の確率的な変動に家計と企業が最適に反応した結果として説明できるのか。そのためにはRCKモデルに何を加えればよいのか。
> **この章で分かること**　景気循環の**定型化された事実**、**労働供給**の選択と**フリッシュ弾力性**、**確率的な生産性**と**合理的期待**、RBCモデルの均衡条件と定常状態、そして四半期モデルの**カリブレーション**です。

10.1　景気循環の定型化された事実

景気循環を分析するときは、GDPなどの系列から長期のトレンドを取り除いた「循環成分」の動きを見ます。先進国の四半期データには、おおよそ次の規則性があります。

1. 産出は、トレンドのまわりで持続的に変動する（良い時期も悪い時期も、しばらく続く）。
2. 消費は産出より**変動が小さい**（滑らか）。
3. 投資は産出より**はるかに変動が大きい**。
4. 労働時間は産出と同じ方向に動き（順循環的）、変動の大きさは産出に近い。
5. 労働生産性やソロー残差も順循環的である。

第1巻第9章で見たように、ソロー残差は景気とともに変動します。キッドランドとプレスコット（1982）は、「生産性の確率的な変動」を出発点に、これらの事実をRCKモデルの延長で説明しようとしました。これが**実物的景気循環（RBC）モデル**です。「実物的」とは、貨幣や価格の硬直性を使わずに、実物の要因だけで景気循環を説明しようとすることを指します。

10.2　RCKモデルに加える2つの要素

RBCモデルは、RCKモデルに次の2つを加えたものです。

1. **労働供給の選択**：家計は働く時間 N_t を選ぶ。働けば所得が増えるが、余暇が減って効用が下がる。

2. **確率的な生産性**：生産性 A_t は毎期ランダムなショックを受け、家計は将来の生産性を確実には知らない。

1は景気循環で労働時間が変動することを説明するため、2は景気循環を引き起こす「原因（ショック）」を入れるために必要です。

10.3 家計：消費と労働の選択

家計の期待生涯効用を

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln c_t - \chi \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right] \tag{10.1}$$

とします。消費からは対数効用、労働からは不効用を得ます。$\chi > 0$ は働くことの不効用の大きさ、$\varphi > 0$ は労働の不効用の曲率です。$\mathbb{E}_0$ は0期の情報に基づく**期待値**です。予算制約は $k_{t+1} = (1 + R_t - \delta)k_t + w_t N_t - c_t$ です。

最適条件は2つです。

要点：家計の最適条件

$$\text{期内の条件（労働供給）：} \quad \chi N_t^{\varphi} = \frac{w_t}{c_t} \tag{10.2}$$

$$\text{期間をまたぐ条件：} \quad \frac{1}{c_t} = \beta \, \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \left(1 + R_{t+1} - \delta \right) \right] \tag{10.3}$$

数式の読み方：期内の条件の読み方

- 1時間多く働くと、不効用が χN^{φ} 増えます（左辺）。その代わり賃金 w だけ所得が増え、それを消費に回すと効用が $w \cdot u'(c) = w/c$ 増えます（右辺）。両者が釣り合うところまで働きます。

- 学部ミクロの「余暇と消費の選択」で、限界代替率＝実質賃金という条件と同じです。同じ期の中の選択なので、期待値を含みません。

- 対数をとって変化率で書くと $\varphi \hat{N}_t = \hat{w}_t - \hat{c}_t$、すなわち $\hat{N}_t = \frac{1}{\varphi}(\hat{w}_t - \hat{c}_t)$。消費を一定に保ったまま賃金が1%上がると、労働時間は $1/\varphi$% 増えます。この $1/\varphi$ を**フリッシュ弾力性**と呼びます。また、豊かになって消費が増えると、同じ賃金でも働く時間は減ります（**富の効果**）。

数式の読み方：期待値つきのオイラー方程式

- 来期の生産性が分からないので、来期の消費 c_{t+1} や資本の収益率 R_{t+1} も今期の時点では確率変数です。家計はその期待値で今日の判断をします。
- $\mathbb{E}_t$ は「t 期に利用できるすべての情報に基づく期待値」です。家計はモデルの構造を知っていて、その知識を使って予想を立てる、と仮定します（**合理的期待**）。
- 確実性のある場合（第3章）と比べて、新しいのは $\mathbb{E}_t$ がついたことだけです。1次近似の世界では、この期待値の計算がとても簡単になります（第11章）。

10.4 企業と生産性

企業は第4章と同じく、毎期資本と労働を借りて生産します。

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}, \qquad R_t = \alpha \frac{Y_t}{K_t}, \qquad w_t = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}.$$

生産性の対数 $a_t \equiv \ln A_t$ は、次の**1次の自己回帰過程**（AR(1)）に従うとします。

$$a_t = \rho_a \, a_{t-1} + \varepsilon_t^a, \qquad \varepsilon_t^a \sim \text{i.i.d.}\ (0, \sigma_\varepsilon^2), \qquad 0 \le \rho_a < 1 \tag{10.4}$$

数式の読み方：AR(1) 過程の読み方

- 今期の生産性は、前期の生産性の ρ_a 倍に、予測できない新しいショック ε_t^a を加えたものです。
- ρ_a は**持続性**です。$\rho_a = 0.95$ なら、ショックの効果は毎四半期5%ずつしか消えず、半減するまでに約14四半期（3年半）かかります。
- ショックの影響は時間とともに消え、生産性は長期的には平均（$a = 0$）に戻ります。第1巻第2章の線形差分方程式（$|a| < 1$ の場合）そのものです。

10.5 均衡条件と定常状態

市場の清算条件を加えると、RBCモデルの競争均衡は次の式の組で表されます（人口を1に基準化しています）。

要点：RBCモデルの均衡条件

$$\chi N_t^{\varphi} c_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{N_t} \qquad \text{（労働市場）}$$

$$\frac{1}{c_t} = \beta\,\mathbb{E}_t\!\left[\frac{1}{c_{t+1}}\left(1+\alpha\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}}-\delta\right)\right] \qquad \text{（オイラー方程式）}$$

$$y_t = e^{a_t} k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \qquad \text{（生産関数）}$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + y_t - c_t \qquad \text{（資源制約）}$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a \qquad \text{（生産性）}$$

状態変数は k_t と a_t、ジャンプ変数は c_t（と同じ期に決まる N_t、y_t）。

定常状態（$a=0$、ショックなし）では、オイラー方程式から $1=\beta(1+\alpha y/k-\delta)$、すなわち

$$\frac{y}{k} = \frac{1/\beta - 1 + \delta}{\alpha}, \qquad \frac{i}{y} = \delta\frac{k}{y}, \qquad \frac{c}{y} = 1 - \frac{i}{y}$$

と、比率がパラメータだけで決まります。労働時間 N の水準は χ で決まるので、逆に「定常状態の N がデータに合うように χ を決める」ことができます。

10.6 四半期モデルのカリブレーション

第1巻第9章の方法に従い、定常状態の比率をデータに合わせてパラメータを決めます。

表 10.1　RBCモデルのカリブレーション（四半期）

パラメータ	値	ターゲット・根拠
α	$1/3$	資本分配率
β	0.99	年率約4%の実質利子率
δ	0.025	年率約10%の減耗率
φ	1	フリッシュ弾力性 $=1$
χ	約 7.9	定常状態で $N=1/3$（時間の3分の1を働く）
ρ_a	0.95	ソロー残差の自己相関
σ_ε	0.007	ソロー残差のショックの標準偏差
含意：$C/Y\approx 0.76$、$I/Y\approx 0.24$、$K/Y\approx 9.5$（四半期）		

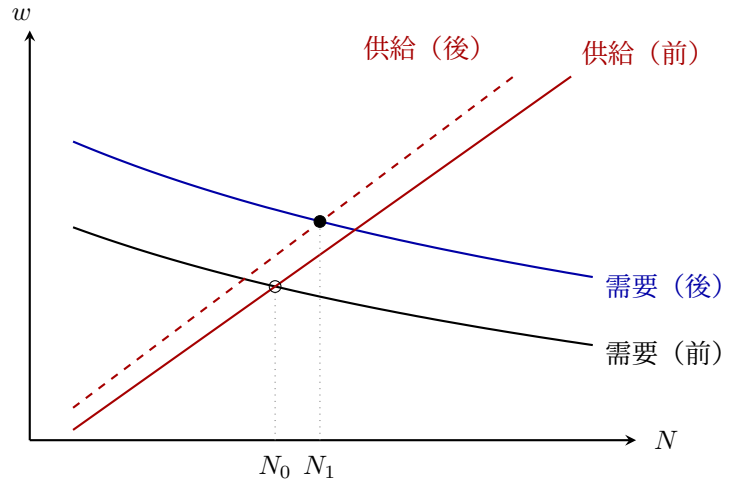
補足：ショックの過程をどう測るか

ρ_a と σ_ε は、四半期のソロー残差 $\ln A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t - (1-\alpha)\ln N_t$ を計算し（第1巻第9章）、そのトレンドからの乖離に AR(1) を当てはめて推定します。「構造のパラメータはカリブレーション、ショックの過程は推定」という組合せが、初期のRBC研究の標準的な手順でした。

10.7 生産性ショックへの直観：労働市場

生産性が上がると、なぜ労働時間が増えるのでしょうか。資本を一定として、労働市場の需要と供給で考えます。

図 10.1 生産性の上昇と労働市場



白丸＝ショック前、黒丸＝ショック後の均衡。

図の読み方

- 生産性が上がると、労働の限界生産物が上がり、**労働需要曲線が上に移ります**（黒→青）。
- 同時に、家計は豊かになって消費を増やすので、同じ賃金でも働く意欲が少し下がり、**労働供給曲線もわずかに上に移ります**（赤の実線→破線、富の効果）。
- 需要の移動のほうが大きいので、新しい均衡では賃金も労働時間も増えます。
- ショックが一時的なほど、家計は「今のうちに働いて稼ぎ、貯蓄しておこう」とするので、消費の増加（供給曲線の移動）は小さく、労働時間は大きく増えます。これが**異時点間の労働の代替**で、RBCモデルが労働時間の変動を説明する中心的な仕組みです。

要点

- RBCモデル＝RCKモデル＋労働供給の選択＋確率的な生産性（AR(1)）。
- 家計の最適条件は、期内の条件（$\chi N^{\varphi} = w/c$）と期待値つきのオイラー方程式。$1/\varphi$ がフリッシュ弾力性。
- 定常状態の比率をデータに合わせてパラメータを決め、ショックの過程はソロー残差から推定する。

次の章へ　均衡条件は非線形で、しかも期待値を含みます。次章では、これを定常状態のまわりで対数線形化して解き、生産性ショックに対する経済の反応（インパルス応答）を描きます。

第11章

RBCモデル（2）：対数線形化・解法・インパルス応答

ここまでの流れ　第10章で、RBCモデルの均衡条件（非線形で期待値を含む）と定常状態、カリブレーションを示しました。
この章の問い　期待値を含む非線形のモデルを、どうやって解くのか。解いたモデルは、生産性のショックにどう反応し、データの事実をどこまで再現できるのか。
この章で分かること　**対数線形化**の計算規則、**未定係数法**による解法と**確実性等価**、**インパルス応答**の読み方、そしてRBCモデルの成功と限界です。この章の手順は、NKモデルを含むすべてのDSGEモデルでそのまま使います。

11.1　対数線形化の4つの規則

変数 x_t の定常状態からの対数偏差を $\hat{x}_t \equiv \ln x_t - \ln x$ と書きます（x は定常状態の値）。$x_t = xe^{\hat{x}_t} \approx x(1+\hat{x}_t)$ を使うと、次の規則が得られます。

要点：対数線形化の規則

1. **積と商**：$z_t = x_t y_t \;\Rightarrow\; \hat{z}_t = \hat{x}_t + \hat{y}_t$、　$z_t = x_t/y_t \;\Rightarrow\; \hat{z}_t = \hat{x}_t - \hat{y}_t$
2. **べき乗**：$z_t = x_t^{\gamma} \;\Rightarrow\; \hat{z}_t = \gamma \hat{x}_t$
3. **和**：$z_t = x_t + y_t \;\Rightarrow\; z\hat{z}_t = x\hat{x}_t + y\hat{y}_t$（定常状態の値で重み付け）
4. **定数との和**：$z_t = 1 + r_t \;\Rightarrow\; \hat{z}_t \approx \dfrac{r}{1+r}\hat{r}_t$

規則1・2はコブ＝ダグラス型やCRRA型の式にそのまま使え、規則3は資源制約のような足し算の式に使います。

11.2　RBCモデルを対数線形化する

第10章の均衡条件に規則を当てはめます。定常状態の比率を y/k、c/k、資本の粗収益率を $R = \alpha y/k$ と書きます。

計算例：各式の対数線形化

- **労働市場**：$\chi N^{\varphi} c = (1-\alpha) y/N$ に規則1・2を使い $\varphi \hat{N}_t + \hat{c}_t = \hat{y}_t - \hat{N}_t$、すなわち $(1+\varphi)\hat{N}_t = \hat{y}_t - \hat{c}_t$。
- **生産関数**：$\hat{y}_t = a_t + \alpha \hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t$。
- **資源制約**：規則3より $k\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)k\hat{k}_t + y\hat{y}_t - c\hat{c}_t$、すなわち $\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\hat{k}_t + \frac{y}{k}\hat{y}_t - \frac{c}{k}\hat{c}_t$。
- **オイラー方程式**：両辺の対数をとり、規則4を使う（定常状態で $\beta(1+R-\delta) = 1$）と

$$\hat{c}_t = \mathbb{E}_t \hat{c}_{t+1} - \beta R\, \mathbb{E}_t\big(\hat{y}_{t+1} - \hat{k}_{t+1}\big).$$

数式の読み方：線形化したオイラー方程式の読み方

- $\beta R(\hat{y}_{t+1} - \hat{k}_{t+1})$ は、来期の資本の収益率の（定常状態からの）変化です。来期の収益率が高いと予想されるほど、今日の消費は来期の消費に比べて低くなります（今日は貯蓄し、明日たくさん消費する）。
- 第1章の $\Delta \ln c \approx (r-\rho)/\sigma$ と同じ内容で、$\sigma = 1$（対数効用）の場合です。
- 続巻のNKモデルの動学的IS曲線は、この式の「資本の収益率」を「実質利子率」に置き換えたものです。

労働市場と生産関数の2式から $\hat{N}_t$ と $\hat{y}_t$ は $(\hat{k}_t, a_t, \hat{c}_t)$ の1次式で書けるので、モデルは結局、状態変数 $\hat{k}_t, a_t$ とジャンプ変数 $\hat{c}_t$ についての線形の体系になります。

11.3 未定係数法で解く

線形化したモデルの解は、「状態変数の1次関数」の形をしているはずです。そこで次の形を**推測**し、係数をモデルの式から決めます。

要点：推測する解の形（政策関数と遷移式）

$$\hat{c}_t = \eta_{ck}\,\hat{k}_t + \eta_{ca}\,a_t, \qquad \hat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\,\hat{k}_t + \eta_{ka}\,a_t \tag{11.1}$$

手順：

1. 推測(11.1)を資源制約とオイラー方程式に代入する。来期の変数は、推測を1期ずらして $\hat{c}_{t+1} = \eta_{ck}\hat{k}_{t+1} + \eta_{ca}a_{t+1}$ と書く。
2. 期待値は、$\mathbb{E}_t a_{t+1} = \rho_a a_t$（ショック ε^a_{t+1} の期待値は0）を使うだけで計算できる。

3. 両辺の $\hat{k}_t$ の係数と a_t の係数がそれぞれ等しくなる、という条件から、4つの未知の係数についての方程式が得られる。

4. η_{kk} についての式は2次方程式になり、解が2つ出てくる。そのうち**絶対値が1より小さいもの**を選ぶ（もう一方は資本が発散する解で、第6章の不安定な固有値に当たる）。

5. 残りの係数は1次方程式を解けば求まる。

計算例：基準のカリブレーションでの解

第10章の表10.1のパラメータで計算すると

$$\hat{c}_t = 0.56\,\hat{k}_t + 0.38\,a_t, \qquad \hat{k}_{t+1} = 0.95\,\hat{k}_t + 0.11\,a_t.$$

生産性が1%高いと、消費はすぐに0.38%増え、来期の資本は0.11%増えます。資本が1%多いと、消費は0.56%多く、その差は毎期約5%ずつ縮みます（$\eta_{kk} \approx 0.95$）。

補足：確実性等価

解の係数には、ショックの大きさ σ_ε が入っていません。1次近似の世界では、家計は「将来のショックの期待値（ゼロ）」だけを見て行動し、不確実性の大きさは行動に影響しないのです。これを**確実性等価**と呼びます。予備的貯蓄やリスク・プレミアムのように「不確実性そのもの」が重要な問題を扱うには、2次以上の近似や非線形の解法が必要になります。

コードで確かめる：政策関数からインパルス応答を計算する（Python）

```
eta_ck, eta_ca, eta_kk, eta_ka = 0.557, 0.384, 0.954, 0.107
rho_a = 0.95
k_hat, a = 0.0, 0.01        # 0期に生産性が1%上がる
for t in range(41):
    c_hat = eta_ck * k_hat + eta_ca * a      # 政策関数
    print(t, 100 * a, 100 * c_hat)           # %で表示
    k_hat = eta_kk * k_hat + eta_ka * a      # 資本の遷移式
    a = rho_a * a                            # その後ショックはない
```

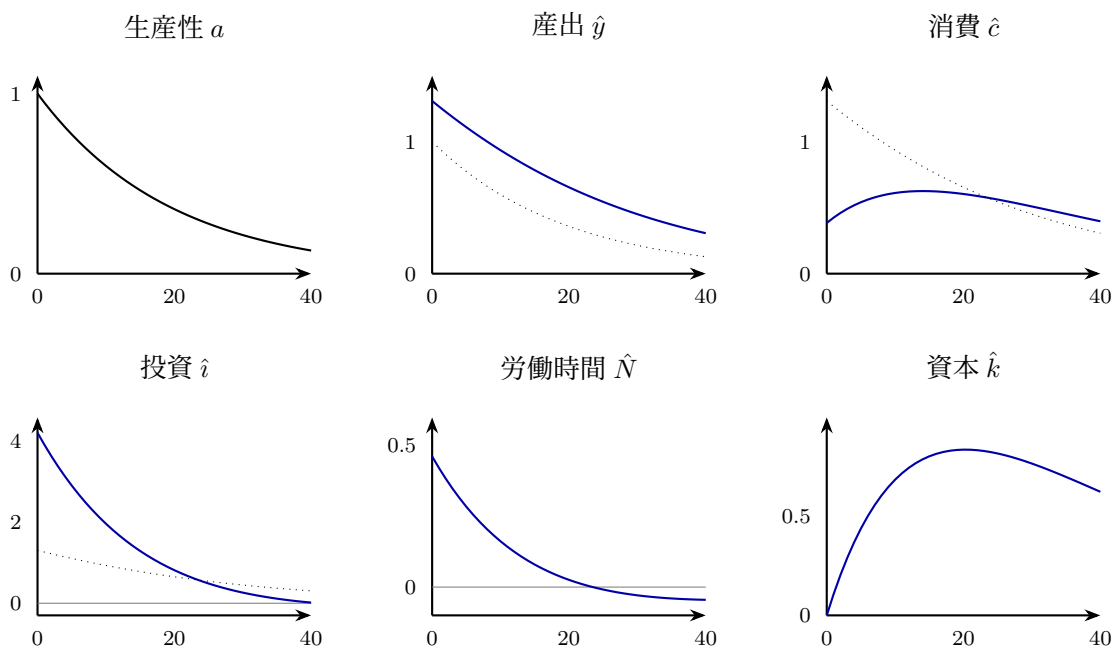
数式の読み方：コードの読み方

- 2行目で、0期に生産性だけが1%上がり、資本はまだ定常状態にある状況を作ります。
- for の中では、(1) 政策関数で今期の消費を決め、(2) 遷移式で来期の資本を決め、(3) 生産性を ρ_a 倍にする、という3つをくり返すだけです。産出・投資・労働時間も、同じ期の式から順に計算できます。
- 実際の研究では、Dynare などのソフトウェアが、モデルの式を書くだけで線形化・解法・インパルス応答の計算までを自動で行います。その中で行われているのが、この章の手順です。

11.4 インパルス応答

0期に生産性が1%上がり（$\varepsilon_0^a = 0.01$）、その後は新たなショックがないときの各変数の経路を**インパルス応答**と呼びます。

図 11.1 生産性ショックに対するインパルス応答



横軸は四半期、縦軸は定常状態からの乖離（%）。点線は比較のための産出（または生産性）の応答。

図の読み方

- **産出**は生産性の1%を上回って約1.3%増えます。労働時間も増えるので、ショックが**増幅**されるのです。
- **消費**は産出よりずっと小さく反応し、その後ゆっくり上昇してから戻ります。家計が一時的な所得の増加を貯蓄に回し、消費を平準化しているためです（第1章）。
- **投資**は約4%と、産出の3倍以上反応します。消費を平準化した分の所得が投資に回るからです。第8章の恒久的なショックと比べ、一時的なショックでは投資の反応がずっと大きくなります。
- **労働時間**は、生産性が高い「稼ぎ時」に増えます（第10章の異時点間の代替）。
- **資本**は投資の結果ゆっくり積み上がり、生産性が戻った後も高いままです。ショックの効果は資本を通じて長く残ります（**伝播**）。

11.5 モデルの評価：シミュレーションとデータ

ランダムなショックを何万期も与えてモデルをシミュレーションし、データと同じ方法でトレンドを除いて、各変数の変動の大きさを計算します。基準のカリブレーションでは、およそ次のようになります。

表 11.1 シミュレーションによる変動の大きさ（産出に対する相対的な標準偏差）

変数	モデル	データの傾向（先進国の四半期データ）
産出	1	1
消費	約0.3	産出より小さい
投資	約3.3	産出の数倍
労働時間	約0.35	産出に近い

要点：RBCモデルの成功と限界

- **成功**：生産性ショックという1種類のショックだけで、産出の変動のかなりの部分と、「消費は滑らか・投資は大きく変動・すべてが順循環的」という事実を同時に再現した。
- **限界1**：労働時間の変動が小さすぎる。フリッシュ弾力性を大きくすれば改善するが、ミクロのデータで推定される弾力性は小さい。
- **限界2**：景気後退を「技術の後退」で説明することになるが、技術が実際に後退するとは考えにくい。ソロー残差の変動には、稼働率の変動なども含まれる（第1巻第9章）。
- **限界3**：貨幣や金融政策が実物経済に影響しない。現実には、金融政策のショックが産出を動かすという実証結果が多い。

限界3に答えるために、RBCモデルに独占的競争と価格の硬直性を加えたのが、続巻で扱うNKモデルです。

次の章へ　最後の章では、本巻で組み立てた道具が、NKモデルとDSGEモデルにどうつながるのかを整理します。

第12章

NK・DSGEモデルへの橋渡し

> **ここまでの流れ**　第1〜11章で、無限期間の最適化、競争均衡、鞍点経路と固有値、対数線形化と未定係数法、インパルス応答という道具をそろえました。
> **この章の問い**　NKモデルやDSGEモデルは、本巻のRBCモデルに何を付け加えたものなのか。続巻を読むために、何を押さえておけばよいのか。
> **この章で分かること**　NKモデルの3つの新しい要素、RBCモデルの式とNKモデルの式の対応、**3本方程式モデル**の見取り図、そしてDSGEモデルの分析の流れです。

12.1　NKモデルが加える3つの要素

第11章の限界3（貨幣や金融政策が実物経済に影響しない）に答えるため、NKモデルはRBCモデルに次の3つを加えます。

1. **独占的競争**：企業はそれぞれ少しずつ違う財を作り、限界費用に**マークアップ**を上乗せして価格を設定する。価格を自分で決められるので、「価格をいつ変えるか」という問題が生まれる。数学的な道具（ディキシット＝スティグリッツ集計）は第3巻で準備します。
2. **価格の硬直性**：企業は毎期価格を変えられるとは限らない（たとえば、毎期ランダムに一部の企業だけが価格を改定できる）。そのため、物価はゆっくりとしか動かない。
3. **金融政策のルール**：中央銀行が名目利子率を、インフレ率や景気に応じて設定する。

価格が硬直的だと、名目利子率を動かせば実質利子率が動き、オイラー方程式を通じて今日の需要（消費）が動きます。こうして、金融政策が実物経済に影響するようになるのです。

12.2 RBCモデルの式とNKモデルの式の対応

表 12.1 RBCモデルとNKモデルの対応

	RBCモデル（本巻）	NKモデル（続巻）
家計：異時点間	オイラー方程式（資本の収益率）	動学的IS曲線（実質利子率）
家計：期内	$\chi N^{\varphi} = w/c$	同じ
企業	完全競争：価格＝限界費用	独占的競争：価格＝マークアップ×限界費用
価格の決まり方	伸縮的	硬直的 → ニューケインジアン・フィリップス曲線
政策	なし（厚生定理が成り立つ）	金融政策ルール（テイラー・ルール）
景気変動の評価	すべて最適な反応	一部は非効率 → 政策で改善できる

12.3 3本方程式モデルの見取り図

基本的なNKモデルは、資本を省略して対数線形化すると、次の3本の式にまとまります（記号の詳しい意味と導出は続巻で扱います）。

要点：基本的なNKモデル（予告）

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - r_t^n\right) \qquad \text{（動学的IS曲線）}$$

$$\pi_t = \beta\, \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + \kappa\, \tilde{y}_t \qquad \text{（NKフィリップス曲線）}$$

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t \qquad \text{（金融政策ルール）}$$

$\tilde{y}_t$：産出ギャップ、π_t：インフレ率、i_t：名目利子率、r_t^n：自然利子率。

数式の読み方：本巻の道具がどこで使われるか

- **1本目**は、第1・2章のオイラー方程式を対数線形化したもの（第11章の手順）です。
- **2本目**は、価格を改定できる企業が「将来の限界費用を見通して価格を決める」ことから導かれます。今日のインフレ率が**将来の予想インフレ率**に依存する前向きの式で、β は家計の割引因子そのものです。
- **産出ギャップと自然利子率**：$\tilde{y}_t$ は「価格が伸縮的だったら実現したはずの産出（**自然産出**）」からの乖離です。価格が伸縮的なNKモデルは本巻のRBCモデルとほぼ同じなので、**RBCモデルはNKモデルの「基準点」**の役割を果たします。
- **均衡の一意性**：$\tilde{y}_t$ と π_t はどちらもジャンプ変数です。第6章のブランシャール＝カーン条件から、不安定な固有値が2つ必要で、それを保証する条件がテイラー原則（$\phi_\pi > 1$ がおおよその目安）です。

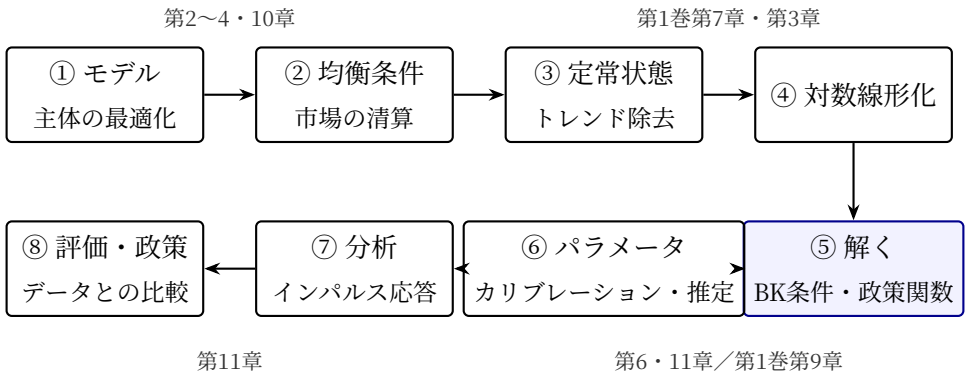
補足：記号の注意

NKモデルの金融政策ルールの係数 ϕ_π, ϕ_y は、本巻の労働の不効用の曲率 φ（フリッシュ弾力性の逆数）とは別のものです。どちらもNKモデルに同時に登場するので、文字の形（ϕ と φ）で区別します。

12.4 DSGEモデルの分析の流れ

中央銀行などで使われる中規模のDSGEモデルは、NKモデルに、消費の習慣形成、投資の調整費用、資本の稼働率、賃金の硬直性、多くの種類のショックなどを加えたものです。式の数は多くなりますが、分析の手順は本巻とまったく同じです。

図 12.1　DSGEモデルの分析の流れ



各段階の下（上）の注は、本シリーズで扱った章。

図の読み方

- ①〜②はモデルを書く段階、③〜⑤はモデルを解く段階、⑥〜⑧はモデルをデータと結びつける段階です。
- 現代のDSGE研究では、⑥でベイズ推定を使うことが多くなっています。カリブレーションとの違いは、「定常状態の比率」だけでなく「変数の動き全体」をデータに合わせる点です。
- ③〜⑤と⑦は、Dynare などのソフトウェアが自動で行います。ソフトウェアの中で何が起きているかを理解していることが、モデルを正しく使い、結果を正しく読むための鍵です。

12.5 続巻に進む前のチェックリスト

要点：ここまでに身につけておきたいこと

- オイラー方程式を導き、その経済学的な意味を言葉で説明できる（第1・2章）。
- 横断性条件が何を排除するのかを説明できる（第2・5章）。
- 競争均衡を「所与・配分と価格・最適化・市場の清算」の形で定義できる（第4章）。
- 状態変数とジャンプ変数を区別し、鞍点経路の意味を説明できる（第5章）。
- 2変数の線形系の固有値を数え、ブランシャール＝カーン条件を当てはめられる（第6章）。
- 均衡条件を対数線形化し、未定係数法で政策関数を求められる（第11章）。
- インパルス応答を見て、各変数の反応の理由を説明できる（第8・11章）。

第3巻へ　第3巻では、長期の成長率そのものを説明する内生的成長モデルを扱います。その途中で、NKモデルの企業部門の土台となる独占的競争とマークアップ価格設定を、詳しく準備します。

付録

確認問題と記号表

A.1 確認問題

1. 2期間モデルで、CRRA型効用のもとでのオイラー方程式を導き、$\ln c_2 - \ln c_1 \approx (r-\rho)/\sigma$ となることを示せ。
2. 無限期間の家計の問題で、横断性条件が満たされない経路の例を挙げ、なぜそれが最適でないかを説明せよ。
3. ベルマン方程式 $V(a) = \max_c \{u(c) + \beta V((1+r)a + w - c)\}$ から、包絡線定理を使ってオイラー方程式を導け。
4. RCKモデルの計画者問題を解き、修正黄金律 $f'(k^*) = \rho + \delta$ を導け。コブ＝ダグラス型で定常状態の貯蓄率を求めよ。
5. RCKモデルの競争均衡を定義し、その配分が計画者の解と一致することを示せ。
6. RCKモデルの位相図を描き、$\Delta k = 0$、$\Delta c = 0$ の線、4つの領域の矢印、鞍点経路を示せ。
7. 線形化したRCKモデルの行列 M について、$p(1) < 0$ を使って固有値が $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ となることを示せ。
8. 生産性が予期せず恒久的に上がったとき、k、c、y の経路を位相図と時間経路の両方で説明せよ。
9. 一括税で賄う恒久的な政府支出の増加が、民間消費を1対1でクラウド・アウトする理由を説明せよ。
10. RBCモデルの期内の条件を対数線形化し、フリッシュ弾力性の意味を説明せよ。
11. 一時的な生産性ショックに対して、投資が産出より大きく反応する理由を、消費の平準化の観点から説明せよ。

補足：略解

1. 第1章の式(1.2)、(1.4)を参照。
2. 第2章の図2.1を参照。消費が少なすぎて資産が積み上がる経路は、資産を使えば全期間の効用を上げられる。
3. 第2章の計算例を参照。
4. 第3章の式(3.3)、(3.4)。$s^* = \alpha\delta/(\rho+\delta)$。
5. 第4章を参照。オイラーの定理で予算制約が資源制約になり、$R = f'(k)$ でオイラー方程式が一致する。
6. 第5章の図5.1。
7. 第6章を参照。$p(0) > 0$、$p(1) < 0$、$p(\lambda) \to \infty$ より1つは $(0,1)$、もう1つは $(1,\infty)$ にある。
8. 第8章の図8.2、8.3。
9. 第9章を参照。生涯所得が支出の現在価値だけ減り、オイラー方程式は変わらないため。
10. $\hat{N} = (\hat{w} - \hat{c})/\varphi$。消費一定で賃金が1%上がったときの労働時間の変化率が $1/\varphi$。
11. 第11章のインパルス応答の読み方を参照。

A.2 本巻で加わった記号

表 A.1　第2巻の記号表

記号	意味	備考
β, ρ	割引因子・時間選好率	$\beta = 1/(1+\rho)$
σ	相対的危険回避度	$1/\sigma$ が異時点間の代替の弾力性
$u(c)$	期間効用関数	CRRA型 $(c^{1-\sigma}-1)/(1-\sigma)$
λ_t, $\mu(t)$	予算制約の乗数・共役変数	資産（資本）の潜在価格
$V(\cdot)$	価値関数	ベルマン方程式
R_t, r_t	資本の賃料・純収益率	$r = R - \delta$
λ_1, λ_2	線形化した体系の固有値	安定・不安定
θ, η_{ij}	政策関数・遷移式の係数	第6・11章
g_t, τ_t, b_t	政府支出・一括税・国債	第9章
N_t	労働時間	
χ, φ	労働の不効用の大きさ・曲率	$1/\varphi$ がフリッシュ弾力性
a_t, ρ_a, ε_t^a	対数生産性・持続性・ショック	AR(1)
$\mathbb{E}_t$	t 期の情報に基づく期待値	合理的期待