大学院マクロ攻略マニュアル　第1巻

ソローモデルと動学の基礎

離散時間・連続時間の両面から読む
定常状態・移行動学・均衡経路・カリブレーション

このマニュアルは、大学院のマクロ経済学（コアコース）で使う動学モデルを、学部の知識から順に積み上げて理解するための自習用スタディガイドです。全3巻（＋続巻）で、最終的にニューケインジアン・モデルとDSGEモデルを読めるようになることを目標にしています。
枠の色は、**青**＝要点、**赤**＝図の読み方、**灰**＝数式の読み方・計算例・補足、**緑**＝発展（飛ばしても本筋は追えます）です。

目次

序　シリーズの地図：成長モデルからDSGEへ　5

序.1　大学院マクロは「1つの骨格」の積み上げ 5
序.2　すべてのモデルに共通する4つの骨格 6
序.3　離散時間と連続時間 7
序.4　本巻の構成 7

1　成長の事実とデータの読み方　8

1.1　マクロ経済学の2つの問い 8
1.2　モデルの変数と国民経済計算 8
1.3　成長率と対数 9
1.4　カルドアの定型化された事実 11

2 経済の動きを調べる道具：差分方程式と微分方程式 12

2.1 状態と遷移式 12

2.2 線形の差分方程式 13

2.3 非線形の式と1次近似 14

2.4 連続時間：微分方程式 16

2.5 離散時間と連続時間の対応 17

3 ソローモデルの設定 19

3.1 出発点となる直観 19

3.2 時点の約束：ストックは期首、フローは期中 19

3.3 生産関数 20

3.4 一人当たりへの変換 22

3.5 貯蓄と人口 23

3.6 基本方程式の導出（離散時間） 23

3.7 連続時間で書くと 24

4 定常状態と安定性 26

4.1 定常状態の条件 26

4.2 ソロー図 27

4.3 存在と一意性 28

4.4 安定性：離散時間 28

4.5 安定性：連続時間 30

4.6 成長率で見る：成長はなぜ止まるのか 30

5 移行動学と収束の速さ 32

5.1 移行動学とは 32

5.2 1次近似による収束速度（離散時間） 32

5.3 半減期 33

5.4 数値計算で経路を描く 34

6 比較静学・黄金律・動学的効率性 37

6.1 比較静学と比較動学 37

6.2 貯蓄率の上昇 37

6.3 人口成長率と減耗率の上昇 39
6.4 黄金律 39
6.5 動学的非効率性 41

7 技術進歩と均斉成長経路 43
7.1 技術進歩の3つの入れ方 43
7.2 効率単位への変換（トレンド除去） 44
7.3 均斉成長経路 44
7.4 技術進歩のもとでの黄金律 46

8 分権経済として読む：要素価格と均衡経路 48
8.1 経済の登場人物 48
8.2 企業の問題と要素価格 49
8.3 オイラーの定理と分配率 49
8.4 家計の行動と市場の清算 50
8.5 均衡経路の定義 51
8.6 移行過程での要素価格 52

9 成長会計とカリブレーション 53
9.1 成長会計の基本式 53
9.2 資本・産出比率で書く成長会計 54
9.3 ソロー残差の読み方 54
9.4 カリブレーションとは 55
9.5 ソローモデルのカリブレーション 56
9.6 ターゲット外での評価：収束速度 57
9.7 年次から四半期へ：RBCへの準備 57

10 収束の実証と拡張ソローモデル 59
10.1 収束の式 59
10.2 収束回帰 60
10.3 実証研究の主な発見 60
10.4 収束速度のパズル 61
10.5 拡張ソローモデル：人的資本を加える 61

10.6　ソローモデルの到達点 62
10.7　第2巻へ：貯蓄を「選ぶ」と何が変わるか 63

A　確認問題とシリーズ共通の記号表　65

A.1　確認問題 65
A.2　シリーズ共通の記号表 66

序章

シリーズの地図：成長モデルからDSGEへ

> **この章の問い**　大学院マクロの最初に、なぜ「成長モデル」を学ぶのか。それはニューケインジアン・モデルやDSGEモデルとどうつながっているのか。
> **この章で分かること**　シリーズ全体の見取り図と、すべてのモデルに共通する**4つの骨格**（状態変数・遷移式・均衡・定常状態まわりの近似）です。

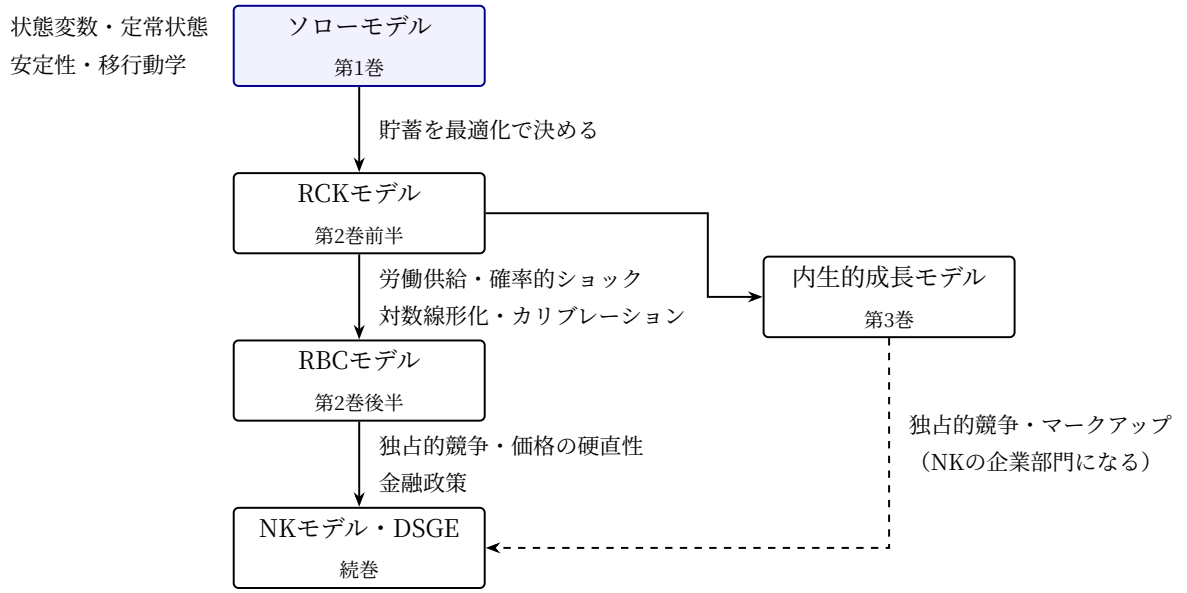
序.1　大学院マクロは「1つの骨格」の積み上げ

学部のマクロ経済学では、IS–LM、AD–AS、ソローモデルなどが、それぞれ別々の道具として登場します。一方、大学院のマクロ経済学は、ほぼ**1つの骨格**を少しずつ拡張していく形で進みます。

その骨格とは、「**今期の経済の状態が分かれば、ルールに従って来期の状態が決まる**」という見方です。たとえば今年の資本ストック（機械や建物の量）が分かれば、人々の貯蓄から生まれる投資と、古くなった設備の減耗によって、来年の資本が決まります。来年の資本が決まれば、同じ仕組みで再来年の資本が決まります。経済を、このように**今の姿が次の姿を決めていく仕組み**として描くのです。

- **ソローモデル**（本巻）：状態は資本 k_t だけ。貯蓄のルールは「所得の一定割合」と**外から与える**。
- **ラムゼイ＝キャス＝クープマンス（RCK）モデル**（第2巻）：貯蓄を家計の**最適化**で決める。状態変数 k_t に加えて、将来の予想で動く消費 c_t が登場する。
- **実物的景気循環（RBC）モデル**（第2巻後半）：RCKモデルに**労働供給**と**確率的な生産性ショック**を加え、景気変動を説明する。ここで**対数線形化**と**カリブレーション**が主役になる。
- **内生的成長モデル**（第3巻）：長期の成長率そのものを説明する。途中で登場する**独占的競争**と**マークアップ価格設定**は、そのままニューケインジアン・モデルの企業部門になる。
- **ニューケインジアン（NK）モデル**（続巻）：RBCモデルに独占的競争と**価格の硬直性**を加え、金融政策を分析する。これに様々な摩擦を加えて推定したものが、中央銀行などで使われる**DSGEモデル**である。

図 序.1　シリーズの見取り図



実線は「モデルを拡張する」流れ、破線は「道具を提供する」流れを表します。

序.2　すべてのモデルに共通する4つの骨格

このシリーズで扱うモデルは、見た目は違っても、次の4つの部品で組み立てられています。本巻のソローモデルは、この4つを最も簡単な形で体験できるモデルです。

要点：動学マクロモデルの4つの骨格

1. **状態変数**：今期の初めに、過去の投資の積み重ねによって**すでに決まっている**変数（資本ストックなど）。
2. **遷移式**：今期の状態から来期の状態を決めるルール。ソローモデルでは「貯蓄が資本を増やし、減耗と人口成長が一人当たり資本を減らす」という資本蓄積の式 $k_{t+1} = g(k_t)$ です。
3. **均衡**：各主体の行動と市場の清算から、遷移式を導くこと。
4. **定常状態と近似**：経済が行き着く先（定常状態）を求め、その近くで1次近似して動きを調べること。

ソローモデルでは、(2) の遷移式が「貯蓄率一定」という仮定から機械的に出てきます。第2巻のRCKモデルでは、同じ遷移式を家計と企業の最適化から**導き出す**ことになります。そしてNK・DSGEモデルでも、(4) の「定常状態のまわりで1次近似する」という手順がそのまま分析の中心になります。

序.3　離散時間と連続時間

動学モデルには、時間を $t = 0, 1, 2, \ldots$ と飛び飛びに数える**離散時間**と、$t \geq 0$ の実数で連続的に流れるとみなす**連続時間**の2つの書き方があります。

- **離散時間**：変化は差分 $x_{t+1} - x_t$ で表し、モデルは**差分方程式**になる。データ（年次・四半期）と直接対応し、DSGEモデルやコンピュータでの計算はほぼすべて離散時間で書かれる。
- **連続時間**：変化は時間微分 $\dot{x} \equiv \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で表し、モデルは**微分方程式**になる。式が簡潔になり、図を使って動きを調べやすい。成長論の多くの教科書や論文はこちらで書かれている。

大学院の授業や教科書では、両方が混在して出てきます。本シリーズでは**離散時間を基本**にし、各章で「連続時間で書くとどうなるか」を並べて示します。両者の対応（第2章）をつかんでおけば、どちらで書かれた文献も読めるようになります。

序.4　本巻の構成

表 序.1　本巻の構成

章	内容	骨格との対応
第1章	成長の事実とデータの読み方	何を説明するか
第2章	経済の動きを調べる道具：差分方程式と微分方程式	道具
第3章	ソローモデルの設定	状態変数・遷移式
第4章	定常状態と安定性	定常状態
第5章	移行動学と収束の速さ	1次近似
第6章	比較静学・黄金律・動学的効率性	定常状態の性質
第7章	技術進歩と均斉成長経路	定常状態の一般化
第8章	分権経済として読む：要素価格と均衡経路	均衡
第9章	成長会計とカリブレーション	データとの対応
第10章	収束の実証と拡張ソローモデル	データとの対応
付録	確認問題・記号表	

補足：前提とする知識

学部レベルの微分（合成関数・対数関数の微分）、偏微分、等比級数の和を使います。時間とともに動く経済を調べるための数学（差分方程式・微分方程式・1次近似）は、第2章で資本蓄積の例を使いながら準備します。

第1章

成長の事実とデータの読み方

> **この章の問い**　成長理論は、どんな事実を説明しようとしているのか。そのデータは、どのように読めばよいのか。
> **この章で分かること**　モデルの変数と国民経済計算の対応、**成長率と対数**の関係、対数目盛のグラフの読み方、そして成長理論の出発点である**カルドアの定型化された事実**です。

1.1　マクロ経済学の2つの問い

マクロ経済学は、一国全体の生産・分配・消費を扱います。その中心にあるのは、時間の長さが異なる2つの問いです。

1. **長期の問い（成長）**：なぜ一人当たりの所得は数十年・数百年にわたって増え続けるのか。なぜ国によって豊かさがこれほど違うのか。
2. **短期の問い（景気循環）**：なぜ経済は好況と不況を繰り返すのか。政策はそれを和らげられるのか。

かつてこの2つは別々の理論で扱われていました。現代のマクロ経済学の大きな特徴は、**同じモデルの骨格で両方を扱う**ことです。成長モデルに確率的なショックを加えたものがRBCモデルであり、それに価格の硬直性を加えたものがNKモデルです（序章）。成長理論から学ぶのは、この骨格を最も見通しよく理解できるからです。

1.2　モデルの変数と国民経済計算

理論を現実と比べるには、モデルの変数がデータの何に当たるかを決めておく必要があります。データの出所は**国民経済計算**（SNA）で、国連が定めた共通の基準に沿って各国で作られています。

表 1.1　モデルの変数と国民経済計算の対応

記号	意味	国民経済計算での対応
Y_t	産出（所得）	実質GDP（国内総生産）
C_t	消費	民間最終消費支出（＋政府消費を含めることもある）
I_t	投資	総固定資本形成＋在庫変動
K_t	資本ストック	固定資産の残高（期首）
L_t	労働	就業者数、または総労働時間
δK_t	資本減耗	固定資本減耗

いくつか注意があります。

- **付加価値**：GDPは各生産者の「売上から原材料などの中間投入を差し引いたもの」の合計です。中間投入を差し引くのは、同じ価値を二重に数えないためです。
- **総（グロス）と純（ネット）**：GDPは資本の減耗分を差し引く前の「総」の概念です。投資 I_t も減耗の補塡分を含む「総投資」で、純投資は $I_t - \delta K_t$ です。
- **閉鎖経済**：本巻のモデルは政府と海外を省略し、生産物は消費か投資のどちらかに使われる（$Y_t = C_t + I_t$）とします。
- **フローとストック**：Y_t, C_t, I_t は「期間中にどれだけ」という**フロー**、K_t は「ある時点にどれだけあるか」という**ストック**です。この区別が、動学モデルのすべての出発点になります（第3章）。

1.3　成長率と対数

成長を論じるとき、最もよく使う道具が**対数**です。

変数 x_t の**成長率**を $g_{x,t} \equiv (x_{t+1} - x_t)/x_t$ と定義します。このとき

$$\ln x_{t+1} - \ln x_t = \ln(1 + g_{x,t}) \approx g_{x,t} \tag{1.1}$$

が成り立ちます。近似は $\ln(1+z) \approx z$（z が0に近いとき）によります。

数式の読み方：対数の差は成長率

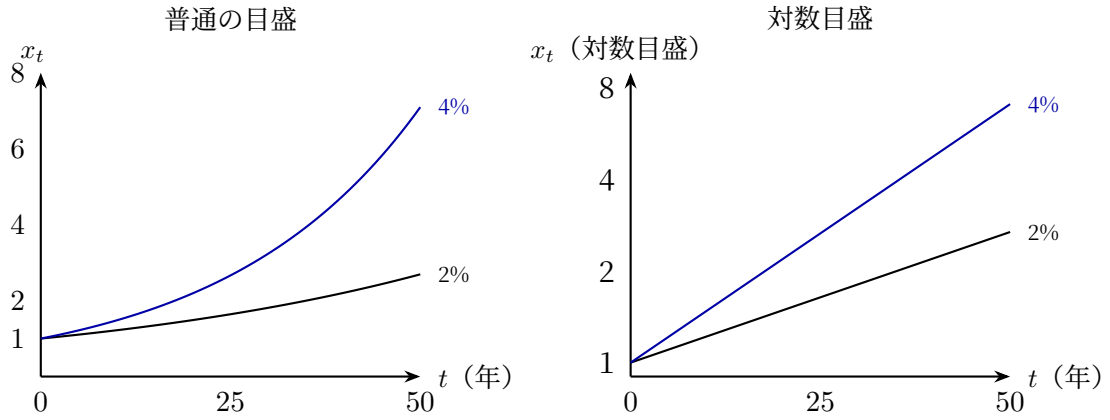
- **言葉で**：「対数をとって差をとれば、成長率になる」。成長率が数%程度なら、近似の誤差はごくわずかです（$g = 0.03$ なら $\ln 1.03 = 0.0296$）。
- **積は和に**：$y = Y/L$ なら $\ln y = \ln Y - \ln L$ なので、一人当たりGDPの成長率 $\approx$ GDPの成長率 $-$ 人口の成長率。
- **べき乗は係数に**：$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ なら $\ln Y = \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L$。成長率で書けば $g_Y \approx \alpha g_K + (1-\alpha) g_L$。この性質は成長会計（第9章）の土台です。

一定の率 g で成長し続けるなら $x_t = x_0(1+g)^t$ で、対数をとると

$$\ln x_t = \ln x_0 + t \ln(1+g)$$

と**時間 t の1次式**になります。したがって、縦軸を対数目盛にしたグラフでは、一定率の成長は**直線**に見え、その**傾きが成長率**を表します。

図 1.1　同じデータを普通の目盛と対数目盛で描く



年2%（黒）と年4%（青）で成長する2つの系列。

図の読み方

- 左の普通の目盛では、4%の系列が後半に「急加速」しているように見えますが、成長率は最初から最後まで一定です。普通の目盛では、水準が大きくなるほど同じ成長率でも増加幅が大きくなるためです。
- 右の対数目盛では、どちらも**直線**になり、傾きの違いがそのまま成長率の違いを表します。目盛が1, 2, 4, 8 と等間隔で並んでいるので、「何年で2倍になったか」も読み取れます。
- 長期の成長データは、必ず対数目盛で見る習慣をつけましょう。

計算例：70の法則

年率 g で成長する変数が2倍になるまでの年数 T は、$(1+g)^T = 2$ より $T = \ln 2 / \ln(1+g) \approx 0.69/g$ です。成長率を%で表せば「70÷成長率（%）」年。年2%なら約35年、年7%なら約10年で2倍になります。わずか1〜2%ポイントの成長率の差が、数十年で生活水準の大きな差になることが分かります。

1.4 カルドアの定型化された事実

カルドア（1961）は、先進国の長期データに共通して見られる規則性を、次の6つにまとめました。細部の数値ではなく「おおよそ成り立つ傾向」なので、**定型化された事実**（stylized facts）と呼ばれます。

要点：カルドアの定型化された事実

1. 労働者一人当たりの産出は、持続的に成長する。
2. 労働者一人当たりの資本も、持続的に成長する。
3. 資本の収益率（実質利子率）は、ほぼ一定である。
4. 資本・産出比率 K/Y は、ほぼ一定である。
5. 産出に占める資本と労働の取り分（分配率）は、ほぼ一定である。
6. 一人当たり産出の成長率は、国によって大きく異なる。

1〜5は「一国の時系列」、6は「国の間の比較」についての事実です。1〜5をまとめると、「Y、K、C が同じ率で伸び、比率や価格は一定」という姿になります。このような経路を**均斉成長経路**（balanced growth path, BGP）と呼びます。第7章で、ソローモデルが技術進歩を加えれば1〜5を再現できることを示します。

補足：その後に加わった事実

その後の研究では、カルドアの事実に加えて次のような点が強調されるようになりました。(i) 人類の歴史の大部分では一人当たり所得はほとんど伸びておらず、持続的な成長はここ200年ほどの現象であること、(ii) 国の間の所得格差は数十倍に達し、長期的には貧しい国が自動的に追いつくわけではないこと、(iii) アイデア・制度・人的資本・人口の役割が大きいこと。(i)(ii) は第10章、(iii) は第3巻のテーマです。

次の章へ　説明すべき事実がそろいました。次章では、時間とともに変化する経済を描くための数学の道具（差分方程式と微分方程式）を準備します。

第2章

経済の動きを調べる道具：差分方程式と微分方程式

ここまでの流れ　序章で、動学マクロモデルは「今期の資本が分かれば、貯蓄と減耗のルールから来期の資本が決まる」という骨格を持つと述べました。
この章の問い　遷移式が与えられたとき、経済がどこへ向かい、どれくらいの速さで近づくかを、どうやって調べるのか。
この章で分かること　1階の**差分方程式**と**微分方程式**の解き方、**定常状態**と**安定性**、非線形の式を扱う**1次近似**と**対数線形化**、離散時間と連続時間の対応です。本シリーズのすべての章で使う道具です。

2.1　状態と遷移式

具体例から始めましょう。ある国の資本ストック（機械や建物の量）を K_t とします。毎年、資本のうち一定の割合 δ が古くなって使えなくなり（**減耗**）、新たに一定額 I の投資が行われるとすると、来年の資本は

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I \tag{2.1}$$

で決まります。今年の資本が分かれば来年の資本が分かり、来年の資本が分かれば再来年の資本が分かります。この「今期の値から来期の値が決まる」という形を、一般的に書いておきましょう。ある変数 x_t について、来期の値が今期の値だけで決まるとします。

$$x_{t+1} = g(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

これを**1階の差分方程式**と呼びます（「1階」は1期前までしか登場しないという意味）。x_t が**状態変数**、関数 g が**遷移式**です。初期値 x_0 を与えれば、$x_1 = g(x_0)$、$x_2 = g(x_1), \dots$ と経路 $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ がすべて決まります。

経済が行き着く先の候補は、「一度そこに来たら動かない点」です。資本の例でいえば、毎年の投資が、減耗で失われる資本をちょうど埋め合わせる水準です。

要点：定常状態

$x^* = g(x^*)$ を満たす点 x^* を、差分方程式(2.2)の**定常状態**（steady state）と呼びます。経済がいったん x^* に来ると、それ以降はずっと x^* にとどまります。

問題は2つあります。(1) 定常状態はあるのか、いくつあるのか。(2) 定常状態から離れた

ところから出発したとき、経済は定常状態に近づいていくのか（**安定性**）。

2.2 線形の差分方程式

最も簡単なのは g が1次式の場合です。

$$x_{t+1} = a\,x_t + b, \qquad a \neq 1 \tag{2.3}$$

ステップ1（定常状態）：$x^* = ax^* + b$ を解いて $x^* = b/(1-a)$。

ステップ2（偏差の式）：式(2.3)から $x^* = ax^* + b$ を引くと、定数 b が消えて

$$x_{t+1} - x^* = a\,(x_t - x^*).$$

定常状態からの**偏差**（ずれ）は、毎期 a 倍されます。

ステップ3（一般項）：これを繰り返すと

$$x_t - x^* = a^t\,(x_0 - x^*). \tag{2.4}$$

数式の読み方：係数 a がすべてを決める

- $|a| < 1$ なら $a^t \to 0$ なので、どこから出発しても $x_t \to x^*$。定常状態は**安定**です。
- $|a| > 1$ なら偏差は拡大し、x^* ちょうどから出発しない限り遠ざかります（**不安定**）。
- $0 < a < 1$ なら偏差は符号を変えずに縮む（**単調**に近づく）。$-1 < a < 0$ なら符号が毎期入れ替わる（**振動**しながら近づく）。
- $1 - a$ は「毎期、残りの距離の何割を縮めるか」を表します。$a = 0.9$ なら毎期10%ずつ近づきます。この $1-a$ が、第5章で登場する**収束速度**です。

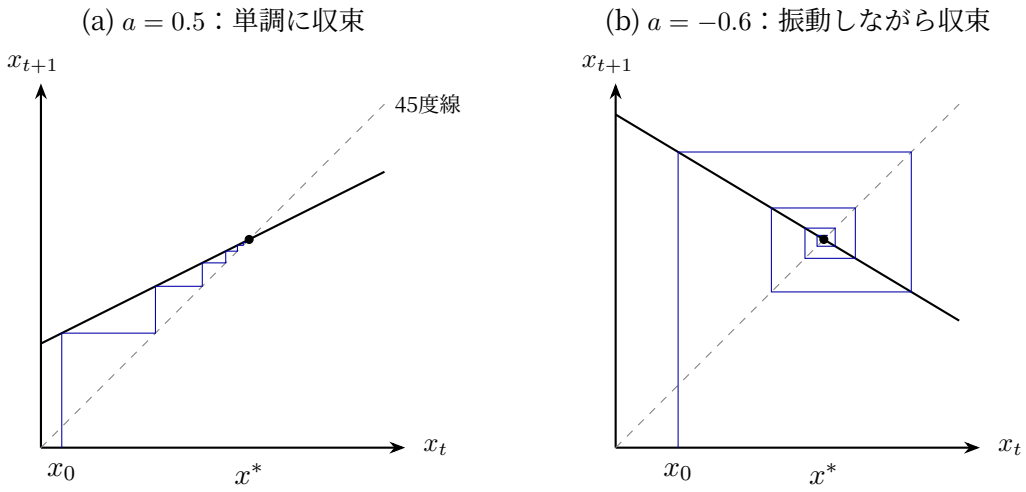
要点：資本の例で読む

式(2.1)は $a = 1 - \delta$、$b = I$ の場合です。したがって定常状態は

$$K^* = \frac{I}{\delta},$$

すなわち「毎年の投資 I が、減耗 δK^* とちょうど等しくなる資本の量」です。$0 < \delta < 1$ なので $0 < a < 1$ となり、資本は定常状態に単調に近づきます。毎年埋まる割合 $1 - a$ は減耗率 δ そのものです。資本が定常状態より少ない間は、投資が減耗を上回るので資本は増え、多い間は減耗が投資を上回るので資本は減ります。第3章のソローモデルは、この投資 I を「所得の一定割合」に置き換えたものです。

図 2.1　45度線図：線形差分方程式の2つの動き方



黒＝遷移式、灰色の破線＝45度線、青＝経路。

図の読み方

- **読み方**：横軸の x_0 から縦に上がって遷移式にぶつかった高さが x_1。それを45度線で横軸に「折り返す」と、次の出発点 x_1 が横軸上に得られます。これを繰り返すと階段（またはクモの巣）状の経路になります。
- 遷移式と45度線の交点が定常状態です（$x_{t+1} = x_t$ になる点）。
- 遷移式の傾き a が45度線より緩やか（$|a| < 1$）なら、経路は定常状態に近づいていきます。

2.3　非線形の式と1次近似

経済モデルの遷移式は、ほとんどの場合非線形です。非線形の差分方程式は一般項を書けないことが多いので、次の3つの方法で「解いた」とみなします。

1. 定常状態を代数で求める。
2. 定常状態の近くで**1次近似**（線形近似）し、線形の場合の結果を使う。
3. コンピュータで経路を数値的に計算する。

2の1次近似は、テイラー展開の1次の項までをとることです。g を x^* のまわりで展開すると

$$g(x_t) \approx g(x^*) + g'(x^*)(x_t - x^*) = x^* + g'(x^*)(x_t - x^*).$$

したがって

$$x_{t+1} - x^* \approx g'(x^*)\,(x_t - x^*). \tag{2.5}$$

これは式(2.3)の偏差の式で $a = g'(x^*)$ とおいたものです。

要点：定常状態の近くでの安定性の判定

$|g'(x^*)| < 1$ なら、定常状態 x^* は（その近くから出発する限り）**安定**です。これを**局所安定**と呼びます。定常状態での遷移式の傾きが、収束するかどうかと、その速さを決めます。

対数線形化：パーセントで測る1次近似

マクロ経済学では、偏差を水準ではなく**パーセント**で測ることが多くあります。定常状態からの**対数偏差**を

$$\hat{x}_t \equiv \ln x_t - \ln x^* \approx \frac{x_t - x^*}{x^*}$$

と定義します。$\hat{x}_t = 0.02$ なら「定常状態より約2%高い」という意味です。式(2.5)の両辺を x^* で割ると

$$\hat{x}_{t+1} \approx g'(x^*)\,\hat{x}_t \tag{2.6}$$

となります。このように、変数を対数偏差で表した1次近似を**対数線形化**と呼びます。

補足：なぜ対数線形化がDSGEの標準になったのか

(i) 係数が「弾力性」（何%動くか）になり、単位に依存しない。(ii) 成長する変数でも、定常状態からの比率で測れば定常になる。(iii) コブ＝ダグラス型やCRRA型の関数（べき乗の形）は、対数をとると線形になるので近似の精度が高い。第2巻のRBCモデル、続巻のNKモデルの「3本の方程式」は、すべて対数線形化された式です。

2.4 連続時間：微分方程式

時間が連続的に流れるとみなすと、変化の速さは時間微分 $\dot{x}(t) \equiv \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で表されます。1階の微分方程式は

$$\dot{x}(t) = h\big(x(t)\big) \tag{2.7}$$

です。定常状態は「変化が止まる点」、すなわち $h(x^*) = 0$ を満たす点です。

線形の場合 $\dot{x} = a\,x + b$ では、定常状態は $x^* = -b/a$ で、解は

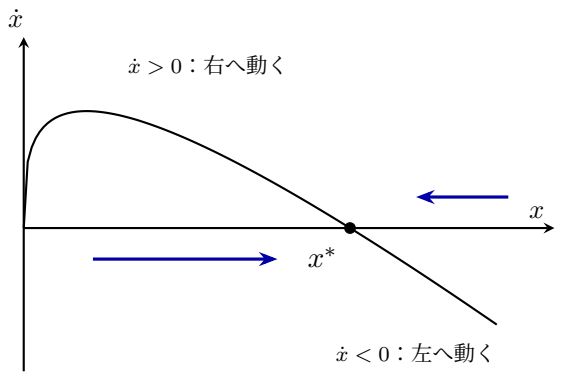
$$x(t) - x^* = e^{at}\,(x(0) - x^*) \tag{2.8}$$

です（右辺を微分すると $a(x - x^*) = ax + b$ になることで確かめられます）。

要点：連続時間の安定性

線形なら $a < 0$ のとき安定。非線形なら定常状態での傾き $h'(x^*) < 0$ のとき（定常状態の近くで）安定で、$-h'(x^*)$ が収束速度（偏差が毎年縮む率）になります。離散時間の条件「$|g'(x^*)| < 1$」に対応するのは「$h'(x^*) < 0$」です。

図 2.2　位相線：1変数の微分方程式の動きを描く



図の読み方

- 縦軸は変化の速さ $\dot{x}$。曲線が横軸より上なら x は増え（右へ動く）、下なら減ります（左へ動く）。
- 曲線が横軸と交わる点が定常状態。そこで曲線が**右下がり**なら、両側から矢印が向かってくるので安定です。
- 1変数の連続時間モデルでは、この**位相線**を描くだけで定性的な動きがすべて分かります。第4章でソローモデルに使います。

連続時間での成長率

連続時間では、成長率は $\dot{x}/x$ で定義されます。対数の微分を使うと

$$\frac{\mathrm{d}\ln x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$$

なので、成長率の計算は対数の微分に帰着します。たとえば $k = K/L$ なら $\ln k = \ln K - \ln L$ を微分して

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}.$$

離散時間の「$\approx$」が、連続時間では「$=$」になる点が便利です。一定率 g の成長は $x(t) = x(0)e^{gt}$ と書けます。

2.5 離散時間と連続時間の対応

離散時間の1期の長さを Δ とし、$\Delta \to 0$ とすると連続時間になります。たとえば

$$\frac{x_{t+\Delta} - x_t}{\Delta} = h(x_t) \quad \xrightarrow{\Delta \to 0} \quad \dot{x} = h(x).$$

この対応を表にまとめておきます。本シリーズを通じて何度も参照します。

表 2.1　離散時間と連続時間の対応表

	離散時間	連続時間
変化	$x_{t+1} - x_t$	$\dot{x}(t)$
成長率	$(x_{t+1} - x_t)/x_t \approx \ln x_{t+1} - \ln x_t$	$\dot{x}/x = \mathrm{d}\ln x/\mathrm{d}t$
一定率の成長	$x_t = x_0(1+g)^t$	$x(t) = x(0)e^{gt}$
積の成長	$(1+n)(1+g) - 1 \approx n + g$	$n + g$（ちょうど）
割引	$\beta^t = (1+\rho)^{-t}$	$e^{-\rho t}$
定常状態	$x^* = g(x^*)$	$h(x^*) = 0$
安定条件	$\lvert g'(x^*)\rvert < 1$	$h'(x^*) < 0$
収束速度	$1 - g'(x^*)$	$-h'(x^*)$

数式の読み方：なぜ表の2列は「ほぼ同じ」なのか

離散時間の偏差は毎期 $g'(x^*)$ 倍、連続時間の偏差は1年で $e^{h'(x^*)}$ 倍になります。$h'(x^*) = -0.04$ なら $e^{-0.04} = 0.961$。年率で数%程度の速さなら、$1 - g'(x^*)$ と $-h'(x^*)$ はほぼ一致します。違いは「成長や割引を1期ごとにまとめて行うか、連続的に複利で行うか」だけです。

発展：2変数の線形系と固有値（第2巻への予告）

状態が2つの変数 $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t})'$ からなるとき、線形の差分方程式は $\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}^* = M(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}^*)$ と行列 M で書けます。1変数の「a」の役割を果たすのは、行列 M の**固有値**です。固有値の絶対値が両方1より小さければ安定、両方1より大きければ不安定、1つずつなら**鞍点**になります。RCKモデルもRBCモデルもNKモデルも、この「鞍点」の構造を持ち、それがDSGEモデルの解き方（ブランシャール＝カーン条件）の核心になります。第2巻で詳しく扱います。

次の章へ　道具がそろいました。次章では、ソローモデルを組み立て、その遷移式を導きます。

第3章

ソローモデルの設定

> **ここまでの流れ**　第1章で説明すべき事実を、第2章で経済の動きを調べる道具を準備しました。
> **この章の問い**　「貯蓄して資本を蓄えれば豊かになる」という直観を、どうすれば1本の遷移式として表せるのか。
> **この章で分かること**　ソローモデルの仮定（**時点の約束・生産関数・貯蓄・人口**）と、そこから導かれる**基本方程式**を、離散時間と連続時間の両方で示します。

3.1　出発点となる直観

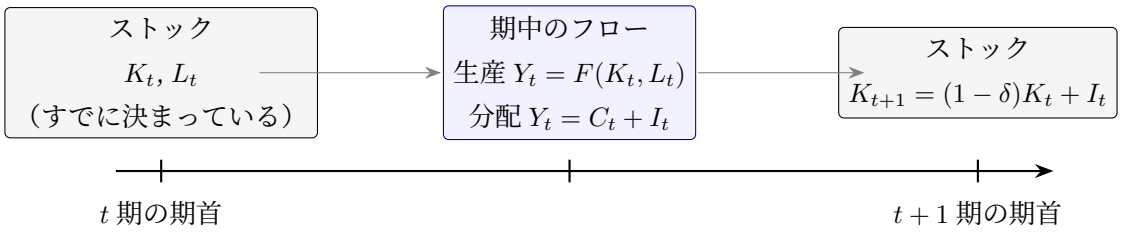
生産物の一部を消費せずに蓄えれば、来年の生産に使える機械や建物（資本）が増えます。資本が増えれば生産が増え、さらに多くを蓄えられます。この循環が続けば、経済はいつまでも成長しそうに見えます。

ソロー（1956）は、この直観を数式で表し、**それが正しいのはどこまでか**を明らかにしました。結論を先に言えば、資本を増やすほど1単位あたりの効果は小さくなる（**収穫逓減**）ため、資本の蓄積だけでは成長はいずれ止まります。長期の成長を支えるのは技術の進歩です。本巻の第3〜7章は、この結論にたどり着く道のりです。

3.2　時点の約束：ストックは期首、フローは期中

離散時間のモデルでは、**何がいつ決まるか**を最初にはっきりさせておくことが大切です。本シリーズでは次の約束を使います。

図 3.1　1期の中の出来事の順序



図の読み方

- K_t はt **期の期首**にある資本です。過去の投資の結果としてすでに決まっており、t 期の中では動かせません。これが**状態変数**の意味です。
- t 期の生産 Y_t は、期首の資本 K_t と労働 L_t を使って行われます。生産物は消費 C_t と投資 I_t に分けられます。
- 投資 I_t は、来期の期首の資本 K_{t+1} になります。今期の投資が今期の生産に使えないことが、このモデルに「時間」を持ち込みます。

この約束を式にしたものが**資本蓄積式**です。

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t, \qquad 0 < \delta < 1 \tag{3.1}$$

δ は**資本減耗率**で、1期のうちに資本の何割が使えなくなるかを表します。国民経済計算の「固定資本減耗」に当たります。

補足：DSGEモデルの時点の書き方との違い

DSGEモデルの文献やソフトウェア（Dynareなど）では、「t 期に決めて t 期の終わりに持っている資本」を K_t と書き、生産関数を $Y_t = F(K_{t-1}, L_t)$ とする流儀もよく使われます。中身は同じで、添え字の付け方が1期ずれているだけです。文献を読むときは、資本の添え字がどちらの約束に従っているかを最初に確認しましょう。

3.3 生産関数

経済全体で1種類の財が生産され、それは消費にも投資にも使えるとします。産出は資本 K_t と労働 L_t で決まります。

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{3.2}$$

生産関数 F には、次の3つの性質を仮定します。

1. **規模に関して収穫一定**（1次同次）：すべての $\lambda > 0$ について $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$。
2. **限界生産物は正で逓減**：$F_K > 0$、$F_{KK} < 0$、$F_L > 0$、$F_{LL} < 0$。
3. **稲田条件**：$\lim_{K \to 0} F_K = \infty$、$\lim_{K \to \infty} F_K = 0$。

数式の読み方：3つの仮定の経済学的な意味

- **収穫一定**：同じ工場をもう1つ建て、同じ人数を雇えば、生産はちょうど2倍になる、という考え方です（**複製の議論**）。この仮定のおかげで、経済の規模（人口の大きさ）は一人当たりの豊かさに影響しなくなります。
- **限界生産物逓減**：機械の台数を固定して人だけを増やす（あるいはその逆）と、追加の1単位が生む産出はだんだん小さくなります。収穫一定と矛盾しないのは、こちらは**片方だけ**を増やす話だからです。
- **稲田条件**：資本がほとんどないとき追加の資本は非常に役に立ち、資本が十分にあると追加の資本はほとんど役に立たない、という両端の仮定です。第4章で、定常状態がちょうど1つ存在することを保証するために使います。

コブ＝ダグラス型

3つの性質をすべて満たす代表例が**コブ＝ダグラス型**生産関数です。

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{3.3}$$

計算例：コブ＝ダグラス型の性質

- 1次同次：$(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha+(1-\alpha)} K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda Y$。
- 限界生産物：$F_K = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha\, Y/K > 0$、$F_{KK} = \alpha(\alpha-1) Y/K^2 < 0$。
- 稲田条件：$F_K = \alpha (L/K)^{1-\alpha}$ は $K \to 0$ で ∞、$K \to \infty$ で 0。
- 産出弾力性：$\dfrac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \alpha$。資本が1%増えると産出は α% 増えます。

第8章で示すように、市場が完全競争なら α は**資本分配率**（所得のうち資本の持ち主に支払われる割合）に等しくなります。多くの国で資本分配率は 0.3〜0.4 程度なので、$\alpha \approx 1/3$ がよく使われます。

発展：CES型生産関数

より一般的な形に**CES型**（代替の弾力性一定）

$$Y = \left[\omega K^{\frac{\eta-1}{\eta}} + (1-\omega)L^{\frac{\eta-1}{\eta}}\right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

があります。η は資本と労働の**代替の弾力性**で、$\eta \to 1$ の極限がコブ＝ダグラス型、$\eta \to 0$ が代替が全くできない形 $\min\{K, L\}$ です。ソロー以前のハロッド＝ドーマー・モデルは後者を使っていたため、資本と労働の伸び方がぴったり一致しない限り失業か遊休設備が生じました。代替を許したことがソローの大きな一歩です。なお、第3巻で使うディキシット＝スティグリッツ型の集計関数も、同じCES型の数学でできています。

3.4 一人当たりへの変換

変数が K と L の2つあると扱いにくいので、収穫一定を使って1変数にまとめます。1次同次性で $\lambda = 1/L_t$ とおくと

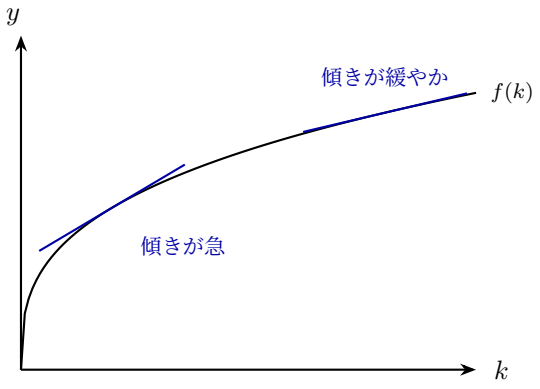
$$\frac{Y_t}{L_t} = F\Big(\frac{K_t}{L_t}, 1\Big).$$

一人当たり産出 $y_t \equiv Y_t/L_t$、一人当たり資本（**資本装備率**）$k_t \equiv K_t/L_t$、$f(k) \equiv F(k, 1)$ と定義すると

$$y_t = f(k_t). \tag{3.4}$$

コブ＝ダグラス型なら $f(k) = k^\alpha$ です。f は $f(0) = 0$、$f'(k) > 0$、$f''(k) < 0$ を満たし、稲田条件は $f'(0) = \infty$、$f'(\infty) = 0$ になります。

図 3.2　一人当たり生産関数 $f(k)$



青の線は接線で、その傾きが限界生産物 $f'(k)$。

3.5 貯蓄と人口

貯蓄率は一定：家計は所得の一定割合 s（$0 < s < 1$）を貯蓄します。閉鎖経済では貯蓄はすべて投資になるので

$$I_t = sY_t, \qquad C_t = (1-s)Y_t. \tag{3.5}$$

人口は一定率で増える：労働者数（＝人口）は率 n で成長します。

$$L_{t+1} = (1+n)L_t. \tag{3.6}$$

数式の読み方：ソローモデルの最大の特徴

貯蓄率 s は、家計が何かを考えて選んだ結果ではなく、**外から与えられたパラメータ**です。消費と投資の分け方を「ルール」として天下りに与えているので、モデルは非常に単純になります。その代わり、「この貯蓄率は望ましいのか」「金利が変わると貯蓄はどう変わるのか」といった問いには答えられません。この「ルール」を家計の最適化に置き換えるのが第2巻のRCKモデルです。

3.6 基本方程式の導出（離散時間）

部品を1本の式にまとめます。

ステップ1：資本蓄積式(3.1)に $I_t = sY_t$ を代入する。

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sY_t.$$

ステップ2：両辺を**来期の**人口 $L_{t+1} = (1+n)L_t$ で割る。左辺はちょうど k_{t+1} になる。

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)K_t + sY_t}{(1+n)L_t} = \frac{1}{1+n}\Big[(1-\delta)k_t + s\,y_t\Big].$$

ステップ3：$y_t = f(k_t)$ を代入する。

要点：ソローモデルの基本方程式（離散時間）

$$k_{t+1} = g(k_t) \equiv \frac{sf(k_t) + (1-\delta)k_t}{1+n} \tag{3.7}$$

両辺から k_t を引いて整理すると、次の形にも書けます。

$$k_{t+1} - k_t = \frac{sf(k_t) - (n+\delta)k_t}{1+n} \tag{3.8}$$

数式の読み方：式(3.8)の読み方

- $sf(k_t)$（**実際の投資**）：一人当たりの貯蓄＝投資。資本装備率を引き上げる力です。
- $(n+\delta)k_t$（**必要投資**）：資本装備率を**今の水準に保つ**ために必要な投資です。δk_t は壊れた機械の補充分、nk_t は新しく加わった労働者に今と同じだけの機械を持たせるための分です。**損益分岐投資**とも呼ばれます。
- 実際の投資が必要投資を上回れば k は増え、下回れば減ります。ソローモデルの動きは、すべてこの2つの綱引きで決まります。
- 人口成長は一人当たり資本を「薄める」力として働きます。資本の総量が同じでも、人が増えれば一人当たりの機械は減るからです。

3.7 連続時間で書くと

連続時間では、資本蓄積式は $\dot{K} = I - \delta K = sY - \delta K$、人口は $\dot{L}/L = n$ です。$k = K/L$ の成長率は、第2章の公式から

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{sY - \delta K}{K} - n.$$

両辺に k をかけ、$Y/L = f(k)$ を使うと次の式を得ます。

要点：ソローモデルの基本方程式（連続時間）

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k \tag{3.9}$$

離散時間の式(3.8)と比べると、分母の $1+n$ がないだけで、右辺の構造はまったく同じです。n が小さければ $1+n \approx 1$ なので、両者の違いはわずかです。分母の $1+n$ は、「今期の投資が来期に増えた人数で割られる」という離散時間特有の**時点のずれ**から生じています。

表 3.1　ソローモデルの変数とパラメータ

分類	記号	意味
状態変数	k_t	一人当たり資本（期首に決まっている）
その他の内生変数	$y_t,\ c_t,\ i_t$	一人当たり産出・消費・投資（k_t から決まる）
パラメータ	$s,\ n,\ \delta,\ \alpha$	貯蓄率・人口成長率・減耗率・資本の弾力性
初期条件	k_0	最初の期の一人当たり資本

要点

- 時点の約束：資本 K_t は期首に決まっている状態変数。今期の投資は来期の資本になる。
- 生産関数は収穫一定・限界生産物逓減・稲田条件を満たし、一人当たりでは $y = f(k)$。
- 貯蓄率 s は外生、人口は率 n で成長、資本は率 δ で減耗する。
- 基本方程式：離散 $k_{t+1} - k_t = [sf(k_t) - (n+\delta)k_t]/(1+n)$、連続 $\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$。

次の章へ　遷移式が得られました。次章では、第2章の道具を使って、経済がどこへ向かうのか（定常状態）と、本当にそこへ向かうのか（安定性）を調べます。

第4章

定常状態と安定性

ここまでの流れ　第3章で、ソローモデルを1本の遷移式 $k_{t+1} = g(k_t)$ にまとめました。
この章の問い　一人当たり資本はどこへ向かうのか。どこから出発しても、そこへ向かうのか。
この章で分かること　**定常状態**の求め方と、その**存在・一意性・安定性**。そして「定常状態では一人当たりの成長が止まる」という、ソローモデルの最も重要な結論です。

4.1　定常状態の条件

定常状態とは、一人当たり資本が変化しなくなる状態、すなわち $k_{t+1} = k_t = k^*$ です。離散時間の式(3.8)でも連続時間の式(3.9)でも、条件は同じになります。

要点：定常状態の条件

$$sf(k^*) = (n+\delta)k^* \tag{4.1}$$

実際の投資（左辺）が、資本装備率を保つのに必要な投資（右辺）にちょうど等しい。

コブ＝ダグラス型 $f(k) = k^\alpha$ なら、$s(k^*)^\alpha = (n+\delta)k^*$ を解いて

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \qquad c^* = (1-s)\,y^*. \tag{4.2}$$

数式の読み方：定常状態の式から読み取れること

- 貯蓄率 s が高いほど、人口成長率 n や減耗率 δ が低いほど、定常状態の一人当たり資本と所得は高い。
- 資本・産出比率は $K/Y = k^*/y^* = s/(n+\delta)$ と、パラメータだけで決まる一定値になります。カルドアの事実4（K/Y はほぼ一定）と整合的です。
- 指数 $\alpha/(1-\alpha)$ は、貯蓄率が所得に与える影響の大きさ（**弾力性**）です。$\alpha = 1/3$ なら $1/2$ で、貯蓄率を2倍にしても定常状態の所得は $\sqrt{2} \approx 1.41$ 倍にしかなりません。資本の収穫逓減が強いほど（α が小さいほど）、貯蓄の効果は小さくなります。

計算例：本巻の基準となる数値例

年次データを想定して、$\alpha = 1/3$、$s = 0.24$、$n = 0.01$、$\delta = 0.05$ とします。$s/(n+\delta) = 0.24/0.06 = 4$ なので

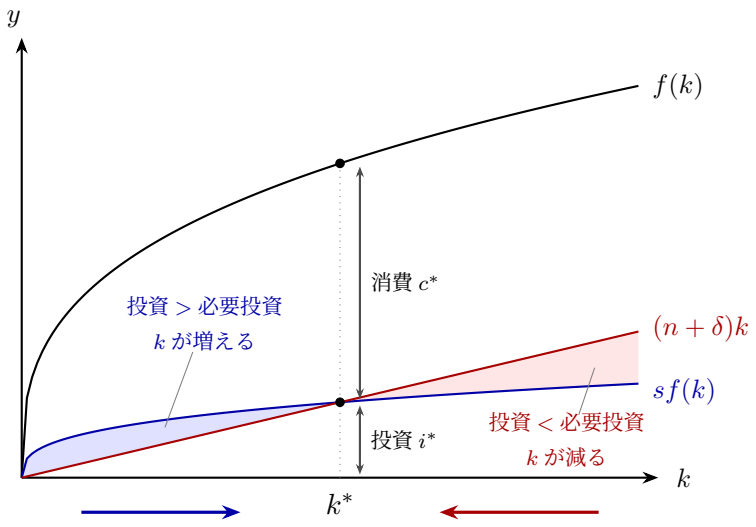
$$k^* = 4^{1.5} = 8, \qquad y^* = 8^{1/3} = 2, \qquad c^* = 0.76 \times 2 = 1.52, \qquad K/Y = 4.$$

この数値例を、第4〜6章で繰り返し使います（技術進歩を加えた版は第7・9章）。

4.2 ソロー図

定常状態は、実際の投資の曲線 $sf(k)$ と必要投資の直線 $(n+\delta)k$ の交点として図示できます。

図 4.1 ソロー図



横軸の下の矢印は k が動く向きです。

図の読み方

- **交点の左側**（$k < k^*$）：$sf(k)$ が $(n+\delta)k$ より上にあり、実際の投資が必要投資を上回るので、k は増えます。
- **交点の右側**（$k > k^*$）：逆に必要投資のほうが大きいので、k は減ります。
- したがって、どこから出発しても k は k^* に向かいます。
- 定常状態での縦の長さ：$f(k^*)$ が産出、$sf(k^*)$ が投資、その差 $(1-s)f(k^*)$ が消費です。

4.3 存在と一意性

図では交点がちょうど1つでしたが、これは仮定から証明できます。原点 $k=0$ も式(4.1)を満たしますが（資本がなければ生産も投資もない）、これは経済的に意味のない自明な定常状態なので除きます。

証明のアイデア：式(4.1)を k で割ると、$k^* > 0$ は

$$\frac{sf(k)}{k} = n + \delta$$

の解です。左辺 $sf(k)/k$（資本1単位あたりの投資＝平均生産物の s 倍）について：

- f が凹関数なので、平均生産物 $f(k)/k$ は k の**減少関数**。
- 稲田条件より、$k \to 0$ で $f(k)/k \to \infty$、$k \to \infty$ で $f(k)/k \to 0$（ロピタルの定理で $f'(k)$ の極限に一致）。

連続な減少関数が ∞ から 0 まで動くので、正の定数 $n+\delta$ とはちょうど1回だけ交わります。

数式の読み方：稲田条件の役割

$f'(0) = \infty$ がなければ、資本が少ないときでも投資が必要投資に届かず、経済がゼロに向かう可能性があります。$f'(\infty) = 0$ がなければ、投資がいつまでも必要投資を上回り、k が無限に増え続ける可能性があります。後者が、第3巻で扱う**AKモデル**（内生的成長）の出発点です。

4.4 安定性：離散時間

第2章の方法で安定性を調べます。遷移式 $g(k) = [sf(k) + (1-\delta)k]/(1+n)$ の傾きは

$$g'(k) = \frac{sf'(k) + 1 - \delta}{1+n} > 0.$$

傾きが正なので、経路は**振動せず単調に**動きます。定常状態での傾きは、$sf(k^*) = (n+\delta)k^*$ を使うと

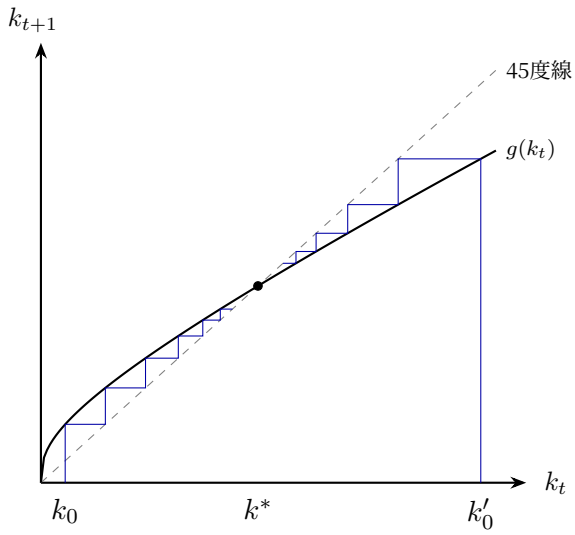
$$g'(k^*) = \frac{1-\delta+(n+\delta)\,\varepsilon_k}{1+n}, \qquad \varepsilon_k \equiv \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} \tag{4.3}$$

と書けます。ε_k は資本の産出弾力性で、$0 < \varepsilon_k < 1$（コブ＝ダグラス型なら α）です。したがって

$$0 < g'(k^*) < \frac{1-\delta+n+\delta}{1+n} = 1$$

となり、定常状態は局所安定です。

図 4.2　45度線図による安定性の確認



1期ごとの動きが見えるよう、パラメータを誇張して描いています。

図の読み方

- 遷移式 g は、原点の近くでは45度線より上（傾きが無限大）、k が大きいところでは45度線より下にあり、ちょうど1回交わります。
- 小さな k_0 から出発すると階段を上るように、大きな k_0' から出発すると階段を下りるように、どちらも k^* に近づきます。
- g が右上がりなので、階段は行き過ぎずに単調に近づきます（第2章の図2.1(a)の型）。
- 実は g が増加関数で、$k < k^*$ なら $k < g(k) < k^*$ が成り立つので、近くからに限らず**どこから出発しても**収束します（**大域的安定**）。

4.5 安定性：連続時間

連続時間では、$\dot{k} = h(k) \equiv sf(k) - (n+\delta)k$ の位相線を見ます。$h(k)$ はソロー図の「曲線 $sf(k)$ と直線 $(n+\delta)k$ の縦の差」そのものです。

$$h'(k^*) = sf'(k^*) - (n+\delta) = -(1-\varepsilon_k)(n+\delta) < 0$$

なので、第2章の判定法から定常状態は安定です。

発展：「力学系」という見方

この章では、「今期の資本が分かれば、資本蓄積の式によって来期の資本が決まる」という仕組みについて、定常状態があるか、そこに近づくかを調べてきました。このように、変数が一定のルールに従って時間とともに動いていく仕組みを、数学では**力学系**（dynamical system）と呼びます。力学系の言葉では、定常状態は**不動点**と呼ばれ、45度線図や位相線は経路の動きを描く道具にあたります。

大学院の教科書や論文では、「ソローモデルは1変数の力学系である」「RCKモデルを2変数の力学系として分析する」といった言い方がよく出てきます。名前だけ覚えておけば十分で、中身はこの章で見てきた「定常状態と安定性」の話そのものです。

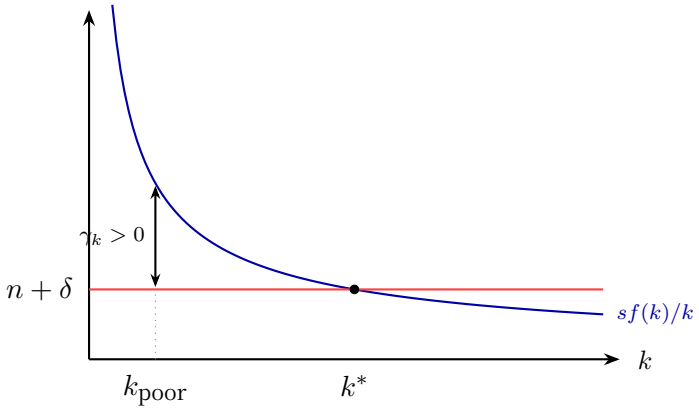
第2巻では、資本と消費の2変数が互いに影響し合いながら動くモデルを、同じ考え方で分析します。

4.6 成長率で見る：成長はなぜ止まるのか

一人当たり資本の成長率を見ると、収束の様子がさらによく分かります。連続時間の式(3.9)を k で割ると

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta). \tag{4.4}$$

図 4.3　成長率の図



図の読み方

- 青の曲線 $sf(k)/k$ は「資本1単位あたりの投資」で、平均生産物が逓減するため右下がりです。赤の水平線は $n+\delta$ です。
- 2本の**縦の距離**がそのまま成長率 γ_k です。資本が少ない経済ほど距離が大きく、速く成長します。
- 資本が蓄積されるにつれて距離は縮み、k^* で成長率はゼロになります。**成長が止まる原因は、資本の収穫逓減**です。

要点：ソローモデルの基本的な結論

- 生産関数が収穫逓減と稲田条件を満たせば、正の定常状態 k^* がただ1つ存在し、どこから出発しても経済はそこへ向かう。
- 定常状態では一人当たりの k, y, c は一定。総量 K, Y, C は人口と同じ率 n で成長する。
- したがって、**技術進歩がなければ、資本の蓄積だけで一人当たり所得が持続的に成長することはない**。貯蓄率の上昇は所得の**水準**を上げるが、長期の**成長率**は変えない。

次の章へ　「最後は定常状態に行き着く」ことは分かりました。しかし、それに何年かかるのでしょうか。次章では第2章の1次近似を使って、収束の速さを測ります。

第5章

移行動学と収束の速さ

> **ここまでの流れ**　第4章で、経済が定常状態 k^* に向かうことを示しました。
> **この章の問い**　定常状態に近づくまでに何年かかるのか。その途中で、成長率はどう変化するのか。
> **この章で分かること**　定常状態へ向かう途中の動き（**移行動学**）を、**1次近似**で求めた**収束速度**と**半減期**、そして**数値計算**の両面から調べます。ここで使う「定常状態のまわりで線形化して動きを調べる」手順は、DSGEモデルの分析とまったく同じです。

5.1　移行動学とは

定常状態は「行き着く先」にすぎません。現実の経済は、戦争や制度変更、貯蓄率の変化などで、しばしば定常状態から離れた所にいます。そこから定常状態へ向かう途中の動きを**移行動学**（transition dynamics）と呼びます。たとえば第二次世界大戦後の日本やドイツの高成長は、資本が大きく失われた状態から定常状態へ戻る移行過程として理解できます。

ソローモデルの遷移式は非線形なので、一般には経路を式で書けません。そこで第2章の方法に従い、(1) 定常状態のまわりの1次近似と、(2) 数値計算の2つを使います。

5.2　1次近似による収束速度（離散時間）

第2章の式(2.6)より、対数偏差 $\hat{k}_t \equiv \ln k_t - \ln k^*$ は近似的に

$$\hat{k}_{t+1} \approx g'(k^*)\,\hat{k}_t$$

に従います。コブ＝ダグラス型では、第4章の式(4.3)で $\varepsilon_k = \alpha$ とおいて

$$g'(k^*) = \frac{1 - \delta + \alpha(n+\delta)}{1+n}.$$

「1期で定常状態までの距離の何割を縮めるか」を**収束速度** $\lambda \equiv 1 - g'(k^*)$ と定義すると、簡単な計算で

要点：収束速度（コブ＝ダグラス型）

$$\text{離散時間：}\ \lambda = \frac{(1-\alpha)(n+\delta)}{1+n}, \qquad \text{連続時間：}\ \lambda = (1-\alpha)(n+\delta) \tag{5.1}$$

$$\hat{k}_t \approx (1-\lambda)^t \hat{k}_0 \quad \text{(離散)}, \qquad \hat{k}(t) \approx e^{-\lambda t}\hat{k}(0) \quad \text{(連続)} \tag{5.2}$$

連続時間の値は、第4章で求めた $-h'(k^*) = (1-\alpha)(n+\delta)$ そのものです（第2章の対応表）。また、$y = k^\alpha$ なので $\hat{y}_t = \alpha\hat{k}_t$ となり、**一人当たり所得も同じ速さ λ で収束**します。

数式の読み方：収束速度の式の読み方

- $n+\delta$ **が大きいほど速い**：必要投資の直線が急になるので、定常状態からずれたときに押し戻す力が強くなります。
- α **が大きいほど遅い**：α が大きいと資本の収穫逓減が弱く、資本が増えても投資の効率がなかなか落ちません。そのため、定常状態に「引き戻す力」が弱くなります。極端な $\alpha = 1$ では $\lambda = 0$ で、定常状態に収束しなくなります（第3巻のAKモデル）。
- **貯蓄率 s は入っていない**：s は定常状態の位置を決めますが、そこへの近づき方の速さ（対数で測った場合）には影響しません。

5.3 半減期

収束速度を直観的に表すのが**半減期**、すなわち定常状態までの（対数での）距離が半分になるまでの年数です。$(1-\lambda)^T = 1/2$ より

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{-\ln(1-\lambda)} \approx \frac{0.69}{\lambda}. \tag{5.3}$$

計算例：基準の数値例での収束速度

$\alpha = 1/3$、$n = 0.01$、$\delta = 0.05$ では

$$\lambda_{\text{離散}} = \frac{(2/3)\times 0.06}{1.01} = 0.0396, \qquad \lambda_{\text{連続}} = 0.04.$$

毎年、定常状態までの距離の約4%を縮めます。半減期は $0.69/0.04 \approx 17$ 年。距離の9割を縮めるには $\ln 10/0.04 \approx 58$ 年かかります。ソローモデルの移行過程は、**数十年単位のゆっくりした過程**です。

5.4 数値計算で経路を描く

1次近似は定常状態の近くでしか正確ではありません。遷移式 $k_{t+1} = g(k_t)$ を初期値から順に計算すれば、近似なしの「正確な」経路が得られます。手順はとても単純です。

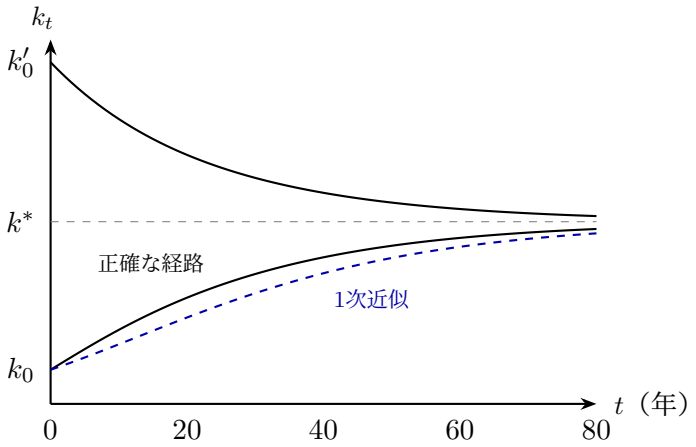
コードで確かめる：経路の計算（Python）

```
alpha, s, n, delta = 1/3, 0.24, 0.01, 0.05   # パラメータ
k = 1.5                                       # 初期値 k_0
path = [k]
for t in range(80):                           # 80年分くり返す
    k = (s * k**alpha + (1 - delta) * k) / (1 + n)   # 遷移式
    path.append(k)
print(path[:5])
```

数式の読み方：コードの読み方

- 1行目でパラメータ、2行目で初期値を決めます。
- for の行で、遷移式を80回くり返し適用します。k = … の右辺は今期の k_t、左辺に入るのが来期の k_{t+1} です。
- 「状態を1つ受け取り、遷移式で次の状態を返す」という作業をくり返すだけで、どんな非線形の1変数モデルでも経路が計算できます。DSGEモデルのシミュレーションも、線形化した遷移式に対して同じことをしています。

図 5.1　一人当たり資本の移行経路

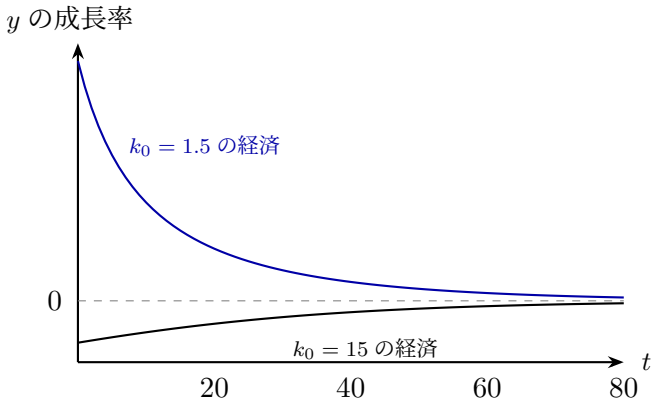


黒の実線＝遷移式で計算した正確な経路、青の破線＝1次近似。

図の読み方

- 下から出発した経済も上から出発した経済も、定常状態 $k^* = 8$ にゆっくり近づきます。半減期の約17年で、対数で測った距離が半分になります。
- 青の破線（1次近似）は、出発直後は正確な経路より遅く上昇します。$k_0 = 1.5$ は定常状態の2割以下と**遠すぎる**ため、近似の精度が落ちるのです。定常状態に近づくほど、2本の線は重なっていきます。
- この図は、「1次近似は定常状態の近くでのみ信頼できる」という一般的な注意を示しています。DSGEモデルで1次近似を使うのは、景気循環のような**定常状態からの小さな変動**を分析するためです。

図 5.2　一人当たり所得の成長率の推移



図の読み方

- 資本の少ない経済（青）は最初に約4%で成長し、成長率は時間とともに0に向かって低下します。
- 資本の多い経済（黒）は、一人当たり所得が**減少**しながら定常状態に近づきます。
- 「定常状態から遠いほど速く成長する」というこの性質が、第10章の**収束仮説**の理論的な根拠です。

発展：連続時間の厳密解

コブ＝ダグラス型の連続時間モデルは、実は厳密に解けます。$x \equiv k^{1-\alpha}$ とおくと $\dot{x} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$ なので、式(3.9)は

$$\dot{x} = (1-\alpha)\big[s - (n+\delta)x\big]$$

という**線形**の微分方程式になります。第2章の式(2.8)から

$$k(t)^{1-\alpha} = \frac{s}{n+\delta} + e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\Big[k(0)^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta}\Big].$$

指数部分に、収束速度 $\lambda = (1-\alpha)(n+\delta)$ がそのまま現れます。ただしここで一定率で縮むのは $k^{1-\alpha}$ の偏差であって $\ln k$ の偏差ではないので、定常状態から遠いところでは1次近似と少しずれます（図5.1）。

要点

- 定常状態のまわりで1次近似すると、偏差は毎年一定の割合 λ で縮む。コブ＝ダグラス型では $\lambda \approx (1-\alpha)(n+\delta)$。
- 標準的な値（$\alpha = 1/3$、$n+\delta = 0.06$）では $\lambda \approx 4\%$、半減期は約17年。技術進歩を加えると約5%になる（第7章）。
- 移行過程では、定常状態から遠い経済ほど速く成長する。
- 1次近似は定常状態の近くで正確。遠い場合は数値計算で確かめる。

次の章へ　次章では、パラメータが変わったときに定常状態と経路がどう変わるか（比較静学）、そして「最も望ましい貯蓄率」はあるのか（黄金律）を考えます。

第6章

比較静学・黄金律・動学的効率性

> **ここまでの流れ**　第4・5章で、定常状態の位置と、そこへの近づき方を調べました。
> **この章の問い**　貯蓄率が上がると、所得と消費は短期と長期でどう変わるのか。消費を最大にする貯蓄率はあるのか。
> **この章で分かること**　**比較静学**（定常状態の比較）と**比較動学**（経路全体の比較）の違い、**水準効果**と**成長効果**の区別、**黄金律**と**動学的非効率性**です。

6.1　比較静学と比較動学

パラメータが変化したときの影響を調べる方法は2つあります。

- **比較静学**：変化の前と後の**定常状態どうし**を比べる。式(4.2)を微分するだけで分かる。
- **比較動学**：変化が起きた時点から新しい定常状態に至るまでの**経路全体**を描く。

DSGEモデルの**インパルス応答**（ショックが起きた後の各変数の経路）は、比較動学の一種です。

6.2　貯蓄率の上昇

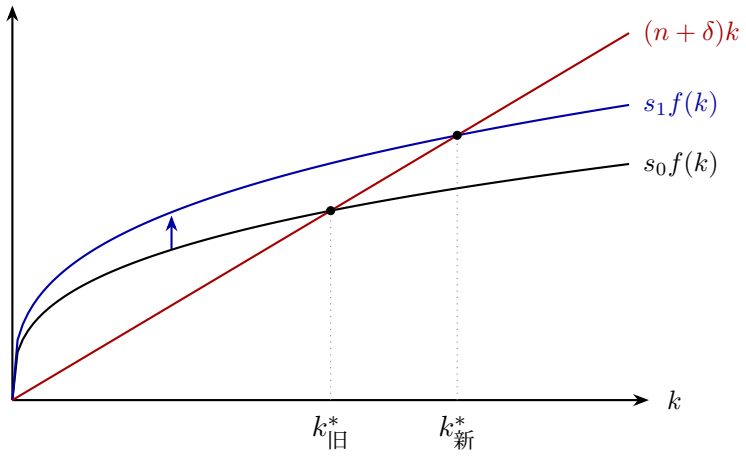
基準の数値例で、$t=0$ に貯蓄率が 0.24 から 0.30 に恒久的に上がったとします。

比較静学：式(4.2)から $\ln y^{*} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\ln s - \ln(n+\delta)\right]$ なので

$$\frac{\partial \ln y^{*}}{\partial \ln s} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0.5.$$

$s/(n+\delta)$ は 4 から 5 になり、新しい定常状態は $k^{*} = 5^{1.5} = 11.18$、$y^{*} = \sqrt{5} = 2.236$（11.8% 増）、$c^{*} = 0.7 \times 2.236 = 1.565$（$3.0\%$増）です。

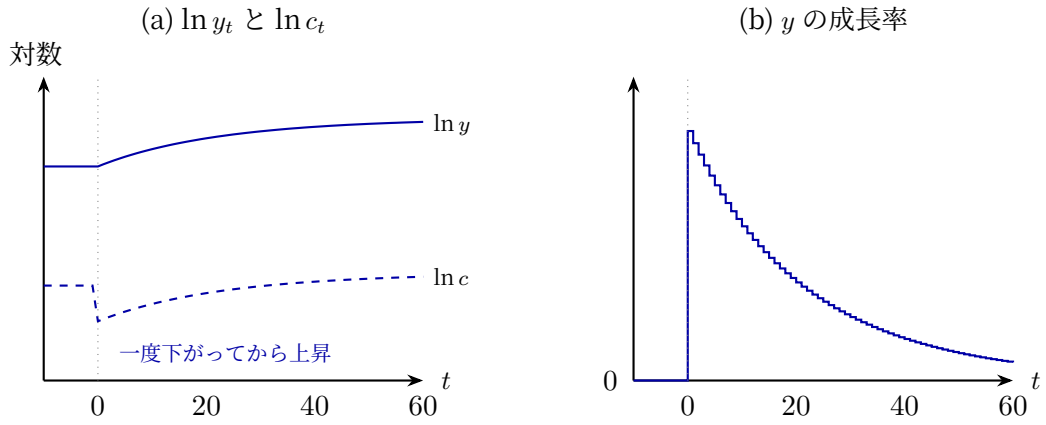
図 6.1　貯蓄率の上昇：ソロー図の変化



黒＝変化前、青＝変化後。

比較動学：$t = 0$ の時点では、資本 $k_0 = 8$ はすでに決まっているので動きません（状態変数）。したがって産出 $y_0 = f(8) = 2$ も動きませんが、消費は $(1-s)y$ なので 1.52 から 1.40 に**下落**します。その後、投資が必要投資を上回るので資本が積み上がり、所得と消費は新しい定常状態に向かって上昇します。

図 6.2　貯蓄率の上昇：比較動学



$t = 0$ に貯蓄率が恒久的に上がる（点線）。

図の読み方

- (a)：所得 $\ln y$（実線）は $t=0$ では動かず、その後ゆっくり上昇します。消費 $\ln c$（破線）は $t=0$ に**下にジャンプ**し、その後上昇して、十数年後に元の水準を上回ります。
- (b)：成長率は $t=0$ に一時的に正になり、その後0に戻ります。貯蓄率の上昇は**一時的な成長**と**恒久的な水準の上昇**をもたらしますが、**長期の成長率**は変えません。
- ソローモデルでは、ジャンプできるのは消費のような「フロー」の変数だけで、資本のような「ストック」は連続的にしか動けません。この区別は、第2巻で「状態変数とジャンプ変数」として中心的な役割を果たします。

要点：水準効果と成長効果

- **水準効果**：所得の**水準**（対数目盛での経路の高さ）を恒久的に変える効果。
- **成長効果**：所得の長期の**成長率**（対数目盛での経路の傾き）を恒久的に変える効果。
- ソローモデルでは、貯蓄率などの政策や行動の変化は**水準効果しか持たない**。長期の成長率は外生の技術進歩率だけで決まる（第7章）。内生的成長モデル（第3巻）は、この点を問い直すモデルです。

6.3 人口成長率と減耗率の上昇

n や δ が上がると、必要投資の直線 $(n+\delta)k$ が急になり、定常状態の k^*・y^* は下がります。

$$\frac{\partial \ln y^*}{\partial \ln(n+\delta)} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

人口成長率が高い国ほど一人当たり所得が低い、という予測です。これは第10章の実証で確かめます。

6.4 黄金律

定常状態の消費を最大にする資本の水準はあるでしょうか。定常状態では投資が必要投資に等しい（$sf(k^*)=(n+\delta)k^*$）ので、定常状態の消費は

$$c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$$

と、k^* だけの関数として書けます。これを k^* について最大化すると、1階条件は次のようになります。

要点：資本蓄積の黄金律

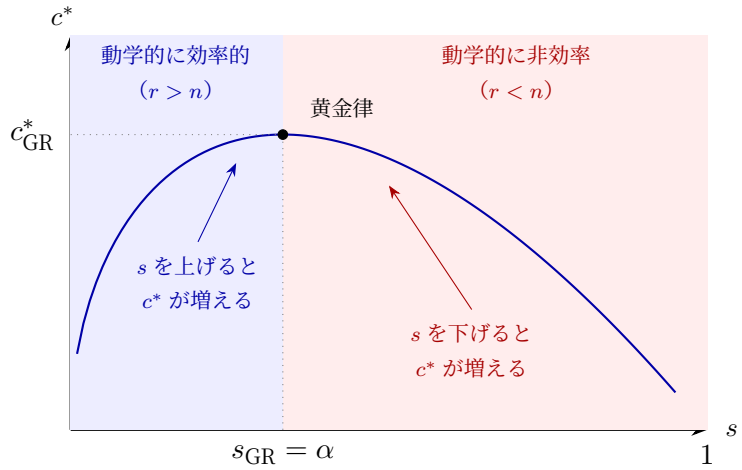
$$f'(k_{\text{GR}}) = n + \delta \tag{6.1}$$

定常状態の消費を最大にする資本 k_{GR} では、資本の限界生産物が必要投資の傾き $n+\delta$ に等しい。コブ＝ダグラス型では、それを実現する貯蓄率は $s_{\text{GR}} = \alpha$。

数式の読み方：黄金律の意味

- 資本を1単位増やして維持すると、産出は $f'(k)$ 増えますが、その資本を維持するための投資も $n+\delta$ 増えます。差し引きで消費が増えるのは $f'(k) > n+\delta$ の間だけです。
- コブ＝ダグラス型で $s_{\text{GR}} = \alpha$ になる理由：$f'(k) = \alpha y/k$ なので、条件(6.1)は $\alpha y = (n+\delta)k = sy$、すなわち $s = \alpha$ です。**資本の所得の分（αy）をちょうど全部投資に回す**のが黄金律です。
- 資本の純収益率を $r \equiv f'(k) - \delta$ と書くと、黄金律は $r = n$、すなわち「**利子率＝経済の成長率**」と言い換えられます。技術進歩があれば $r = n + g$ になります（第7章）。

図 6.3　貯蓄率と定常状態の消費



図の読み方

- 貯蓄率が0なら資本も産出もなく、貯蓄率が1なら全部を投資して消費は0です。その間に消費を最大にする貯蓄率 $s_{\mathrm{GR}} = \alpha = 1/3$ があります。
- 基準の数値例の $s = 0.24$ は黄金律の左側にあります。貯蓄率を上げれば、定常状態の消費は増えます（図6.2と同じ結論）。
- ただし左側にいる経済が貯蓄率を上げると、図6.2のように**いまの消費を一時的に犠牲にしなければなりません**。この犠牲を払う価値があるかどうかは、家計がどれだけ将来を重視するかに依存し、ソローモデルでは判断できません。

6.5 動学的非効率性

では、黄金律の**右側**にいる経済（$k^* > k_{\mathrm{GR}}$、$r < n$）はどうでしょうか。この経済が貯蓄率を黄金律の水準まで下げると、

- 下げた瞬間：資本はすぐには変わらないので、消費は投資の減少分だけ**増える**。
- その後：資本が減って新しい定常状態に近づくが、黄金律に近づくので定常状態の消費も**増える**。

つまり、**現在も将来も、すべての時点の消費を増やせる**のです。誰も損をしない改善が可能な状態なので、資本の過剰蓄積は**動学的に非効率**であると言います。

要点：動学的効率性の判定

- $r > n$（資本が黄金律より少ない）：動学的に効率的。消費を増やすには、いまの消費の犠牲が必要。
- $r < n$（資本が黄金律より多い）：動学的に非効率。貯蓄を減らせば全期間の消費が増える。

補足：現実の経済は効率的か

先進国のデータを使った代表的な検証は、「資本が毎年生み出す所得（利潤など）が、毎年の投資額を上回っているか」を調べるものです。上回っていれば、資本は投資に必要な以上の資源を経済に返しており、$r > n + g$ に相当します。多くの先進国でこの条件が成り立つことが知られており、現実の経済は動学的に効率的だと考えられています。一方で、近年の低金利のもとで安全資産の利子率が成長率を下回る状況が続いたことは、財政の持続可能性の議論（第2巻）と関わってきます。

発展：第2巻への予告：修正黄金律

ソローモデルでは貯蓄率が外生なので、経済が黄金律の右側にいることもありえます。第2巻のRCKモデルで家計が最適に貯蓄を選ぶと、定常状態では $f'(k^*) - \delta = \rho$（時間選好率）となり（**修正黄金律**）、$\rho > n$ のもとで経済は必ず黄金律より左側、すなわち動学的に効率的になります。将来を割り引く家計は、黄金律まで資本を積み上げることを望まないのです。

次の章へ　ここまでのソローモデルでは、一人当たりの成長は最終的に止まってしまいます。次章では技術進歩を加え、カルドアの事実（持続的な成長）を再現します。

第7章

技術進歩と均斉成長経路

ここまでの流れ　第4〜6章で、技術進歩がなければ一人当たりの成長はいずれ止まることを示しました。
この章の問い　一人当たり所得が持続的に成長し、しかも資本・産出比率や利子率が一定という現実（カルドアの事実）を、どうすれば説明できるのか。
この章で分かること　**労働増大的技術進歩**、**効率単位**への変換、**均斉成長経路**（BGP）です。効率単位への変換は、DSGEモデルで成長する変数を扱うときの「**トレンド除去**」と同じ操作です。

7.1　技術進歩の3つの入れ方

技術水準 A_t を生産関数に入れる方法は、主に3つあります。

- **ヒックス中立的**：$Y = A\,F(K, L)$。資本と労働の両方の効率を同じだけ上げる。
- **資本増大的**（ソロー中立的）：$Y = F(AK, L)$。資本1単位の働きを上げる。
- **労働増大的**（ハロッド中立的）：$Y = F(K, AL)$。労働者1人の働きを A 人分にする。

AL は「効率単位で測った労働」と呼ばれます。技術が2倍になると、同じ人数でも2倍の人数分の仕事ができるとみなすのです。

要点：なぜ労働増大的なのか（宇沢の定理）

収穫一定の生産関数のもとで、Y、K、C が一定率で成長し、K/Y が一定という均斉成長経路が存在するためには、技術進歩は（少なくともその経路の上では）**労働増大的**の形で表せなければならない。

数式の読み方：定理の直観

均斉成長経路では K と Y が同じ率で成長します。もし技術が資本の働きを高めるなら、「効率単位の資本」は K より速く伸び、K/Y を一定に保てなくなります。成長の中で「足りなくなる」のは、増やすことのできない労働のほうなので、技術はその労働を補う形で入る必要があるのです。なお、コブ＝ダグラス型では $AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = K^{\alpha}(A^{1/(1-\alpha)}L)^{1-\alpha}$ と書き直せるので、3つの入れ方の区別はなくなります。

以下では、労働増大的な技術が外生的に一定率 g で進歩すると仮定します。

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t), \qquad A_{t+1} = (1+g)A_t.$$

7.2 効率単位への変換（トレンド除去）

技術が進歩すると、一人当たりの k や y は成長し続けるので、定常状態を持ちません。そこで、**効率労働1単位あたり**の変数を定義します。

$$\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}, \qquad \tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t} = f(\tilde{k}_t).$$

（収穫一定から $F(K, AL)/(AL) = F(\tilde{k}, 1) \equiv f(\tilde{k})$。）第3章と同じ手順で、資本蓄積式を**来期の効率労働** $A_{t+1}L_{t+1} = (1+g)(1+n)A_t L_t$ で割ると

要点：技術進歩のあるソローモデルの基本方程式

$$\text{離散時間：} \quad \tilde{k}_{t+1} = \frac{sf(\tilde{k}_t) + (1-\delta)\tilde{k}_t}{(1+n)(1+g)} \tag{7.1}$$

$$\text{連続時間：} \quad \dot{\tilde{k}} = sf(\tilde{k}) - (n+g+\delta)\tilde{k} \tag{7.2}$$

数式の読み方：何が変わったか

- 第3章の式で k を $\tilde{k}$ に、n を「$n+g$」（離散では $(1+n)(1+g)-1$）に置き換えただけです。技術進歩は、効率労働の「人数」が増えるのと同じように、効率単位あたりの資本を薄めます。
- したがって、第4〜6章の結果はすべてそのまま使えます。定常状態 $\tilde{k}^*$ が存在して安定であり、収束速度は $\lambda \approx (1-\alpha)(n+g+\delta)$ です。
- 成長し続ける変数をトレンド（ここでは $A_t L_t$ や A_t）で割って定常な変数に直す操作を**トレンド除去**（detrending）と呼びます。成長するRBCモデルやDSGEモデルも、まず同じようにトレンドを除去し、定常になった変数について定常状態を求めてから分析します。

7.3 均斉成長経路

効率単位の経済が定常状態 $\tilde{k}^*$ にあるとき、元の変数はどう動いているでしょうか。$K_t = \tilde{k}^* A_t L_t$、$Y_t = f(\tilde{k}^*) A_t L_t$ なので、各変数は次の率で成長します。

表 7.1　均斉成長経路での各変数の成長率（連続時間、または近似）

変数	成長率	理由
$\tilde{k}$, $\tilde{y}$, $\tilde{c}$（効率単位）	0	定常状態
$k = K/L$, y, c（一人当たり）	g	$y = A\tilde{y}$
K, Y, C（総量）	$n+g$	$Y = AL\tilde{y}$
K/Y	0	$= \tilde{k}^*/f(\tilde{k}^*)$
$r = f'(\tilde{k}^*) - \delta$（資本の純収益率）	0	$\tilde{k}$ だけに依存
w（実質賃金）	g	$w = A[f(\tilde{k}) - \tilde{k}f'(\tilde{k})]$（第8章）

この表は、カルドアの事実1〜5（一人当たりの産出と資本の持続的成長、一定の K/Y と利子率、一定の分配率）をすべて再現しています。このように「すべての変数が一定率（ゼロを含む）で成長する経路」が**均斉成長経路**（BGP）です。

要点：技術進歩のあるソローモデルの結論

- 経済は均斉成長経路に収束し、そこでは一人当たり所得は技術進歩率 g で成長し続ける。
- 長期の一人当たり成長率は g だけで決まり、貯蓄率や人口成長率には依存しない。それらは均斉成長経路の**高さ**（水準）を決める。
- 持続的な成長を説明しているのは外生の g なので、ソローモデルは「成長の源泉を説明していない」とも言える。g そのものを説明するのが第3巻の内生的成長理論です。

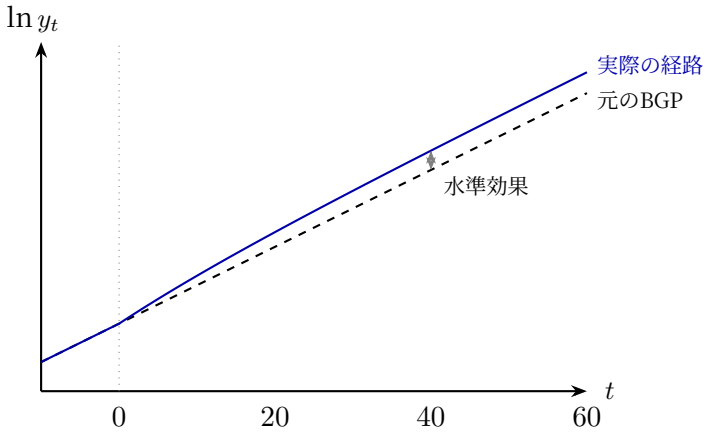
計算例：技術進歩を加えた数値例

$\alpha = 1/3$、$s = 0.24$、$n = 0.01$、$g = 0.02$、$\delta = 0.05$ とします。$(1+n)(1+g) - 1 + \delta = 0.0802$ なので

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{0.24}{0.0802}\right)^{1.5} = 5.18, \qquad \tilde{y}^* = 1.73, \qquad K/Y = \frac{0.24}{0.0802} = 2.99.$$

資本・産出比率が約3という値は、先進国の年次データでよく見られる水準です。収束速度は離散時間で $\lambda = (1-\alpha) \times 0.0802/1.0302 = 5.2\%$、半減期は約13年になります。これが第9章のカリブレーションの出発点になります。

図 7.1　貯蓄率の上昇：均斉成長経路の平行移動



$t = 0$ に貯蓄率が上がる。縦軸は対数目盛。

図の読み方

- 対数目盛なので、均斉成長経路は傾き g の直線です（第1章）。
- 貯蓄率が上がると、経路は一時的に傾きが急になり（成長率が g を上回る）、やがて元の直線と**平行な**、より高い直線に乗り移ります。
- 長期の傾き（成長率）は変わらず、高さ（水準）だけが変わります。図6.2(b)の「一時的な成長」は、この乗り移りの途中の姿です。

7.4　技術進歩のもとでの黄金律

定常状態の効率単位あたり消費 $\tilde{c}^* = f(\tilde{k}^*) - (n + g + \delta)\tilde{k}^*$ を最大にする条件は

$$f'(\tilde{k}_{\mathrm{GR}}) = n + g + \delta \quad \Longleftrightarrow \quad r = n + g.$$

「**資本の純収益率が経済全体の成長率に等しい**」という形になります。均斉成長経路のすべての時点で一人当たり消費が最大になるので、黄金律の比較は技術進歩があっても意味を持ちます。

補足：連続時間と離散時間の数値の違い

連続時間では必要投資の係数は $n+g+\delta = 0.08$、離散時間では $(1+n)(1+g)-1+\delta = 0.0802$ です。差は交差項 $ng = 0.0002$ だけです。年次モデルでは無視できますが、パラメータを論文から借りてくるときは、どちらの時間で書かれたモデルかを確かめる習慣をつけましょう。

次の章へ　ここまでソローモデルを「経済全体の遷移式」として扱ってきました。次章では、同じモデルを企業と家計が市場で取引する経済として読み直し、要素価格と**均衡経路**を定義します。これは第2巻の競争均衡の準備です。

第8章

分権経済として読む：要素価格と均衡経路

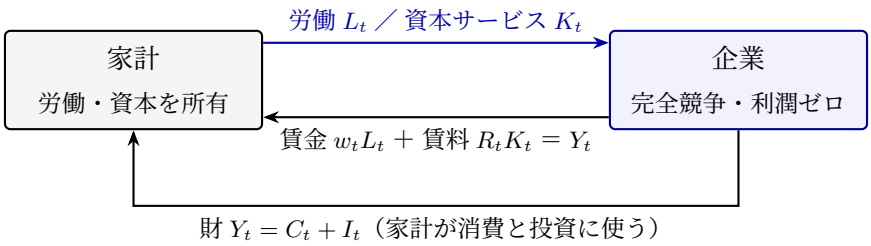
ここまでの流れ　第3〜7章では、ソローモデルを「経済全体で産出の s 割を投資する」という集計された遷移式として扱いました。
この章の問い　現実の経済では、生産するのは企業、貯蓄するのは家計で、両者は市場で取引しています。ソローモデルを、そのような**分権経済**の結果として読み直せるのか。
この章で分かること　企業の利潤最大化から決まる**要素価格**、**オイラーの定理**と**分配率**、そして「**均衡経路**」の正確な定義です。第2巻の競争均衡は、この章の定義の「貯蓄のルール」を家計の最適化に置き換えたものになります。

8.1　経済の登場人物

次のような経済を考えます。技術進歩も含めた一般形で書きますが、$g = 0$（$A_t = 1$）とおけば第4〜6章のモデルです。

- **家計**：労働を供給し、資本を所有する。資本を企業に貸して（レンタルして）賃料を受け取る。所得の一定割合 s を貯蓄し、それで新しい資本を買う。
- **企業**：資本を借り、労働を雇って生産する。多数の企業が完全競争をしており、価格を所与として行動する。
- **市場**：財市場、労働市場、資本のレンタル市場の3つ。財の価格を1に基準化し、他の価格はすべて財の単位で測る（実質）。

図 8.1　分権経済でのモノとお金の流れ



8.2 企業の問題と要素価格

企業は賃金 w_t と資本の賃料 R_t を所与として、利潤を最大にします。

$$\max_{K_t,\,L_t}\; F(K_t, A_t L_t) - w_t L_t - R_t K_t.$$

1階条件は、各要素の限界生産物が価格に等しいことです。効率単位の変数で書くと

要点：要素価格の決定

$$R_t = F_K = f'(\tilde{k}_t), \qquad w_t = F_L = A_t\big[f(\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t f'(\tilde{k}_t)\big] \tag{8.1}$$

資本の**純**収益率（実質利子率）は $r_t = R_t - \delta$。

計算例：F_K と F_L を効率単位で書く

$F(K, AL) = AL\, f(K/(AL))$ です。

- K で微分：$F_K = AL \cdot f'(\tilde{k}) \cdot \dfrac{1}{AL} = f'(\tilde{k})$。
- L で微分：$F_L = A f(\tilde{k}) + AL\, f'(\tilde{k}) \cdot \left(-\dfrac{K}{AL^2}\right) = A\big[f(\tilde{k}) - \tilde{k} f'(\tilde{k})\big]$。

コブ＝ダグラス型 $f(\tilde{k}) = \tilde{k}^{\alpha}$ なら、$R = \alpha \tilde{k}^{\alpha-1} = \alpha Y/K$、$w = (1-\alpha) A \tilde{k}^{\alpha} = (1-\alpha) Y/L$ です。

数式の読み方：要素価格の式が語ること

- **資本が豊富なほど利子率は低く、賃金は高い**：$\tilde{k}$ が大きいと $f'(\tilde{k})$ は小さく（収穫逓減）、労働者1人が使える機械が多いので賃金は高くなります。
- 均斉成長経路では $\tilde{k}$ が一定なので、r は一定、w は A_t と同じ率 g で成長します（第7章の表7.1）。
- 「貧しい国ほど資本の収益率が高いはずなのに、なぜ資本は豊かな国から貧しい国へ大量に流れないのか」という問い（ルーカスのパラドックス）は、この式から生まれました。

8.3 オイラーの定理と分配率

収穫一定の関数については、**オイラーの定理**

$$F(K, AL) = F_K\, K + F_L\, L$$

が成り立ちます（1次同次の式 $F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL)$ を λ で微分して $\lambda = 1$ とおけば得られます）。要素価格が限界生産物に等しいとき、右辺は「資本への支払い＋労働への支払い」なので

$$Y_t = R_t K_t + w_t L_t.$$

産出がちょうど2つの要素に配分され尽くし、企業の利潤はゼロになります。コブ＝ダグラス型では

$$\frac{R_t K_t}{Y_t} = \alpha, \qquad \frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 - \alpha$$

と、分配率がパラメータで一定になります（カルドアの事実5）。これが「α＝資本分配率」の根拠であり、第9章のカリブレーションで α をデータから決める方法の根拠でもあります。

補足：収穫一定が崩れると

オイラーの定理が使えるのは1次同次のときだけです。第3巻で見るように、アイデア（技術）を生産要素として数えると経済全体では**収穫逓増**になり、すべての要素に限界生産物を支払うと産出が足りなくなります。そのため、研究開発の報酬を払うには**独占**（価格＞限界費用）が必要になります。この「独占的競争」の企業部門が、そのままNKモデルの企業部門になります。

8.4 家計の行動と市場の清算

家計の所得は賃金と賃料の合計 $w_t L_t + R_t K_t$ です。家計はその割合 s を貯蓄して新しい資本を買い、残りを消費します。資本は家計の資産で、

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + s\,(w_t L_t + R_t K_t), \qquad C_t = (1 - s)(w_t L_t + R_t K_t).$$

市場の清算条件は次の3つです。

1. **労働市場**：企業が雇う労働 ＝ 家計が供給する労働 L_t（労働は非弾力的に供給される）。
2. **資本のレンタル市場**：企業が借りる資本 ＝ 家計が持っている資本 K_t。
3. **財市場**：$C_t + I_t = Y_t$。

オイラーの定理より家計の所得は Y_t に等しいので、家計の貯蓄行動から $K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + s Y_t$ が得られ、第3・7章の基本方程式に戻ります。

8.5 均衡経路の定義

以上をまとめて、「均衡」を正確に定義します。この形式の定義は、大学院の授業や試験で頻繁に問われます。

要点：ソロー経済の均衡経路

初期資本 K_0 と外生変数の経路 $\{A_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}$ が与えられたとき、**均衡経路**とは、配分 $\{C_t, I_t, K_{t+1}, Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ と価格 $\{w_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$ の列で、各期 t について次を満たすものである。

1. （企業の最適化）価格を所与として、K_t, L_t は利潤を最大にする：$R_t = F_K$、$w_t = F_L$。
2. （家計の行動）家計は所得 $w_t L_t + R_t K_t$ の割合 s を貯蓄し、資本は $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$ に従う。
3. （市場の清算）労働・資本・財の各市場が清算する：$Y_t = F(K_t, A_t L_t) = C_t + I_t$。

数式の読み方：定義を読むときの3つのポイント

- **均衡は「列」である**：ある1時点の値ではなく、$t = 0$ から無限の将来までの配分と価格の経路全体が均衡です。
- **何が所与で何が決まるか**を最初に書く：所与（初期条件と外生変数）を明記し、決まる変数をすべて並べます。
- **主体の行動＋市場の清算**という構成：この構成は、RCK、RBC、NK、そしてDSGEのどのモデルでも共通です。違うのは「主体の行動」の中身だけです。

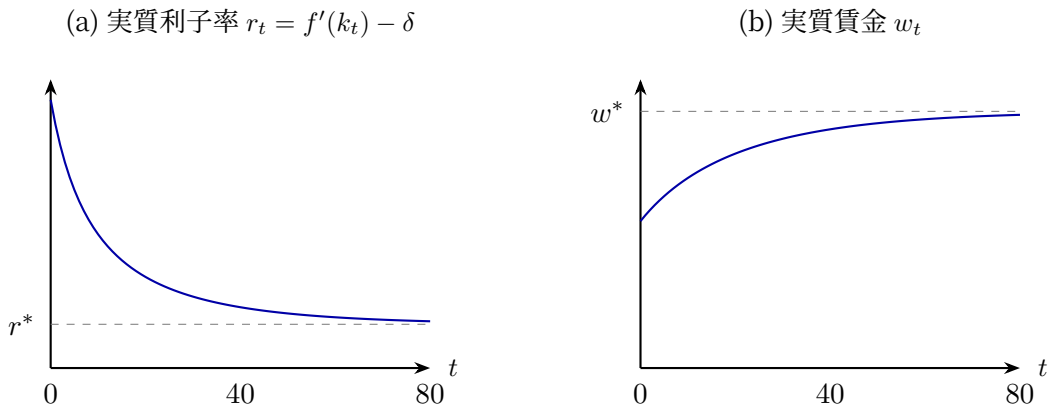
表 8.1　均衡の定義の比較：ソローとRCK

構成要素	ソローモデル（本巻）	RCKモデル（第2巻）
企業	利潤最大化：$R = F_K, w = F_L$	同じ
家計	所得の s 割を貯蓄（**ルール**）	生涯効用を最大化（**最適化**）
家計の行動を表す式	$C_t = (1-s)Y_t$	オイラー方程式＋横断性条件
市場	労働・資本・財が清算	同じ
状態変数	k_t	k_t
ジャンプ変数	なし（c_t は k_t で決まる）	c_t（将来の予想で決まる）

8.6　移行過程での要素価格

均衡経路の上で、要素価格はどう動くでしょうか。第5章の経路（$k_0 = 1.5$ から出発、$g = 0$）に沿って利子率と賃金を計算すると次のようになります。

図 8.2　移行過程での利子率と賃金



資本の少ない状態から出発した経済。破線は定常状態の値。

図の読み方

- 資本が乏しい初期には利子率が約20%と非常に高く、資本の蓄積とともに定常状態の値 $r^* = \alpha(n+\delta)/s - \delta = 3.3\%$ に向かって低下します。
- 賃金は逆に、資本の蓄積とともに上昇します。資本の蓄積の恩恵は、長期的には主に**労働者**に賃金上昇の形で及びます。
- 定常状態の利子率 3.3% は人口成長率 $n = 1\%$ を上回っているので、第6章の基準からこの経済は動学的に効率的です。

要点

- 完全競争の企業は、要素価格を限界生産物に等しくする。収穫一定ならオイラーの定理により利潤はゼロで、コブ＝ダグラス型では分配率が一定。
- ソローモデルは「企業の最適化＋貯蓄率一定の家計＋市場の清算」という分権経済の均衡経路として読める。
- 均衡は「配分と価格の無限の列」であり、所与・主体の行動・市場の清算の3点で定義する。この形式はDSGEモデルまで共通。

次の章へ　次章では、この分配率の性質を使って、データから成長の源泉を分解する**成長会計**と、モデルのパラメータをデータに合わせて決める**カリブレーション**を学びます。

第9章

成長会計とカリブレーション

> **ここまでの流れ**　第8章で、完全競争のもとでは α が資本分配率に等しいことを示しました。
> **この章の問い**　現実の成長のうち、どれだけが資本の蓄積で、どれだけが技術進歩によるのか。モデルの数値（パラメータ）は、どうやって現実に合わせて決めるのか。
> **この章で分かること**　**成長会計**と**ソロー残差**、そしてRBC・DSGEモデルで標準的な**カリブレーション**の考え方と手順です。

9.1　成長会計の基本式

生産関数をヒックス中立的な形 $Y_t = Z_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ で書きます（Z_t は**全要素生産性**、TFP）。対数をとって時間で差分をとると（第1章の対数の性質）

$$\underbrace{g_Y}_{\text{産出の成長}} = \underbrace{\alpha\, g_K}_{\text{資本の寄与}} + \underbrace{(1-\alpha)\, g_L}_{\text{労働の寄与}} + \underbrace{g_Z}_{\text{TFPの寄与}} \tag{9.1}$$

となります。g_x は変数 x の成長率（対数差分）です。

数式の読み方：成長会計の考え方

- g_Y、g_K、g_L はデータから直接測れます。α は資本分配率として、所得のデータから測れます（第8章）。
- 残る g_Z は直接は測れないので、**残差**として計算します：$g_Z = g_Y - \alpha g_K - (1-\alpha) g_L$。これを**ソロー残差**と呼びます。
- 一人当たりで書けば $g_y = \alpha\, g_k + g_Z$（$y = Y/L$、$k = K/L$）。一人当たり所得の成長を「資本装備率の上昇」と「TFPの上昇」に分けます。
- 現実の分配率は年によって少しずつ変わるので、実際の計算では隣り合う2年の分配率の平均を使うのが一般的です。

計算例：仮想的な経済での成長会計

ある経済で、労働者一人当たりの産出が年2.0%、一人当たり資本が年2.4%で成長し、資本分配率が $1/3$ だったとします。

$$g_Z = 2.0 - \tfrac{1}{3} \times 2.4 = 2.0 - 0.8 = 1.2\%.$$

一人当たり成長2.0%のうち、資本の寄与が0.8%ポイント（4割）、TFPの寄与が1.2%ポイント（6割）です。

9.2 資本・産出比率で書く成長会計

上の分解には1つ問題があります。ソローモデルでは、技術が進歩すると、それに引っ張られて資本も蓄積されます（均斉成長経路では k も g で成長）。そのため、式(9.1)の「資本の寄与」には、**技術進歩が誘発した資本蓄積**が含まれてしまいます。

そこで、労働増大的な形 $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$ を Y^{α} で割って整理すると

$$y_t = \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t \quad \Longrightarrow \quad g_y = \frac{\alpha}{1-\alpha}\, g_{K/Y} + g_A \tag{9.2}$$

となります。

数式の読み方：なぜ K/Y を使うのか

- 均斉成長経路では K/Y は一定なので、$g_{K/Y} = 0$ となり、一人当たり成長はすべて技術（g_A）に帰属されます。技術が誘発した資本蓄積は、技術の側に数えられるのです。
- 一方、貯蓄率の上昇などで K/Y が上がっている移行過程では、その分だけ資本の寄与が正になります。
- 先ほどの数値例で $g_{K/Y} = g_k - g_y = 0.4\%$ なら、資本の寄与は $0.5 \times 0.4 = 0.2\%$ポイント、技術の寄与は 1.8%ポイント（9割）です。同じデータでも、分解の仕方で「資本の寄与」の大きさが大きく変わります。
- この K/Y 形の分解は、国の間の所得**水準**の差を分解する**開発会計**（第3巻）でも使われます。

9.3 ソロー残差の読み方

多くの国の成長会計では、一人当たり成長のかなりの部分がソロー残差（TFPの成長）に帰属されます。ただし、残差は「資本と労働で説明できなかったものすべて」なので、解

釈には注意が必要です。

- **測定の問題**：労働の質（教育・経験）、資本の質、労働時間、設備の稼働率などをきちんと測らないと、それらの変化がすべて残差に入ります。
- **技術以外の要因**：資源配分の効率、制度、規制なども残差に含まれます。残差は「無知の尺度」とも呼ばれます。
- **景気とともに動く**：ソロー残差を毎年計算すると、好況期に高く、不況期に低くなる傾向があります。

補足：ソロー残差からRBCへ

3つ目の性質に注目したのが、1980年代の**実物的景気循環（RBC）理論**です。キッドランドとプレスコットは、「景気循環は、技術（TFP）のランダムな変動に、家計と企業が最適に反応した結果ではないか」と考え、成長モデルにTFPショックを加えたモデルで景気循環を再現しようとしました。その際、モデルの数値を決める方法として採用されたのが、次節のカリブレーションです。一方で、好況期に稼働率や労働の密度が上がるだけでも残差は上昇するため、「ソロー残差の変動は本当に技術の変動か」という批判もあり、これがNKモデルの登場の背景の1つになります（第2巻・続巻）。

9.4 カリブレーションとは

モデルで数量的な問い（「貯蓄率が上がると所得は何%上がるか」「収束に何年かかるか」）に答えるには、パラメータに具体的な数値を入れる必要があります。その方法は大きく2つあります。

- **推定**：データとモデルの予測が最もよく合うように、統計的な手法（回帰、最尤法、ベイズ推定など）でパラメータを選ぶ。
- **カリブレーション**（calibration）：長期の平均的な事実（比率や分配率など）や、ミクロ的な研究から得られた値に合うように、パラメータを1つずつ決める。

補足：「カリブレーション」という言葉

英語の calibration は、もともと計測器の目盛りを基準に合わせて調整する「目盛り合わせ」を意味する言葉です。体重計の針をゼロに合わせるように、モデルの数値を現実のデータに合わせる作業なので、この名前で呼ばれます。日本語のマクロ経済学の文献でも、訳さずに「カリブレーション」と書くのが一般的です。

要点：カリブレーションの考え方

1. モデルの**定常状態**（または均斉成長経路）の式を、パラメータの関数として書く。
2. 長期の平均として安定しているデータの比率（**ターゲット**）を選ぶ。
3. 定常状態の値がターゲットに一致するように、パラメータを逆算する。
4. ターゲットに**使わなかった**性質（収束速度、変動の大きさなど）をモデルが再現できるかで、モデルを評価する。

9.5 ソローモデルのカリブレーション

年次モデルを想定し、各パラメータを次のように決めます。表の「目安」は、先進国の長期平均として典型的な値の例です。実際に使うときは、対象とする国と期間のデータで計算し直します。

表 9.1 ソローモデルのカリブレーション（年次）

パラメータ	対応するデータ（ターゲット）	決め方	目安
α	労働分配率 wL/Y	$\alpha = 1 - wL/Y$	$1/3$
n	人口（就業者）の成長率	直接	0.01
g	一人当たり実質GDPの長期成長率	均斉成長経路で $g_y = g$	0.02
s	投資・GDP比率 I/Y	$s = I/Y$	0.24
δ	資本・産出比率 K/Y	下の式で逆算	0.05

計算例：減耗率を K/Y から逆算する

均斉成長経路では資本蓄積式から $I/K = (1+n)(1+g) - 1 + \delta$ が成り立つので（$\tilde{k}$ が一定の条件を書き直したもの）

$$\delta = \frac{I/Y}{K/Y} - \big[(1+n)(1+g) - 1\big].$$

$I/Y = 0.24$、$K/Y = 3$ なら $\delta = 0.08 - 0.0302 \approx 0.05$ です。α や s と違い、減耗率は直接観察しにくいので、このように**ほかの比率から逆算**するのがカリブレーションの典型的な手順です。

数式の読み方：パラメータとターゲットの1対1対応

カリブレーションでは、各パラメータに「それを主に決めるデータ」を1つずつ対応させます。$\alpha \leftrightarrow$ 労働分配率、$s \leftrightarrow I/Y$、$\delta \leftrightarrow K/Y$ という具合です。こうすると、結果の数値がどのデータから来ているかが透明になり、「この結論は δ の値に敏感か」といった検討もしやすくなります。

9.6 ターゲット外での評価：収束速度

カリブレーションしたモデルで、ターゲットに使わなかった性質を計算してみます。第7章で求めたとおり、収束速度は

$$\lambda \approx (1-\alpha)(n+g+\delta) = \tfrac{2}{3} \times 0.08 \approx 5\%$$

です。ところが、各国のデータから推定された収束速度は、多くの研究でおよそ年2%程度です（第10章）。**モデルは現実より2倍以上速く収束すると予測している**ことになります。

このように、ターゲット外の性質でモデルの弱点を見つけ、それを改善する方向にモデルを拡張していくのが、カリブレーションを使った研究の典型的な進め方です。第10章では、この「収束速度のパズル」を人的資本で解決する試みを見ます。

9.7 年次から四半期へ：RBCへの準備

景気循環を分析するRBCモデルやNKモデルは、通常**四半期**モデルです。年次のパラメータを四半期に直すときは、「1期の長さが4分の1になる」ことに注意します。

表 9.2　年次と四半期の換算（目安）

	年次	四半期
成長率 g, n	g	$(1+g)^{1/4}-1 \approx g/4$
減耗率 δ	0.05〜0.10	0.0125〜0.025
資本・産出比率 K/Y	約3	約12（産出が4分の1になるため）
割引因子 β（第2巻）	0.96	$0.96^{1/4} \approx 0.99$
分配率 α	1/3	1/3（比率なので変わらない）

発展：第2巻のRBCで加わるカリブレーション

第2巻のRCK・RBCモデルでは、貯蓄率 s の代わりに家計の選好のパラメータを決めます。たとえば割引因子 β は、定常状態の条件 $1 = \beta(1 + r)$（第2巻）から、データの平均的な実質利子率 r に合わせて決めます。年率4%なら四半期で $\beta \approx 0.99$ です。労働供給のパラメータは、家計が自由時間の約3分の1を働くという事実などに合わせます。さらにTFPショックの持続性と大きさは、四半期のソロー残差の時系列から推定します。「定常状態の比率に合わせる」という本章の考え方は、そのまま引き継がれます。

要点

- 成長会計：$g_y = \alpha g_k + g_Z$。α は分配率から、g_Z（ソロー残差）は残差として測る。K/Y 形にすると技術が誘発した資本蓄積を技術の側に数えられる。
- ソロー残差は景気とともに変動し、RBC理論の出発点になった。
- カリブレーション：定常状態の式をデータの長期平均比率に合わせてパラメータを逆算し、ターゲット外の性質でモデルを評価する。

次の章へ　最後に、ソローモデルの最も有名な予測である「収束」をデータで確かめ、モデルの到達点と限界をまとめます。

第10章

収束の実証と拡張ソローモデル

> **ここまでの流れ**　第5章で「定常状態から遠い経済ほど速く成長する」こと、第9章で「カリブレーションしたモデルの収束速度は約5%」であることを見ました。
> **この章の問い**　貧しい国は豊かな国に追いついているのか。モデルの予測はデータとどこまで合い、合わない部分はどう直せばよいのか。
> **この章で分かること**　**絶対収束**と**条件付き収束**の違い、収束回帰の考え方、**収束速度のパズル**と人的資本を加えた**拡張ソローモデル**、そしてソローモデルの到達点と第2巻への接続です。

10.1　収束の式

第5章の1次近似を一人当たり所得で書きます。効率単位の所得 $\tilde{y} = y/A$ の対数偏差が速さ λ で縮み、A が率 g で伸びるので、連続時間で

$$\ln y(t) - \ln A(t) - \ln \tilde{y}^* = e^{-\lambda t}\big[\ln y(0) - \ln A(0) - \ln \tilde{y}^*\big].$$

期間 T 年の年平均成長率 $\gamma_y \equiv [\ln y(T) - \ln y(0)]/T$ について整理すると

$$\gamma_y = g + \underbrace{\frac{1 - e^{-\lambda T}}{T}}_{b>0}\big[\ln \tilde{y}^* + \ln A(0) - \ln y(0)\big] \tag{10.1}$$

数式の読み方：収束の式の読み方

- 成長率は、技術進歩率 g に「行き先と出発点の差」に比例する項を足したものです。
- **絶対収束**：すべての国の行き先（$\tilde{y}^*$ と $A(0)$）が同じなら、初期に貧しい国ほど速く成長し、いずれ追いつきます。
- **条件付き収束**：国によって行き先が違うなら、各国は**自分の**均斉成長経路に近づくだけです。「行き先の条件（貯蓄率・人口成長率など）が同じ国どうしでは、貧しい国ほど速く成長する」というのが条件付き収束です。
- 係数 b は収束速度 λ と期間 T で決まるので、回帰で b を推定すれば λ を逆算できます。

10.2 収束回帰

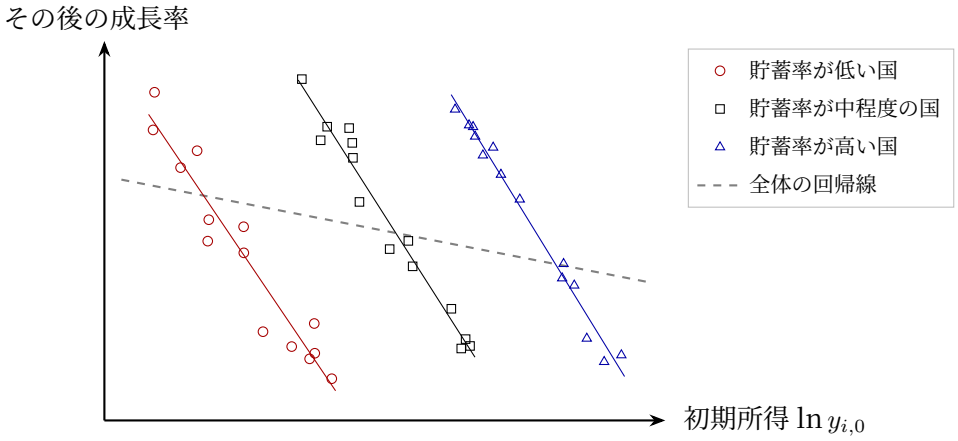
式(10.1)をデータで確かめるには、国 i の成長率を初期所得に回帰します。

$$\gamma_{y,i} = \beta_0 + \beta_1 \ln y_{i,0} + \boldsymbol{\beta}_2' \mathbf{X}_i + u_i.$$

- $\mathbf{X}_i$（貯蓄率、人口成長率など）を入れない回帰で $\beta_1 < 0$ なら**絶対収束**。
- $\mathbf{X}_i$ で行き先の違いをコントロールしたうえで $\beta_1 < 0$ なら**条件付き収束**。
- $\beta_1 = -b$ なので、推定値から $\lambda = -\ln(1 - bT)/T$ が求まります。

初期所得の係数 β_1 が負であることをβ **収束**と呼びます。

図 10.1　シミュレーションで見る絶対収束と条件付き収束



ソローモデルで計算した仮想の国々（現実のデータではありません）。

図の読み方

- **グループ内**（同じ記号の点）では、初期所得の低い国ほど成長率が高く、はっきりした右下がりの関係（細い実線）があります。これが条件付き収束です。
- **全体**で回帰すると（灰色の破線）、右下がりの関係はほとんど消えます。貯蓄率の高い国は、初期所得も高く、しかも自分の行き先が高いので成長率も下がりにくいからです。
- つまり、モデルが正しくても、**絶対収束が観察されないこと**は十分ありえます。行き先の違いをコントロールして初めて、収束の力が見えてくるのです。

10.3 実証研究の主な発見

これまでの多くの実証研究から、おおよそ次のことが分かっています。

1. **広い国の標本では、絶対収束はほとんど見られない**。過去の長い期間でみると、豊かな国と貧しい国の差はむしろ拡大してきた。

2. **似た国どうし**（先進国どうし、一国内の地域どうし）では、絶対収束がはっきり見られる。

3. 貯蓄率・人口成長率・教育などをコントロールすると、広い標本でも**条件付き収束**が見られる。

4. 推定された収束速度は、多くの研究で**年2%前後**である。

発展：σ 収束と「平均への回帰」

国の間の所得の**ばらつき**（対数所得の標準偏差）が時間とともに縮小することを**σ 収束**と呼びます。β 収束（貧しい国ほど速く成長する）は σ 収束の必要条件ですが、十分条件ではありません。各国が毎年ランダムなショックを受けていると、平均に戻る力（β 収束）があっても、ショックによる散らばりがそれを打ち消し、ばらつきが縮まないことがあるからです。親の身長と子の身長の関係で知られる「平均への回帰」の誤謬と同じ構造です。

10.4 収束速度のパズル

第9章でカリブレーションしたソローモデルは、$\lambda \approx (1-\alpha)(n+g+\delta) \approx 5\%$ を予測します。データの約2%を再現するには、

$$(1-\alpha) \times 0.08 \approx 0.02 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 0.75$$

が必要です。しかし資本分配率は約 $1/3$ なので、これは現実と合いません。逆に言えば、**広い意味の資本の弾力性が約 $2/3$ 以上あれば**、収束の遅さを説明できます。

同じ問題は、所得の**水準**の差にも現れます。$\alpha = 1/3$ のソローモデルでは、貯蓄率が2倍違っても定常状態の所得は約1.4倍しか違いません（第4章）。現実の国の間の所得差は数十倍にもなるので、貯蓄率や人口成長率の違いだけでは、とても説明できないのです。

10.5 拡張ソローモデル：人的資本を加える

このパズルへの代表的な答えが、**人的資本**（教育や技能）を生産要素に加えることです。生産関数を

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha + \beta < 1$$

とし、物的資本と同じように、人的資本にも所得の一定割合 s_h が投資されるとします（物的資本への投資率を s_k と書きます）。第4章と同じ手順で均斉成長経路を求めると

要点：拡張ソローモデルの定常状態と収束速度

$$\ln y_t^* = \ln A_t + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln s_k + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln s_h - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(n+g+\delta) \tag{10.2}$$

$$\lambda = (1-\alpha-\beta)(n+g+\delta) \tag{10.3}$$

数式の読み方：人的資本を加えると何が変わるか

- **広い意味の資本**の弾力性が α から $\alpha+\beta$ に大きくなります。$\alpha=\beta=1/3$ なら $\alpha+\beta=2/3$。
- 収束速度は $\lambda = \frac{1}{3}\times 0.08 \approx 2.7\%$ に下がり、データの2%に近づきます。
- 投資率の効果も大きくなります。式(10.2)の $\ln s_k$ の係数は $\alpha/(1-\alpha-\beta)=1$ で、元のモデルの $1/2$ の2倍です。物的資本が増えると所得が増え、それが人的資本への投資も増やすという相乗効果が働くためです。

この式を国のデータに当てはめた代表的な研究（マンキュー＝ローマー＝ワイル、1992年）は、$\ln s_k$、$\ln s_h$（就学率で代理）、$\ln(n+g+\delta)$ だけで国の間の所得の差の大部分を説明でき、推定された係数は α と β がそれぞれ約 $1/3$ であることと整合的だと報告しました。

補足：この結論への疑問と第3巻への接続

この推定では、技術水準 A の国の間の違いは誤差項に入り、説明変数と無関係だと仮定されています。しかし、技術水準の高い国ほど投資率も高い傾向があれば、投資率の係数は過大に推定されます。α を分配率から与え、技術水準 A を国ごとに残差として測る**開発会計**を行うと、逆に「所得の差の大部分は技術水準（TFP）の差による」という結論になります。どちらの見方をとるかで、「貧しい国は投資を増やすべきか、生産性を上げるべきか」という政策の含意が変わります。この問題は第3巻で扱います。

10.6 ソローモデルの到達点

本巻の内容を、ソローモデルが答えたことと答えられなかったことに分けて整理します。

表 10.1　ソローモデルの到達点と限界

答えたこと	答えられなかったこと
資本の蓄積だけでは一人当たりの成長は続かない（収穫逓減）	技術進歩率 g はどう決まるか（→第3巻）
長期の成長率は技術進歩率で決まり、貯蓄率は水準だけを決める	貯蓄率 s は望ましいか、何で決まるか（→第2巻）
経済は均斉成長経路に収束し、カルドアの事実1〜5を再現する	国の間の大きな所得差（カルドアの事実6）
定常状態から遠い経済ほど速く成長する（条件付き収束）	収束の遅さ（人的資本で部分的に解決）

10.7　第2巻へ：貯蓄を「選ぶ」と何が変わるか

第2巻のRCKモデルでは、貯蓄率の仮定 $C_t = (1-s)Y_t$ を、家計の生涯効用の最大化に置き換えます。すると、モデルの構造は次のように変わります。

- **遷移式が2本になる**：資本の蓄積式に加えて、消費の動きを決める**オイラー方程式**が加わります。状態は k_t と c_t の2変数になり、第2章の発展で予告したとおり、2つの変数が互いに影響し合いながら動くモデル（第4章の発展で紹介した「2変数の力学系」）になります。
- **ジャンプ変数が現れる**：消費 c_t は、過去によって決まっている状態変数ではなく、**将来の予想**に応じて今期の値が決まる変数になります。どこから始めても定常状態に収束したソローモデルと違い、定常状態に向かう経路（**鞍点経路**）は1本しかなく、消費はその上に「ジャンプ」して乗ります。
- **定常状態が修正される**：定常状態の資本は、貯蓄率ではなく時間選好率で決まり（修正黄金律）、経済は必ず動学的に効率的になります。
- **確率的ショックへの拡張**：TFP に確率的なショックを加え、労働供給を選べるようにすると、RBCモデルになります。そこで、本巻の対数線形化（第2章）、トレンド除去（第7章）、カリブレーション（第9章）がすべて使われます。

要点：本巻のまとめ

- 動学モデルは「状態変数＋遷移式＋均衡＋定常状態のまわりの近似」でできている。ソローモデルは、そのすべてを1変数で体験できるモデル。
- 離散時間と連続時間は表2.1で対応し、結果は本質的に同じ。
- ソローモデルは成長の「仕組み」を明らかにしたが、貯蓄と技術進歩は外生のまま残した。それぞれを内生化するのが、第2巻と第3巻の仕事です。

付録

確認問題とシリーズ共通の記号表

A.1 確認問題

1. 差分方程式 $x_{t+1} = 0.8x_t + 0.4$ の定常状態を求め、$x_0 = 0$ のときの一般項を書け。半減期は何期か。

2. ソローモデル（離散時間、技術進歩なし）の基本方程式を、資本蓄積式から導け。来期の人口で割る理由を説明せよ。

3. $f(k) = k^{\alpha}$ のとき、定常状態の k^*、y^*、c^*、K/Y を求めよ。$\alpha = 0.3$、$s = 0.2$、$n = 0.02$、$\delta = 0.08$ の数値も求めよ。

4. 定常状態での遷移式の傾き $g'(k^*)$ を求め、局所安定であることを示せ。また収束速度 λ を求めよ。

5. 貯蓄率が恒久的に上がったとき、$t = 0$ で k、y、c はどう動くか。その後の経路を図示せよ。

6. 黄金律の条件 $f'(k) = n + \delta$ を導き、コブ＝ダグラス型では $s_{\mathrm{GR}} = \alpha$ となることを示せ。動学的に非効率な経済で貯蓄率を下げると、すべての時点の消費が増える理由を説明せよ。

7. 労働増大的な技術進歩があるとき、効率単位の資本の遷移式（離散・連続）を導き、均斉成長経路での y、K、K/Y、r、w の成長率を答えよ。

8. ソロー経済の均衡経路を、所与・主体の行動・市場の清算の3点を明記して定義せよ。

9. 一人当たり産出が年2.5%、一人当たり資本が年3.0%で成長し、資本分配率が0.3のとき、ソロー残差を求めよ。K/Y 形の分解ではどうなるか。

10. $I/Y = 0.2$、$K/Y = 2.5$、$n = 0.01$、$g = 0.02$ のとき、年次の減耗率 δ をカリブレーションせよ。四半期モデルではおよそいくつになるか。

補足：略解

1. $x^* = 2$、$x_t = 2 - 2(0.8)^t$。半減期は $\ln 2/(-\ln 0.8) \approx 3.1$ 期。
2. 第3章を参照。今期の投資は来期の資本になり、来期の資本は来期の人数で分け合うから。
3. $k^* = (0.2/0.1)^{1/0.7} = 2.69$、$y^* = 1.35$、$c^* = 1.08$、$K/Y = 2$。
4. $g'(k^*) = [1 - \delta + \alpha(n+\delta)]/(1+n) < 1$、$\lambda = (1-\alpha)(n+\delta)/(1+n)$。
5. k と y は動かず、c は下にジャンプ。その後3つとも新しい定常状態に向けて上昇（図6.2）。
6. 第6章を参照。下げた瞬間は投資が減る分だけ消費が増え、その後は黄金律に近づくので定常状態の消費も増える。
7. 第7章の式(7.1)・(7.2)と表7.1を参照。
8. 第8章の定義を参照。
9. $g_Z = 2.5 - 0.3 \times 3.0 = 1.6\%$。$K/Y$ 形では $\frac{0.3}{0.7} \times 0.5 + g_A = 2.5$ より $g_A \approx 2.29\%$。
10. $\delta = 0.2/2.5 - 0.0302 \approx 0.05$。四半期ではおよそ 0.0125。

A.2　シリーズ共通の記号表

本シリーズでは、続巻のNK・DSGEモデルまで、できるだけ同じ記号を使います。標準的な教科書や論文の慣例に合わせています。

表 A.1　記号表（本巻で使うもの）

記号	意味	備考
Y_t, C_t, I_t, K_t	産出・消費・投資・資本（総量）	K_t は期首のストック
L_t	労働（人口）	$L_{t+1} = (1+n)L_t$
y_t, c_t, k_t	一人当たりの値	$y = Y/L$ など
$\tilde{y}_t$, $\tilde{k}_t$	効率単位あたりの値	$\tilde{k} = K/(AL)$
$\hat{x}_t$	定常状態からの対数偏差	$\hat{x} = \ln x - \ln x^*$
x^*	定常状態の値	文献により $\bar{x}$ とも書く
A_t	労働増大的な技術水準	$A_{t+1} = (1+g)A_t$
Z_t	全要素生産性（ヒックス中立的）	成長会計で使用
α	資本の産出弾力性＝資本分配率	目安 $1/3$
s	貯蓄率	ソローモデルのみ
n, g	人口成長率・技術進歩率	
δ	資本減耗率	
R_t, r_t, w_t	資本の賃料・実質利子率・実質賃金	$r = R - \delta$
λ	収束速度	

表 A.2　記号表（第2巻以降で登場するもの）

記号	意味	登場する巻
β, ρ	割引因子・時間選好率	第2巻（$\beta = 1/(1+\rho)$）
σ	相対的危険回避度（$1/\sigma$ が異時点間の代替の弾力性）	第2巻〜
N_t	労働時間	第2巻（RBC）〜
φ	フリッシュ弾力性の逆数	第2巻（RBC）〜
a_t, ρ_a, ε_t^a	対数TFP・その持続性・ショック	第2巻（RBC）〜
ε	財の間の代替の弾力性	第3巻〜（NKの企業部門）
$\mathcal{M}$	マークアップ $\varepsilon/(\varepsilon-1)$	第3巻〜
π_t, i_t, θ	インフレ率・名目利子率・価格硬直性	続巻（NK）

補足：記号の衝突に注意

文献では、同じ文字が別の意味で使われることがよくあります。たとえば ρ は時間選好率にもショックの持続性にも使われ（本シリーズでは後者を ρ_a と書き分けます）、π は利潤にもインフレ率にも使われます。第3巻の研究開発のモデルでは、知識の生産の弾力性を表す ϕ が登場しますが、これはNKモデルの φ（フリッシュ弾力性の逆数）とは無関係です。