ゲーム理論 攻略マニュアル

囚人のジレンマからシグナリングゲームまで：図で理解する均衡概念

目次

1　なぜ経済学にゲーム理論が必要なのか　3

1.1　価格受容者の世界と、その外側　3

1.2　ゲーム理論はどのように経済学に入ってきたか　4

1.3　ゲームを記述する基本要素　5

1.4　このマニュアルの地図　6

2　戦略形ゲームと支配戦略：囚人のジレンマ　9

2.1　利得表の読み方：囚人のジレンマ　9

2.2　支配戦略：相手が何をしても最善の戦略　10

2.3　ジレンマの正体：個人の合理性と社会的な非効率　12

2.4　支配される戦略の逐次消去　13

3　ナッシュ均衡：最適反応の交わるところ　17

3.1　最適反応：相手の戦略を所与としたときの最善　17

3.2　ナッシュ均衡の定義　18

3.3　利得表で均衡を見つける：下線法　18

3.4　連続的な戦略：クールノー複占　20

4　混合戦略ナッシュ均衡：確率的に選ぶという戦略　25

4.1　純粋戦略の均衡がないゲーム：マッチング・ペニー　25

4.2　混合戦略と期待利得　26

4.3 無差別の原理と最適反応対応 27
4.4 男女の争いの混合戦略均衡 29
4.5 ナッシュ均衡は必ず存在する 31

5 展開形ゲームと部分ゲーム完全均衡 33
5.1 ゲームの木：参入ゲーム 33
5.2 展開形ゲームの戦略と戦略形への変換 34
5.3 信用できない脅し 35
5.4 後ろ向き帰納法 36
5.5 情報集合：相手の行動が見えないとき 37
5.6 部分ゲームと部分ゲーム完全均衡 38
5.7 シュタッケルベルク競争：先手の利益 40

6 繰り返しゲーム：協力はどのように維持されるか 44
6.1 繰り返しゲームの設定 44
6.2 有限回の繰り返し：協力は崩れる 45
6.3 無限回の繰り返しとトリガー戦略 46
6.4 フォーク定理：何でも均衡になりうる 48
6.5 寡占への応用：暗黙のカルテル 50

7 不完備情報ゲームとベイジアン・ナッシュ均衡 54
7.1 タイプとハルサニ変換 54
7.2 例：相手の気持ちが分からない男女の争い 55
7.3 ベイジアン戦略とベイジアン・ナッシュ均衡 56
7.4 費用が分からないクールノー競争 58

8 完全ベイジアン均衡とシグナリングゲーム 63
8.1 部分ゲーム完全均衡の限界 63
8.2 信念とベイズ・ルール 64
8.3 完全ベイジアン均衡 65
8.4 シグナリングゲームの構造 66
8.5 スペンスの教育シグナリング・モデル 67

第1章

なぜ経済学にゲーム理論が必要なのか

> **ここまでの流れ**　学部のミクロ経済学では、まず完全競争市場を学びます。そこでは企業も消費者も「市場価格は自分では動かせない」と考えて行動しました。
> **この章の問い**　相手の行動が自分の損得を左右し、しかも相手も同じように考えている状況は、どのように分析すればよいのでしょうか。
> **この章で分かること**　「戦略的相互依存」という考え方、ゲーム理論が経済学の標準的な道具になった歴史、ゲームを記述する基本要素、そしてこのマニュアル全体の地図が分かります。

1.1　価格受容者の世界と、その外側

完全競争市場の企業は、市場価格 p を所与として利潤を最大化しました。

$$\max_{q} \ \pi(q) = p\,q - C(q) \tag{1.1}$$

この問題には、ほかの企業の名前も行動も登場しません。企業の数が非常に多く、1社の生産量が価格に与える影響は無視できるからです。ライバル企業の存在は、すべて「価格 p」という1つの数字に要約されています。

ところが、自動車、携帯電話の通信サービス、航空路線のように、少数の企業が市場を占めている場合（寡占）は事情が違います。企業1が生産量を増やすと価格が下がり、企業2の利潤が変わります。企業2がそれに反応すれば、今度は企業1の利潤が変わります。企業1の利潤は、自分の選択 q_1 だけでなく、ライバルの選択 q_2 にも依存するのです。

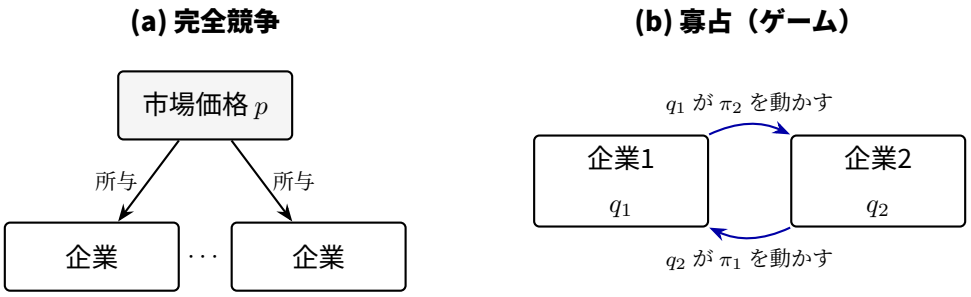
$$\pi_1 = \pi_1(q_1,\, q_2), \qquad \pi_2 = \pi_2(q_1,\, q_2) \tag{1.2}$$

数式の読み方：利潤が相手の選択にも依存する

- 式(1.1)では、利潤は自分の生産量 q だけの関数でした。価格 p は「天気」のような外から与えられる条件です。
- 式(1.2)では、企業1の利潤 π_1 の中に相手の生産量 q_2 が入っています。これが**戦略的相互依存**です。
- 企業1が最善の q_1 を選ぶには「企業2はどんな q_2 を選ぶか」を予想しなければなりません。ところが企業2も「企業1はどんな q_1 を選ぶか」を予想しています。予想の予想、そのまた予想……という堂々めぐりが生じます。

この堂々めぐりに「答え」を与える枠組みが**ゲーム理論**です。図1.1は、2つの世界の違いを模式的に表しています。

図 1.1　価格受容者の世界と、戦略的相互依存の世界



模式図。矢印は「影響を与える方向」を表す。

図の読み方

1. (a) 完全競争では、矢印は市場価格から各企業への一方向だけです。企業どうしが直接影響し合うことはなく、各企業は価格を見て最適化するだけで済みます。
2. (b) 寡占では、青い矢印が2社の間を往復しています。自分の選択が相手の利潤を動かし、相手の選択が自分の利潤を動かす。この「往復の矢印」がある状況を**ゲーム**と呼びます。

1.2　ゲーム理論はどのように経済学に入ってきたか

寡占の分析そのものは古く、クールノー（1838年）が数量競争を、ベルトラン（1883年）が価格競争を論じています。しかし、こうした分析を一般的に扱う理論体系は20世紀になってから整えられました。

- **1944年**：フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンが『ゲームの理論と経済行動』を

出版し、ゲーム理論を独立した分野として確立しました。

- **1950年前後**：ナッシュが、2人ゼロ和ゲームに限られない一般のゲームについて均衡（ナッシュ均衡）を定義し、その存在を証明しました。
- **1960年代**：ゼルテンが動学的なゲームでの「信用できない脅し」を排除する部分ゲーム完全均衡を、ハルサニが情報が不完備なゲームの分析方法を提案しました。
- **1970年代以降**：情報の非対称性（シグナリング、逆選択、モラルハザード）、契約理論、産業組織論、オークション理論などで、ゲーム理論はミクロ経済学の標準言語になりました。1994年にはナッシュ、ハルサニ、ゼルテンがノーベル経済学賞を受賞しています。

ゲーム理論が経済学にもたらした意義は、大きく3つにまとめられます。

要点：ゲーム理論の意義

- **少数主体の相互作用を扱える**：寡占、交渉、国際関係、労使関係など、価格受容の仮定が当てはまらない場面を分析できます。
- **個人の合理性と社会の効率性のズレを説明できる**：全員が合理的に行動しても、全員にとって悪い結果になりうること（囚人のジレンマ）を明確に示せます。
- **情報と時間を明示的に扱える**：「誰が何を知っているか」「誰が先に動くか」を記述でき、制度やルールの設計にも応用できます。

1.3 ゲームを記述する基本要素

どんなゲームも、まず次の3つを決めることから始まります。

$$G = \left(N,\ \{S_i\}_{i \in N},\ \{u_i\}_{i \in N} \right) \tag{1.3}$$

数式の読み方：ゲームの3要素

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ は**プレイヤー**の集合です。意思決定をする主体（企業、個人、政府など）です。
- S_i はプレイヤー i の**戦略**の集合です。選べる行動の一覧で、生産量なら $S_i = [0, \infty)$、「協力する／裏切る」なら $S_i = \{C, D\}$ です。
- $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ はプレイヤー i の**利得**関数です。全員の戦略の組み合わせ（**戦略プロファイル**）に対して、i がどれだけ嬉しいかを数字で表します。自分以外の戦略も引数に入っている点が、式(1.2)と同じ「相互依存」を表しています。

以下では、プレイヤー i 以外の全員の戦略をまとめて s_{-i} と書き、戦略プロファイルを $s = (s_i, s_{-i})$ と表します。「自分の戦略」と「他人の戦略」を分けて書けるので、このあと何度も使う便利な記法です。

さらに、分析の前提として次の2つを置きます。

- **合理性**：各プレイヤーは、自分の予想のもとで期待利得を最大にする戦略を選ぶ。
- **共有知識**：ゲームの構造（誰がプレイヤーで、何を選べて、利得はいくらか）と全員が合理的であることを、全員が知っており、全員が知っていることを全員が知っており……と無限に続く。

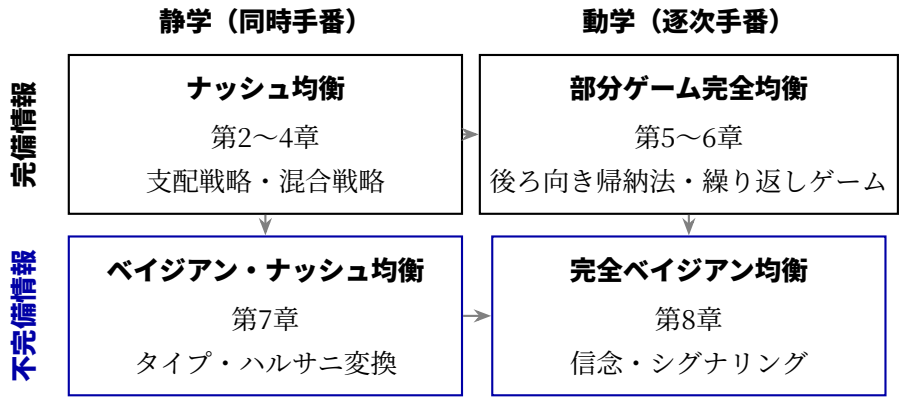
補足：「ゲーム」という言葉について

ゲーム理論の「ゲーム」は遊びに限りません。2人以上の主体がいて、各自の損得が全員の選択に依存する状況なら、価格競争も国際交渉も「ゲーム」です。利得は金額である必要はなく、選好の順序を表す数字（効用）であれば十分です。

1.4 このマニュアルの地図

ゲームは「同時に動くか、順番に動くか」と「全員が利得をすべて知っているか（完備情報）、知らないことがあるか（不完備情報）」の2つの軸で分類できます。それぞれの組み合わせに対応する均衡概念を学んでいくのが、このマニュアルの道筋です（図1.2）。

図 1.2　ゲームの分類と均衡概念の地図



矢印は「より精緻な均衡概念へ」の方向。下段（青枠）は不完備情報のゲーム。

図の読み方

1. 左上のナッシュ均衡がすべての出発点です。ほかの3つの均衡概念は、どれも「ナッシュ均衡に条件を追加したもの」として理解できます。
2. 右へ進むと「時間（手番の順序）」が加わります。後から動く人の行動が信用できるかどうか、という新しい問題が生じます。
3. 下へ進むと「情報の不完備性」が加わります。相手の利得（タイプ）が分からないので、確率的な予想（信念）を持って行動します。
4. 右下の完全ベイジアン均衡は、時間と情報の両方を扱う、学部上級から大学院初級の到達点です。

要点

- 寡占のように相手の選択が自分の利得に影響する状況（戦略的相互依存）では、価格受容者の最適化ではなくゲーム理論が必要になります。
- ゲームは「プレイヤー・戦略・利得」の3要素で記述し、合理性と共有知識を前提に分析します。
- ゲームは「静学／動学」と「完備／不完備情報」で分類され、それぞれにナッシュ均衡、部分ゲーム完全均衡、ベイジアン・ナッシュ均衡、完全ベイジアン均衡が対応します。

次の章へ　まずは最も単純な「2人が同時に1回だけ選ぶ」ゲームを、利得表を使って分析します。その代表例が囚人のジレンマです。

大学院とのつながり　大学院のミクロ経済学では、ゲーム理論がカリキュラムの大きな柱になります。このマニュアルの範囲は、その前半部分の入り口に当たります。

第2章

戦略形ゲームと支配戦略：囚人のジレンマ

> **ここまでの流れ**　第1章では、相手の選択が自分の利得を左右する状況をゲームとして記述する方法を学びました。
> **この章の問い**　相手が何を選ぶか分からないとき、それでも「これを選ぶべきだ」と言い切れる場合はあるでしょうか。そして、全員がそう選んだ結果は望ましいものになるでしょうか。
> **この章で分かること**　利得表の読み方、支配戦略と支配戦略均衡、囚人のジレンマが示す「個人の合理性と社会の効率性のズレ」、支配される戦略の逐次消去が分かります。

2.1　利得表の読み方：囚人のジレンマ

共犯の容疑者2人が、別々の部屋で取り調べを受けています。それぞれ「黙秘（C）」か「自白（D）」を選びます。C は相棒と協力（Cooperate）、D は相棒を裏切る（Defect）の頭文字です。2人は相談できず、同時に選びます。

- 2人とも黙秘すれば、証拠不十分で軽い罪になります。
- 自分だけ自白すれば、司法取引で釈放され、黙秘した相棒は重い罪になります。
- 2人とも自白すれば、2人とも中程度の罪になります。

刑が軽いほど利得が大きいとし、利得を記号で表したのが図2.1です。

図 2.1　囚人のジレンマの利得表（一般形）

		容疑者2：黙秘 C	容疑者2：自白 D
容疑者1	黙秘 C	$R,\ R$	$S,\ T$
	自白 D	$T,\ S$	$P,\ P$

各セルの左の文字が容疑者1（行を選ぶ）の利得、右の文字が容疑者2（列を選ぶ）の利得。利得の大小関係は $T > R > P > S$。

図の読み方

1. 容疑者1は**行**（横の並び）を、容疑者2は**列**（縦の並び）を選びます。2人の選択の組み合わせで、4つのセルのどれか1つが実現します。
2. セルの中の「左, 右」は「容疑者1の利得, 容疑者2の利得」です。たとえば右上のセル（C, D）は「1が黙秘、2が自白」で、1は最悪の S、2は最高の T を得ます。
3. この表のように、戦略と利得を一覧にしたゲームの表し方を**戦略形**（標準形）と呼びます。

数式の読み方：$T > R > P > S$ の意味

- T（Temptation，誘惑）：相手が黙秘しているときに自分だけ自白して得る利得。最も大きい。
- R（Reward，報酬）：2人とも黙秘したときの利得。
- P（Punishment，罰）：2人とも自白したときの利得。
- S（Sucker，お人好し）：自分だけ黙秘して裏切られたときの利得。最も小さい。
- $T > R$ は「裏切りの誘惑がある」こと、$R > P$ は「協力した方が2人とも良い」ことを意味します。この2つが同時に成り立つことが、ジレンマの源です。

計算例：数値例

以下では確認用に $T = 5,\ R = 3,\ P = 1,\ S = 0$ を使います。利得表は $(C,C) \to (3,3)$，$(C,D) \to (0,5)$，$(D,C) \to (5,0)$，$(D,D) \to (1,1)$ となります。この数値は第6章の繰り返しゲームでも使います。

2.2 支配戦略：相手が何をしても最善の戦略

容疑者1の立場で考えます。容疑者2の選択は分かりませんが、場合分けはできます。

$$\text{2が黙秘 } (C) \text{ のとき：} \quad u_1(D,C) = T \ > \ R = u_1(C,C) \tag{2.1}$$

$$\text{2が自白 } (D) \text{ のとき：} \quad u_1(D,D) = P \ > \ S = u_1(C,D) \tag{2.2}$$

どちらの場合も、自白（D）の方が利得が大きくなります。つまり容疑者1は、**相手の選択を予想する必要すらなく**、自白を選ぶべきです。

このように、相手のどの戦略に対しても他のどの戦略より厳密に高い利得をもたらす戦

略を**（強）支配戦略**といいます。一般的には次のように定義されます。

$$u_i(s_i^*,\, s_{-i}) \;>\; u_i(s_i,\, s_{-i}) \qquad \text{すべての } s_i \neq s_i^* \text{ と、すべての } s_{-i} \text{ について} \tag{2.3}$$

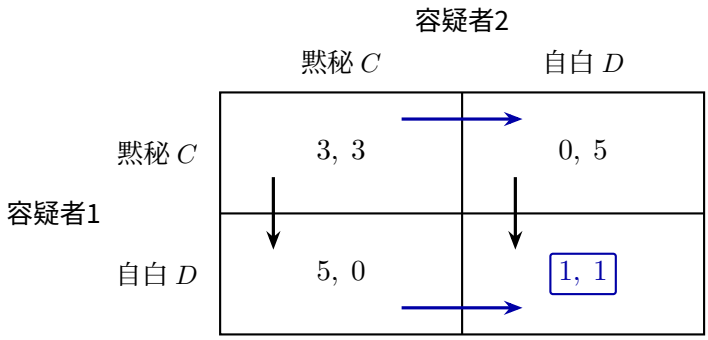
数式の読み方：支配戦略の定義

- 左辺 $u_i(s_i^*, s_{-i})$ は「i が s_i^* を選び、他の人たちが s_{-i} を選んだときの i の利得」です。
- 「すべての s_{-i} について」が肝心です。他の人がどんな組み合わせを選んでも、s_i^* が一番良い、という非常に強い条件です。
- 逆に、ある戦略 s_i' について $u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i'', s_{-i})$ がすべての s_{-i} で成り立つとき、s_i' は s_i'' に**強く支配される**といいます。合理的なプレイヤーは支配される戦略を選びません。

全員が支配戦略を持つとき、その組み合わせを**支配戦略均衡**と呼びます。囚人のジレンマは対称的なので、容疑者2にとっても自白が支配戦略です。したがって支配戦略均衡は (D, D) で、2人の利得は (P, P) です。

この推論を図にしたのが図2.2です。

図 2.2　囚人のジレンマの「移動の矢印」



利得は数値例 $T = 5, R = 3, P = 1, S = 0$。黒の縦矢印は容疑者1が、青の横矢印は容疑者2が、利得を増やすために移りたい方向を表す。

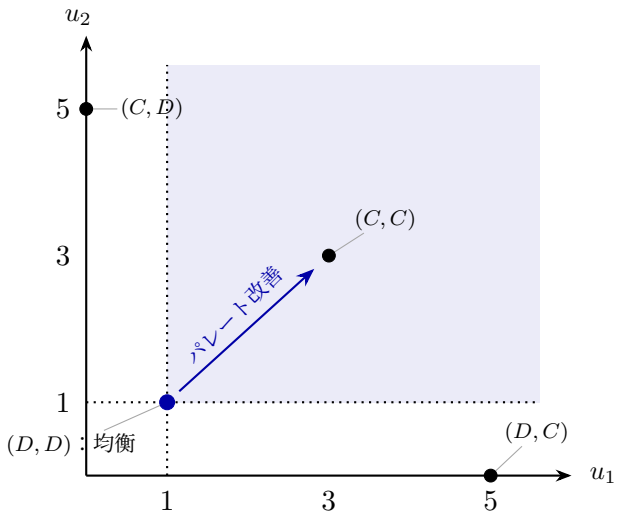
図の読み方

1. 黒い縦矢印は「容疑者2の選択（列）を固定したとき、容疑者1は上下どちらに移りたいか」を示します。どちらの列でも矢印は下（自白）を向いています。これが「自白は容疑者1の支配戦略」の図的な意味です。
2. 青い横矢印は、行を固定したときの容疑者2の移りたい方向です。どちらの行でも右（自白）を向いています。
3. すべての矢印が流れ込む右下のセル (D, D) が、行き着く先（均衡）です。そこから出ていく矢印は1本もありません。
4. 一方、左上の (C, C) からは矢印が2本とも出ていっています。2人とも「相手が黙秘するなら自分は自白したい」と考えるので、(C, C) は維持できません。

2.3 ジレンマの正体：個人の合理性と社会的な非効率

均衡 (D, D) の利得 (P, P) と、(C, C) の利得 (R, R) を比べると、$R > P$ なので2人とも (C, C) の方が良くなります。誰も損をせずに誰かが得をする変更を**パレート改善**と呼び、パレート改善の余地がない状態を**パレート効率的**と呼びます。囚人のジレンマの均衡は**パレート非効率**です。

図 2.3　利得の平面で見る囚人のジレンマ



利得は数値例 $T = 5, R = 3, P = 1, S = 0$。点は4つの戦略の組み合わせが生む利得の組 (u_1, u_2)。薄い青の領域は両者とも (D, D) より利得が高い範囲。

図の読み方

1. 横軸が容疑者1の利得、縦軸が容疑者2の利得です。4つのセルが4つの点に対応します。
2. 青い点 (D, D) が均衡です。点線で区切られた薄い青の領域は「2人とも均衡より得をする」範囲で、(C, C) はその中にあります。
3. 青い矢印が示すように、(D, D) から (C, C) へ移れば2人とも利得が増えます。それでも各自が合理的に選ぶと (D, D) に落ち着く、というのがジレンマです。

要点：囚人のジレンマの教訓

- 各自が自分にとって最善の選択をしても、その結果が全員にとって最善とは限りません。「見えざる手」が働かない典型例です。
- 2人が事前に「黙秘しよう」と約束しても、自白が支配戦略である以上、約束は守られません。拘束力のない約束は無力です。

経済学には、囚人のジレンマと同じ構造の状況が数多くあります。

- **カルテル**：各社が生産を抑えれば共同利潤は最大になりますが、各社には抜け駆けして増産する誘惑があります（第6章で詳しく扱います）。
- **公共財の自発的供給**：全員が費用を負担すれば全員が得をしますが、各自は他人の負担にただ乗りしたくなります。
- **軍拡競争・広告競争**：互いに控えれば双方が得なのに、相手が控えるなら自分は増やしたい、という構造です。

2.4 支配される戦略の逐次消去

囚人のジレンマでは全員が支配戦略を持っていましたが、そのようなゲームはむしろ例外です。それでも「合理的な人は支配される戦略を選ばない」という推論を**繰り返し**使うと、答えが絞れる場合があります。図2.4のゲームで確かめましょう。

図 2.4　支配される戦略の逐次消去

手順1：プレイヤー2の R は M に強く支配される

		プレイヤー2		
		L	M	R
プレイヤー1	U	1, 0	1, 2	0, 1
	D	0, 3	0, 1	2, 0

手順2：R が消えると、プレイヤー1の D は U に強く支配される

		プレイヤー2		
		L	M	R
プレイヤー1	U	1, 0	1, 2	0, 1
	D	0, 3	0, 1	2, 0

手順3：D が消えると、プレイヤー2の L は M に強く支配される

		プレイヤー2		
		L	M	R
プレイヤー1	U	1, 0	1, 2	0, 1
	D	0, 3	0, 1	2, 0

灰色は消去された戦略と、それに関わる利得。最後に残る (U, M) を青枠で示した。

図の読み方

1. 手順1：プレイヤー2の利得（各セルの右の数字）を列ごとに比べます。M の列は上から $(2,1)$、R の列は $(1,0)$ で、どちらの行でも M の方が大きいので、R は消えます。

2. 手順2：プレイヤー1は「2は合理的なので R を選ばない」と知っています。残った L, M の2列だけで比べると、U の利得 $(1,1)$ は D の利得 $(0,0)$ より常に大きいので、D は消えます。最初の表では R 列で D の方が良かった（$2 > 0$）ので、手順1を経て初めて消せることに注意してください。

3. 手順3：残った行 U だけで比べると、プレイヤー2は M（利得2）を L（利得0）より好むので、L が消えます。最後に (U, M) だけが残ります。

数式の読み方：逐次消去が要求する「知識の深さ」

- 手順1に必要なのは「プレイヤー2が合理的である」ことだけです。
- 手順2では「プレイヤー1が、2の合理性を**知っている**」ことが必要です。
- 手順3では「プレイヤー2が、『1が2の合理性を知っている』ことを知っている」ことが必要です。
- 消去の回数が増えるほど、合理性についての深い共有知識が必要になります。第1章で共有知識を前提にしたのはこのためです。

発展：弱支配と消去の順序

相手のすべての戦略で「以上」、少なくとも1つで「より大きい」となる場合を**弱支配**といいます。強支配される戦略の逐次消去は、消す順番によらず同じ結果になりますが、弱支配される戦略の逐次消去は、消す順番によって残る戦略が変わることがあります。そのため、弱支配による消去を使うときは注意が必要です。

補足：逐次消去で答えが出ないゲーム

多くのゲームでは、消去できる戦略がまったくありません。たとえば「2人でどこかで落ち合いたいが、行き先の好みが違う」という状況では、相手が A に行くなら自分も A、相手が B なら自分も B が良く、どの戦略も支配されません。このようなゲームを分析するには、次の章のナッシュ均衡が必要になります。

要点

- 戦略形ゲームは利得表で表し、各セルの左が行プレイヤー、右が列プレイヤーの利得です。
- 相手が何を選んでも最善となる戦略が支配戦略で、全員が支配戦略を選んだ組み合わせが支配戦略均衡です。
- 囚人のジレンマでは、支配戦略均衡 (D, D) がパレート非効率になります。個人の合理性と社会的な効率性は一致するとは限りません。
- 支配される戦略の逐次消去は答えを絞る強力な方法ですが、多くのゲームでは答えが1つに定まりません。

次の章へ　支配戦略がないゲームでも使える、より一般的な均衡概念がナッシュ均衡です。鍵になるのは「相手の戦略に対する最適反応」という考え方です。

大学院とのつながり　逐次消去で残る戦略は「合理化可能戦略」という概念と密接に関係しており、大学院では合理性と知識の関係を扱う分野として発展します。

第3章

ナッシュ均衡：最適反応の交わるところ

ここまでの流れ　第2章では、相手が何を選んでも最善となる支配戦略を学びました。しかし多くのゲームには支配戦略がなく、逐次消去でも答えが絞れません。
この章の問い　支配戦略がないゲームでも「均衡」と呼べる状態はあるのでしょうか。それはどのように見つければよいのでしょうか。
この章で分かること　最適反応とナッシュ均衡の定義、利得表での「下線法」、均衡が複数ある場合の考え方、そして連続的な戦略をもつクールノー複占での均衡の求め方が分かります。

3.1　最適反応：相手の戦略を所与としたときの最善

支配戦略は「相手が**何を**選んでも最善」という強い条件でした。この条件を弱めて、「相手が**これを**選ぶなら、自分はこれが最善」という対応を考えます。これを**最適反応**（best response）と呼びます。

$$BR_i(s_{-i}) \;=\; \arg\max_{s_i \in S_i} \; u_i(s_i,\, s_{-i}) \tag{3.1}$$

数式の読み方：最適反応の式

- $BR_i(s_{-i})$ は「他の人たちが s_{-i} を選ぶとき、プレイヤー i にとって最善の戦略」です。
- $\arg\max$ は「最大値そのもの」ではなく「最大値を実現する s_i」を返す記号です。最善の戦略が複数あるときは、その集合になります。
- 完全競争の企業が「価格 p を所与として」最適化したのと同じように、ここでは「相手の戦略 s_{-i} を所与として」最適化しています。最適反応は、相手の戦略を「価格」の代わりに置いた最適化問題の答えだと考えると分かりやすいでしょう。

3.2 ナッシュ均衡の定義

全員が「他の人たちの戦略に対する最適反応」を選んでいる戦略の組み合わせを**ナッシュ均衡**と呼びます。

$$s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*) \quad \text{すべてのプレイヤー } i \text{ について} \tag{3.2}$$

これは次のように書き換えられます。

$$u_i(s_i^*,\, s_{-i}^*) \;\geq\; u_i(s_i,\, s_{-i}^*) \quad \text{すべての } i \text{ と、すべての } s_i \in S_i \text{ について} \tag{3.3}$$

数式の読み方：ナッシュ均衡の条件

- 式(3.3)の左辺は「均衡の戦略どおりにしたときの i の利得」、右辺は「他の人が均衡どおりのまま、i だけが別の s_i に変えたときの利得」です。
- 不等式が「すべての s_i」で成り立つので、**自分ひとりだけ戦略を変えても得をしない**（一方的な逸脱の誘因がない）ことを意味します。
- 支配戦略の式(2.3)との違いに注目してください。支配戦略は「すべての s_{-i}」について最善でしたが、ナッシュ均衡では相手の戦略は均衡の s_{-i}^* に固定されています。条件がずっと弱いので、多くのゲームで均衡が見つかります。

ナッシュ均衡には、2つの自然な解釈があります。

- **自己拘束的な合意**：プレイヤーたちが事前に話し合って戦略の組を決めたとします。その組がナッシュ均衡なら、拘束力のない口約束でも、誰も自分から破る理由がありません。逆にナッシュ均衡でない組では、誰かが約束を破って得をします。
- **予想の整合性**：各自が相手の行動を予想し、その予想に最適反応しているとします。均衡では、全員の予想が実際の行動と一致しています。「予想が外れて後悔する人がいない」状態です。

3.3 利得表で均衡を見つける：下線法

2人の行き先の好みが違う「男女の争い」と呼ばれるゲームで、ナッシュ均衡を探してみましょう。2人は今夜、オペラ（O）かサッカー観戦（F）に出かけます。一緒に行けば楽しいのですが、プレイヤー1はオペラ、プレイヤー2はサッカーの方が好きです。別々になると2人とも楽しくありません。

下線法の手順は次のとおりです。

1. プレイヤー2の各列（相手の戦略）について、プレイヤー1の利得（左の数字）が最

大のものに下線を引きます。これがプレイヤー1の最適反応です。

2. プレイヤー1の各行について、プレイヤー2の利得（右の数字）が最大のものに下線を引きます。

3. 2つの数字の両方に下線が引かれたセルが、ナッシュ均衡です。

図 3.1　下線法で見つける男女の争いのナッシュ均衡

(a) 男女の争い

プレイヤー1 ＼ プレイヤー2	O	F
O	$\boxed{\underline{2},\ \underline{1}}$	$0,\ 0$
F	$0,\ 0$	$\boxed{\underline{1},\ \underline{2}}$

(b) 囚人のジレンマ

プレイヤー1 ＼ プレイヤー2	C	D
C	$3,\ 3$	$0,\ \underline{5}$
D	$\underline{5},\ 0$	$\boxed{\underline{1},\ \underline{1}}$

下線は各プレイヤーの最適反応。両方の数字に下線があるセル（青枠）がナッシュ均衡。(b) の利得は第2章の数値例。

図の読み方

1. (a) 列 O を見ると、プレイヤー1の利得は 2（行 O）と 0（行 F）なので、2 に下線を引きます。列 F では 0 と 1 なので 1 に下線です。プレイヤー1の最適反応は「相手と同じ場所に行く」ことです。

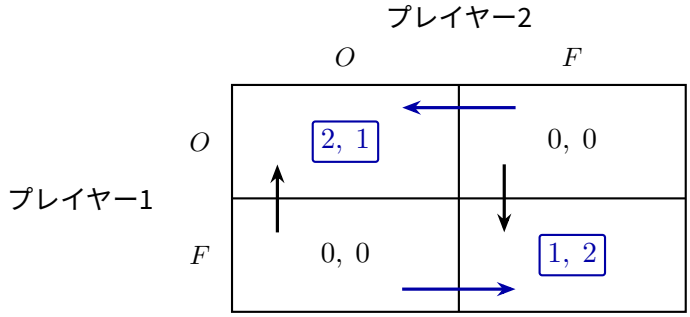
2. 同様に、プレイヤー2も「相手と同じ場所に行く」ことが最適反応です。

3. 両方に下線がつくのは (O, O) と (F, F) の2つです。このゲームには**ナッシュ均衡が2つ**あります。

4. (b) 囚人のジレンマでは下線法でも (D, D) だけが残ります。支配戦略均衡は、必ずナッシュ均衡でもあります（支配戦略は、相手が均衡の戦略を選ぶときにも当然最適反応だからです）。

第2章の「移動の矢印」で同じことを確かめると、図3.2のようになります。ナッシュ均衡は「矢印が出ていかないセル」です。

図 3.2　男女の争いの「移動の矢印」



黒の縦矢印はプレイヤー1の、青の横矢印はプレイヤー2の、利得が増える移動の方向。

図の読み方

1. 左下 (F,O) からは、プレイヤー1が上へ、プレイヤー2が右へ移りたがります。右上 (O,F) からも矢印が出ていきます。この2つは均衡ではありません。
2. 左上 (O,O) と右下 (F,F) には矢印が入ってくるだけで、出ていく矢印がありません。ここが2つのナッシュ均衡です。
3. 囚人のジレンマ（図2.2）と違って、矢印の流れ込む先が2か所に分かれています。これが「均衡が複数ある」ことの図的な意味です。

補足：均衡が複数あるとき

均衡が複数あると、ナッシュ均衡の概念だけでは「どれが実現するか」は決まりません。現実には、慣習や文化、事前のコミュニケーション、目立つ選択肢（シェリングが指摘した**フォーカル・ポイント**）が均衡を選ぶ役割を果たすと考えられています。また、男女の争いには、第4章で学ぶ「確率的に選ぶ」均衡がもう1つあります。

3.4　連続的な戦略：クールノー複占

ここまでは戦略が2つか3つでしたが、生産量や価格のように戦略が連続的な場合も、ナッシュ均衡の考え方はそのまま使えます。この場合は利得表の代わりに、微分で最適反応を求めます。

設定　同質財を生産する企業1と企業2が、生産量 q_1, q_2 を同時に選びます。逆需要関数と費用は次のとおりです。

$$P = a - b\,(q_1 + q_2), \qquad C_i(q_i) = c\,q_i \qquad (a > c \geq 0,\ b > 0) \tag{3.4}$$

最適反応の導出　企業1の利潤は次のように書けます。

$$
\begin{aligned}
\pi_1(q_1, q_2) &= P\,q_1 - c\,q_1 \\
&= \bigl[a - b(q_1 + q_2)\bigr] q_1 - c\,q_1 && \text{（逆需要関数を代入）} \\
&= (a - c - b\,q_2)\,q_1 - b\,q_1^2 && \text{（}q_1\text{ について整理）}
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

q_2 を所与として q_1 で微分し、ゼロとおきます。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= a - c - b\,q_2 - 2b\,q_1 = 0 && \text{（1階条件）} \\
q_1 &= \frac{a - c - b\,q_2}{2b} \;\equiv\; BR_1(q_2) && \text{（}q_1\text{ について解く）}
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

企業2についても対称的に $BR_2(q_1) = (a - c - b\,q_1)/(2b)$ が得られます。

数式の読み方：クールノーの最適反応関数

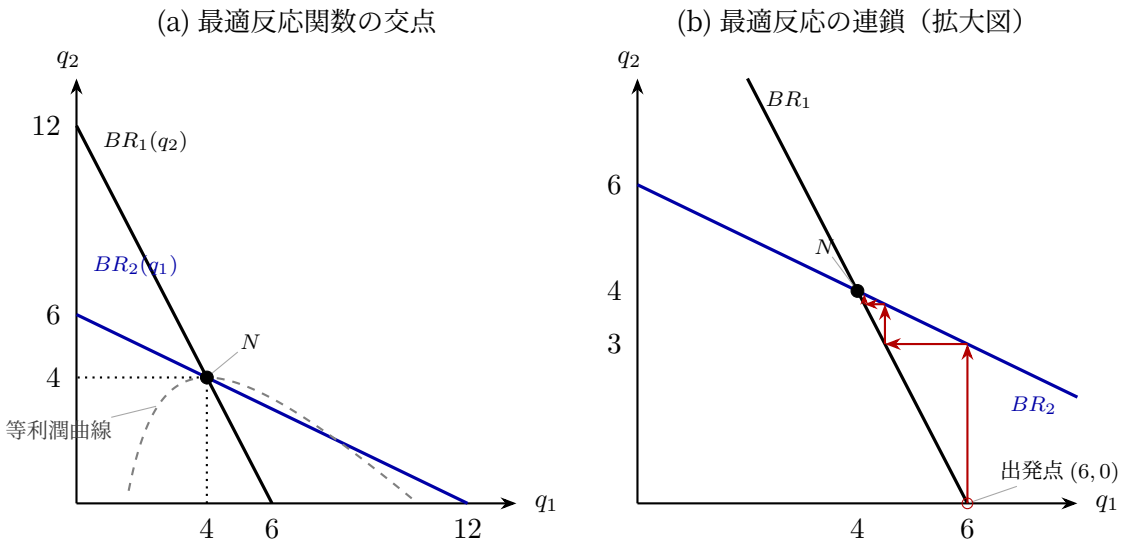
- 1階条件の $a - c - bq_2 - 2bq_1$ は「1単位増産したときの利潤の増加分」、つまり限界収入 $a - bq_2 - 2bq_1$ から限界費用 c を引いたものです。
- 式(3.6)は、相手の生産量 q_2 が増えると自分の最適な生産量 q_1 が減ることを示します（傾きは $-1/2$）。相手が多く作るほど価格が下がり、自分が増産する旨味が減るからです。
- 相手が何も作らない（$q_2 = 0$）なら、$q_1 = (a - c)/(2b)$ は独占企業の生産量と一致します。

ナッシュ均衡　均衡では、両社が互いに最適反応しているので、2つの最適反応関数を同時に満たします。対称性から $q_1^* = q_2^* = q^*$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
q^* &= \frac{a - c - b\,q^*}{2b} && \text{（式(3.6)に }q_1 = q_2 = q^*\text{ を代入）} \\
2b\,q^* + b\,q^* &= a - c && \text{（両辺に }2b\text{ を掛けて移項）} \\
q^* &= \frac{a - c}{3b} && \text{（}q^*\text{ について解く）}
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

となります。総生産量は $Q^* = 2(a - c)/(3b)$、価格は $P^* = (a + 2c)/3$ です。

図 3.3　クールノー複占の最適反応関数とナッシュ均衡



$a-c=12$, $b=1$ として描いた。$BR_1:\ q_1=(12-q_2)/2$（黒），$BR_2:\ q_2=(12-q_1)/2$（青），交点 $N=(4,4)$。灰色の破線は企業1の利潤が 16 となる等利潤曲線 $q_2=12-q_1-16/q_1$。(b) の赤い矢印は $q_2=0$ から出発して交互に最適反応をとった経路 $(6,0)\to(6,3)\to(4.5,3)\to(4.5,3.75)\to\cdots$。

図の読み方

1. (a) 横軸が企業1、縦軸が企業2の生産量です。黒い直線が企業1の最適反応 $BR_1(q_2)$ で、「q_2 の高さを決めたとき、企業1はどの q_1 を選ぶか」を表します。青い直線が企業2の最適反応です。

2. 2本の直線の交点 $N=(4,4)$ では、両社が同時に相手に最適反応しています。これがクールノー＝ナッシュ均衡です。式(3.7)の $q^*=(a-c)/(3b)=12/3=4$ と一致します。

3. 灰色の破線は、企業1の利潤が一定になる (q_1,q_2) の組（等利潤曲線）です。下にある曲線ほど（相手の生産が少ないほど）企業1の利潤は大きくなります。$q_2=4$ の水平線上で企業1が最も低い等利潤曲線に届くのは、曲線の頂点 $q_1=4$ です。最適反応関数は、各等利潤曲線の頂点を結んだ線になっています。

4. (b) 企業2が 0 を作るなら企業1は 6（独占量）を作り、それを見た企業2は 3、それを見た企業1は 4.5……と交互に最適反応すると、経路は階段状に N へ近づきます。ナッシュ均衡は、この調整が止まる「休止点」とも解釈できます。

計算例：独占・クールノー・完全競争の比較

$a-c=12$, $b=1$ のとき、総生産量と1社あたりの利潤を比べます。

- 独占：$Q=(a-c)/(2b)=6$，価格 $P=c+6$，利潤 36。
- クールノー複占：$Q^*=8$（各社4），価格 $P^*=c+4$，各社の利潤 $(P^*-c)\,q^*=4\times 4=16$。
- 完全競争：$P=c$ より $Q=(a-c)/b=12$，利潤 0。

複占の総生産量は独占と完全競争の間に来ます。2社が協調して独占量6を3ずつ分ければ各社の利潤は $18>16$ ですが、相手が3を作るとき自社の最適反応は $BR_1(3)=4.5$ なので、協調は自己拘束的ではありません。これは囚人のジレンマと同じ構造で、第6章でカルテルとして再登場します。

発展：企業数を増やすと完全競争に近づく

n 社のクールノー競争では、同様の計算で各社の均衡生産量は $q^*=(a-c)/\big((n+1)b\big)$、総生産量は $Q^*=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{a-c}{b}$ となります。$n\to\infty$ とすると $Q^*\to(a-c)/b$、つまり完全競争の生産量に近づきます。価格受容者の世界は、「企業数が非常に多いゲーム」の極限として理解できるのです。

補足：ベルトラン競争（価格競争）

企業が生産量ではなく価格を同時に選び、安い方の企業が需要をすべて得る（同価格なら折半）とします。限界費用が c で等しいとき、相手の価格が c より高ければ、それをわずかに下回る価格をつけるのが得なので、値下げ競争が続きます。ナッシュ均衡は $p_1^*=p_2^*=c$ で、2社しかいないのに利潤はゼロになります（**ベルトラン・パラドックス**）。何を戦略とするかで結論が大きく変わることに注意しましょう。

要点

- 最適反応は「相手の戦略を所与としたときの最善の戦略」であり、ナッシュ均衡は全員が互いに最適反応している戦略の組です。
- ナッシュ均衡では、誰も一方的に戦略を変えて得をすることができません。自己拘束的な合意、あるいは予想が整合的な状態と解釈できます。
- 利得表では下線法で、連続的な戦略では最適反応関数の交点として、均衡を求めます。
- 均衡は複数存在することがあり、また囚人のジレンマやクールノー競争のように、均衡が全員にとって最善とは限りません。

次の章へ　「じゃんけん」のように、下線法で両方に下線がつくセルが1つもないゲームがあります。このようなゲームでも、戦略を確率的に選ぶことを許せば、ナッシュ均衡が必ず存在します。

大学院とのつながり　大学院では、最適反応を「対応（集合値の関数）」として扱い、不動点定理を使って均衡の存在を一般的に証明します。

第4章

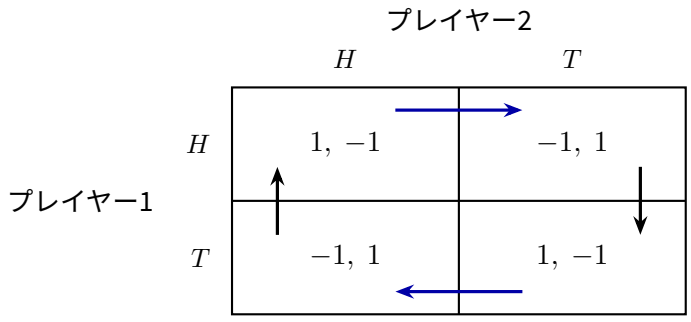
混合戦略ナッシュ均衡：確率的に選ぶという戦略

ここまでの流れ　第3章では、全員が互いに最適反応している状態としてナッシュ均衡を定義し、下線法や最適反応関数の交点として求めました。
この章の問い　サッカーのPK戦のように「相手に読まれたら負け」のゲームでは、下線法で均衡が見つかりません。このようなゲームに均衡はないのでしょうか。
この章で分かること　混合戦略と期待利得、均衡の確率を求める「無差別の原理」、最適反応対応のグラフによる均衡の図示、そしてナッシュ均衡の存在定理が分かります。

4.1　純粋戦略の均衡がないゲーム：マッチング・ペニー

2人が同時に硬貨の表（H）か裏（T）を見せます。表裏が一致すればプレイヤー1が、一致しなければプレイヤー2が、相手から1円もらいます。PK戦で「キッカーは読まれたくない、キーパーは読みたい」状況や、抜き打ち検査で「検査する側とされる側」の関係と同じ構造です。

図 4.1　マッチング・ペニーの利得と「移動の矢印」



黒の縦矢印はプレイヤー1の、青の横矢印はプレイヤー2の、利得が増える移動の方向。

図の読み方

1. 左上 (H, H) ではプレイヤー2が負けているので、右の (H, T) へ移りたがります。そこではプレイヤー1が負けているので下の (T, T) へ、次はプレイヤー2が左の (T, H) へ、さらにプレイヤー1が上の (H, H) へ……と、矢印は**ぐるぐる回り続けます**。
2. どのセルからも矢印が出ていくので、純粋戦略（確定的に1つを選ぶ戦略）のナッシュ均衡は存在しません。
3. 「相手に読まれたら負け」のゲームでは、自分の行動を相手に予測させないことが重要になります。そこで「確率的に選ぶ」ことを戦略として認めます。

4.2 混合戦略と期待利得

戦略を確率的に選ぶことを**混合戦略**と呼び、これまでの確定的な戦略を**純粋戦略**と呼びます。マッチング・ペニーでは、

- プレイヤー1は確率 p で H、確率 $1-p$ で T を選ぶ,
- プレイヤー2は確率 q で H、確率 $1-q$ で T を選ぶ,

とします。$p=1$ や $p=0$ は純粋戦略にあたるので、混合戦略は純粋戦略を含む広い概念です。

相手が混合戦略をとると、自分の利得は確率的に決まります。そこで各プレイヤーは**期待利得**を最大化すると考えます。プレイヤー1が純粋戦略 H と T を選んだときの期待利得は、

$$EU_1(H) = q \cdot 1 + (1-q) \cdot (-1) = 2q - 1 \tag{4.1}$$

$$EU_1(T) = q \cdot (-1) + (1-q) \cdot 1 = 1 - 2q \tag{4.2}$$

です。プレイヤー1自身が確率 p で混ぜるときの期待利得は、それらの加重平均になります。

$$EU_1(p, q) = p\,(2q-1) + (1-p)\,(1-2q) \tag{4.3}$$

数式の読み方：期待利得の読み方

- 式(4.1)は「プレイヤー1が H を出したとき、確率 q で一致して $+1$、確率 $1-q$ で不一致で -1」の平均です。
- 式(4.3)は p について**1次式**（直線）です。したがって EU_1 を最大にする p は、$2q-1$ と $1-2q$ の大小で決まります。H の方が有利なら $p=1$、T の方が有利なら $p=0$、**両者が等しいときだけ**、どんな p も最適になります。
- この最後の性質が、次の節の「無差別の原理」の根拠です。

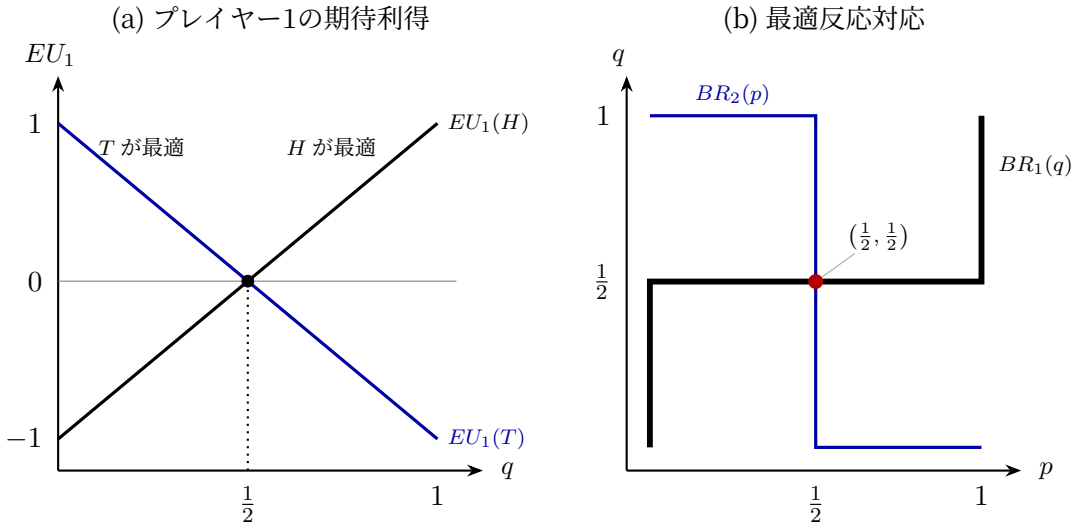
4.3 無差別の原理と最適反応対応

プレイヤー1が H と T を本当に「混ぜる」のは、H と T の期待利得が等しいときだけです。

$$EU_1(H) = EU_1(T) \quad \Longleftrightarrow \quad 2q-1 = 1-2q \quad \Longleftrightarrow \quad q = \tfrac{1}{2} \tag{4.4}$$

同様に、プレイヤー2が混ぜるのは $EU_2(H) = 1-2p$ と $EU_2(T) = 2p-1$ が等しいとき、つまり $p = 1/2$ のときです。

図 4.2　マッチング・ペニーの期待利得と最適反応対応



(a) は式(4.1)・(4.2)の $EU_1(H) = 2q-1$（黒），$EU_1(T) = 1-2q$（青）。(b) の黒線はプレイヤー1の最適反応（$q < \frac{1}{2}$ なら $p=0$，$q=\frac{1}{2}$ なら $p \in [0,1]$，$q > \frac{1}{2}$ なら $p=1$），青線はプレイヤー2の最適反応（$p < \frac{1}{2}$ なら $q=1$，$p=\frac{1}{2}$ なら $q \in [0,1]$，$p > \frac{1}{2}$ なら $q=0$）。(b) は軸と重ならないよう、両軸を原点から少し離して描いた。

図の読み方

1. (a) 横軸はプレイヤー2が H を出す確率 q です。$q < 1/2$ では青線（T の期待利得）が上にあるので T が最適、$q > 1/2$ では黒線（H）が上にあるので H が最適です。2本の直線が交わる $q = 1/2$ でだけ、H と T が無差別になります。

2. (b) 横軸がプレイヤー1の確率 p、縦軸がプレイヤー2の確率 q です。黒線はプレイヤー1の最適反応で、(a) の結果を「q の高さごとに最適な p」として描いたものです。$q = 1/2$ の高さでは p が0から1のどれでもよいので、水平な線分になります。

3. 青線はプレイヤー2の最適反応です。プレイヤー2は「不一致」を望むので、p が小さい（1が T を出しがち）なら H（$q = 1$）、p が大きいなら T（$q = 0$）を選びます。

4. 2つの最適反応が交わる点 $(p, q) = (1/2, 1/2)$ が、混合戦略ナッシュ均衡です。交点はこの1つだけです。

最適反応が「関数」ではなく、ある点で線分（集合）になることから、混合戦略を扱うときは**最適反応対応**と呼びます。均衡の定義そのものは第3章と同じで、

$$p^* \in BR_1(q^*), \qquad q^* \in BR_2(p^*) \tag{4.5}$$

を満たす (p^*, q^*) が混合戦略ナッシュ均衡です。

要点：無差別の原理

- 混合戦略ナッシュ均衡で正の確率で使われる純粋戦略は、すべて同じ期待利得をもたらします（そうでなければ、期待利得の低い戦略の確率を下げて得ができるからです）。
- そのため、**各プレイヤーの確率は「相手を無差別にする」ように決まります。**マッチング・ペニーでは、プレイヤー2の $q = 1/2$ はプレイヤー1を無差別にする値として求まりました。

補足：「自分の確率は相手の利得で決まる」

無差別の原理から、意外な結論が導かれます。プレイヤー1の均衡確率 p^* は、**プレイヤー2の利得**を無差別にする条件から決まるので、プレイヤー1自身の利得が変わっても p^* は変わりません。たとえば、マッチング・ペニーで (H,H) のときのプレイヤー1の利得だけを 1 から 3 に増やしても、プレイヤー1が H を出す確率は $1/2$ のままで、変わるのはプレイヤー2の確率 q^* の方です（$3q-(1-q)=-q+(1-q)$ より $q^*=1/3$）。

4.4 男女の争いの混合戦略均衡

第3章の男女の争いには、純粋戦略の均衡 (O,O) と (F,F) がありました。混合戦略まで含めると、均衡はもう1つ見つかります。プレイヤー1が O を選ぶ確率を p、プレイヤー2が O を選ぶ確率を q とします。

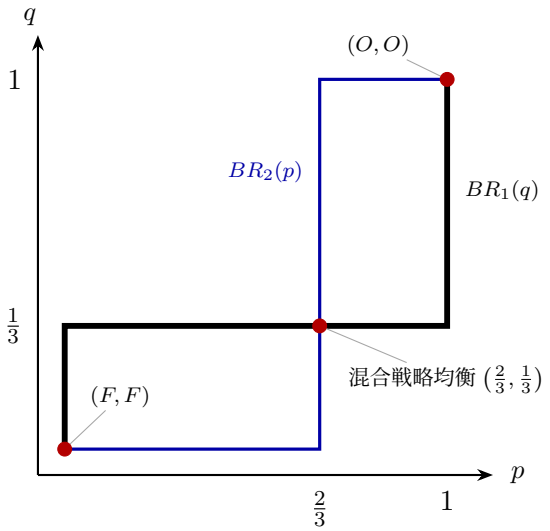
プレイヤー1を無差別にする q

$$
\begin{aligned}
EU_1(O) &= q\cdot 2+(1-q)\cdot 0 = 2q && \text{（}O\text{ を選んだときの期待利得）}\\
EU_1(F) &= q\cdot 0+(1-q)\cdot 1 = 1-q && \text{（}F\text{ を選んだときの期待利得）}\\
2q &= 1-q \implies q^*=\tfrac{1}{3} && \text{（両者を等しくおく）}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

プレイヤー2を無差別にする p

$$
\begin{aligned}
EU_2(O) &= p\cdot 1+(1-p)\cdot 0 = p && \text{（}O\text{ を選んだときの期待利得）}\\
EU_2(F) &= p\cdot 0+(1-p)\cdot 2 = 2(1-p) && \text{（}F\text{ を選んだときの期待利得）}\\
p &= 2(1-p) \implies p^*=\tfrac{2}{3} && \text{（両者を等しくおく）}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

図 4.3　男女の争いの最適反応対応と3つのナッシュ均衡



利得は図3.1 (a)。軸と重ならないよう、両軸を原点から少し離して描いた。黒線はプレイヤー1の最適反応（$q < \frac{1}{3}$ なら $p = 0$，$q > \frac{1}{3}$ なら $p = 1$），青線はプレイヤー2の最適反応（$p < \frac{2}{3}$ なら $q = 0$，$p > \frac{2}{3}$ なら $q = 1$）。

図の読み方

1. 黒線（プレイヤー1の最適反応）は、q が 1/3 を超えると $p = 1$（オペラ）に跳ね上がります。相手がオペラに来る確率がある程度高ければ、自分もオペラに行くのが得だからです。

2. 青線（プレイヤー2の最適反応）は、p が 2/3 を超えると $q = 1$ に跳ね上がります。

3. 2つの最適反応は3か所で交わります。左下 $(0, 0)$ が (F, F)、右上 $(1, 1)$ が (O, O) の純粋戦略均衡で、中間の $(2/3,\ 1/3)$ が混合戦略均衡です。

4. マッチング・ペニーの図4.2 (b) では交点が1つでしたが、ここでは3つです。最適反応対応のグラフを描けば、純粋戦略の均衡も混合戦略の均衡も、まとめて見つけられます。

計算例：混合戦略均衡での利得

均衡 $(p^*, q^*) = (2/3,\ 1/3)$ では、プレイヤー1の期待利得は $EU_1(O) = 2q^* = 2/3$、プレイヤー2の期待利得は $EU_2(O) = p^* = 2/3$ です。2人が別々の場所に行ってしまう確率は $p^*(1 - q^*) + (1 - p^*)q^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$ で、半分以上の確率で落ち合えません。2人とも、どちらの純粋戦略均衡（利得は1以上）よりも低い利得しか得られません。

4.5 ナッシュ均衡は必ず存在する

マッチング・ペニーには純粋戦略の均衡がありませんでしたが、混合戦略まで認めると均衡が見つかりました。これは偶然ではありません。

要点：ナッシュの存在定理

・プレイヤーの数も、各プレイヤーの純粋戦略の数も有限であるゲームには、混合戦略まで含めると、少なくとも1つのナッシュ均衡が存在します。

発展：存在定理の証明のアイデア

全員の最適反応をまとめた対応 $BR(\sigma) = \big(BR_1(\sigma_{-1}), \ldots, BR_n(\sigma_{-n})\big)$ を考えます。ナッシュ均衡とは $\sigma^* \in BR(\sigma^*)$ となる点、つまりこの対応の**不動点**です。混合戦略の集合は凸でコンパクトであり、期待利得が自分の確率について1次式であることから、最適反応の集合は凸で、グラフは閉じています。これらの条件のもとで角谷の不動点定理を使うと、不動点が存在することが示せます。図4.2 (b) で最適反応が $q = 1/2$ で「垂直・水平な線分」になっていたことが、グラフが途切れずにつながる（閉じている）ための鍵です。

補足：混合戦略はどう解釈すればよいか

「人は本当にサイコロを振って行動を決めるのか」という疑問はもっともです。代表的な解釈は2つあります。1つは、混合戦略を**相手から見た予想**と読む解釈です。プレイヤー2の $q^* = 1/3$ は「プレイヤー1が抱く、2の行動についての予想」で、2自身は純粋戦略を選んでいてもよい、と考えます。もう1つは**集団の割合**としての解釈で、多くの人の中で $1/3$ の人が O を選ぶ状態とみなします。さらに、ハルサニは、利得にわずかな私的情報があるゲームの純粋戦略の均衡を考えると、その極限として混合戦略均衡が現れることを示しました（第7章の不完備情報ゲームにつながる考え方です）。

要点

- 混合戦略は純粋戦略を確率的に選ぶ戦略であり、プレイヤーは期待利得を最大化します。
- 混合戦略均衡では、正の確率で使う純粋戦略の期待利得がすべて等しくなります（無差別の原理）。各プレイヤーの確率は、相手を無差別にするように決まります。
- 最適反応対応のグラフの交点として、純粋戦略・混合戦略の均衡をまとめて求められます。
- 有限のゲームには、混合戦略を含めれば必ずナッシュ均衡が存在します。

次の章へ　ここまでは全員が同時に選ぶゲームでした。次の章では、先に動く人と後から動く人がいるゲームを扱います。そこでは、ナッシュ均衡の中に「信用できない脅し」に支えられた不自然な均衡が紛れ込むことが分かります。

大学院とのつながり　大学院では、混合戦略を確率分布の集合（単体）上の点として扱い、ゼロ和ゲームのミニマックス定理や、相関均衡などの関連概念も学びます。

第5章

展開形ゲームと部分ゲーム完全均衡

> **ここまでの流れ**　第2〜4章では、全員が同時に1回だけ選ぶゲームを、利得表や最適反応関数を使って分析しました。
> **この章の問い**　先に動く人と後から動く人がいるとき、後の人の「脅し」は先の人の行動を変えられるでしょうか。そして、すべてのナッシュ均衡は同じくらいもっともらしいのでしょうか。
> **この章で分かること**　ゲームの木による展開形の表し方、展開形での「戦略」の意味、信用できない脅しの問題、後ろ向き帰納法、情報集合と部分ゲーム、部分ゲーム完全均衡、シュタッケルベルク競争が分かります。

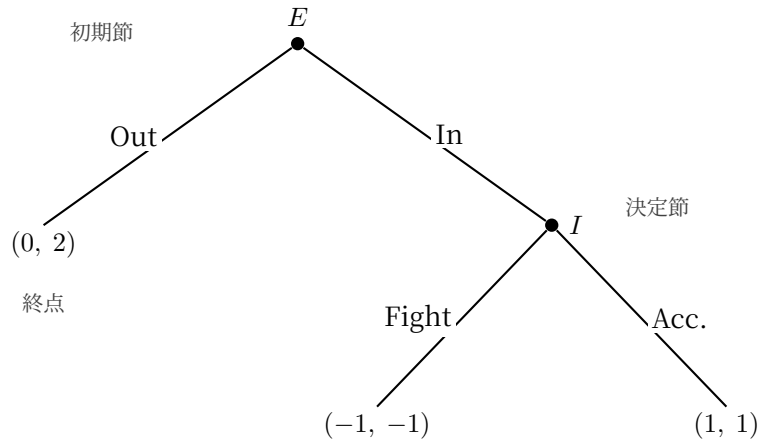
5.1　ゲームの木：参入ゲーム

ある市場を独占している既存企業（I）に対して、新規企業（E）が参入を検討しています。

1. まず E が「参入しない（Out）」か「参入する（In）」かを選びます。参入しなければ E の利得は 0、I は独占利潤 2 を得ます。
2. E が参入したら、それを見た I が「価格競争で戦う（Fight）」か「受け入れて共存する（Accommodate）」かを選びます。戦えば両社とも -1、共存すれば両社とも 1 です。

このように手番の順序があるゲームは、**ゲームの木**で表すと分かりやすくなります（図5.1）。

図 5.1　参入ゲームのゲームの木



利得は（E の利得, I の利得）の順。

図の読み方

1. 黒い点は**決定節**（誰かが選択をする場所）で、横に書かれた E, I がその場所で選ぶプレイヤーです。一番上の決定節を**初期節**と呼び、ゲームはここから始まります。
2. 決定節から出る線（枝）は、その場所で選べる行動です。枝をたどって下へ進むと、最後に**終点**に着きます。
3. 終点に書かれた数字の組が、そこに至ったときの利得です。たとえば E が In、I が Fight を選ぶと、右下の手前の終点に着き、利得は $(-1, -1)$ です。
4. このように、手番の順序、各手番で選べる行動、結果の利得を木の形で表したものを**展開形ゲーム**と呼びます。

5.2　展開形ゲームの戦略と戦略形への変換

展開形ゲームの**戦略**とは、「自分が選ぶ可能性のある**すべての**決定節で、何を選ぶか」を事前に決めた**完全な行動計画**です。I の戦略は「もし参入されたら Fight」か「もし参入されたら Acc.」のどちらかです。E が参入しないなら I の出番は実際には来ませんが、それでも「来たらどうするか」まで決めておくのが戦略です。

戦略が決まれば、展開形ゲームを利得表（戦略形）に書き直せます（図5.2）。

図 5.2　参入ゲームを戦略形に直した利得表

		既存企業 I: Fight	既存企業 I: Acc.
新規企業 E	Out	$\underline{0}$, $\underline{2}$	0, $\underline{2}$
	In	-1, -1	$\underline{1}$, $\underline{1}$

下線は各プレイヤーの最適反応。青枠がナッシュ均衡。E が Out を選ぶと I の選択にかかわらず利得は $(0, 2)$ になる。

図の読み方

1. 上の行（Out）では、I がどちらを選んでも実際には I の出番がないので、利得は同じ $(0, 2)$ です。I にとって Fight と Acc. は無差別なので、両方に下線がつきます。
2. 下の行（In）では、I は Acc.（利得1）を Fight（利得 -1）より好みます。
3. 両方に下線がつくのは、(Out, Fight) と (In, Acc.) の2つです。この展開形ゲームには**ナッシュ均衡が2つ**あります。

5.3　信用できない脅し

2つの均衡は、どちらも同じくらいもっともらしいでしょうか。

均衡 (Out, Fight) は、I が「参入したら戦うぞ」と脅し、E がそれを信じて参入をあきらめている状態です。E が参入しない限り I の脅しは実行されないので、Fight を選ぶことに I の費用はかかりません。戦略形で見る限り、確かにナッシュ均衡の条件は満たされています。

しかし、もし本当に E が参入してきたらどうなるでしょうか。その時点で I が選べるのは Fight（利得 -1）か Acc.（利得 1）です。合理的な I は Acc. を選びます。つまり「参入したら戦う」という脅しは、いざその場面になったら実行されない、**信用できない脅し**です。E がこのことを見抜けば、参入するはずです。

要点：ナッシュ均衡の弱点

- ナッシュ均衡は、実際には到達しない決定節（**均衡経路外**）での行動の合理性をチェックしません。
- そのため動学的なゲームでは、信用できない脅しに支えられた不自然な均衡が含まれてしまいます。この均衡を排除するのが、後ろ向き帰納法と部分ゲーム完全均衡です。

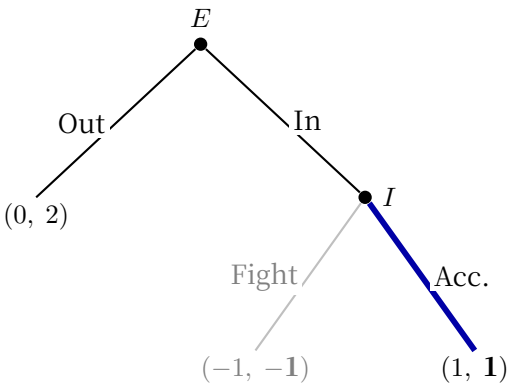
5.4 後ろ向き帰納法

信用できない脅しを排除するには、**ゲームの最後から逆向きに**解けばよいのです。これを**後ろ向き帰納法**（backward induction）と呼びます。

1. 最後の決定節で、そこで動くプレイヤーの最善の行動を決める。
2. その行動を前提として、1つ前の決定節で最善の行動を決める。
3. 初期節に着くまで繰り返す。

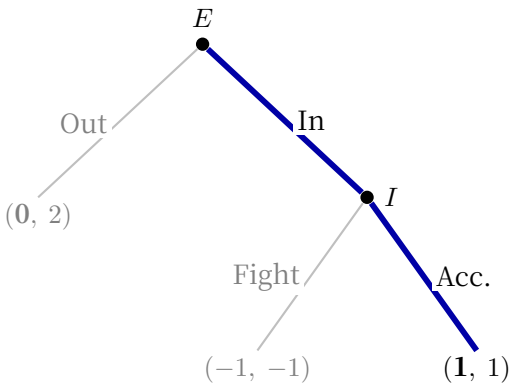
図 5.3　後ろ向き帰納法で参入ゲームを解く

(a) 手順1：最後の手番



I は $1 > -1$ なので Acc. を選ぶ

(b) 手順2：1つ前の手番



E は In なら 1，Out なら 0 と予想し In を選ぶ

青い太線が各決定節で選ばれる行動。灰色は選ばれない行動と、比較に使わない終点。太字は各手順で比較する利得。

図の読み方

1. (a) 最後の手番は I です。I の利得（右の数字）を比べると、Acc. の 1 が Fight の -1 より大きいので、Acc. の枝を青くします。
2. (b) 1つ前の手番は E です。E は「参入すれば I は Acc. を選ぶ」と予想できるので、In の先にある利得は $(1,1)$ だと分かります。Out の 0 と In の 1 を比べ、In を選びます。
3. 初期節から青い枝をたどると、実際に起こる結果（**均衡経路**）は「E が参入し、I が共存する」で、利得は $(1,1)$ です。
4. 後ろ向き帰納法で得られる戦略の組 (In, Acc.) は、図5.2の2つのナッシュ均衡のうちの1つです。信用できない脅しに支えられた (Out, Fight) は排除されました。

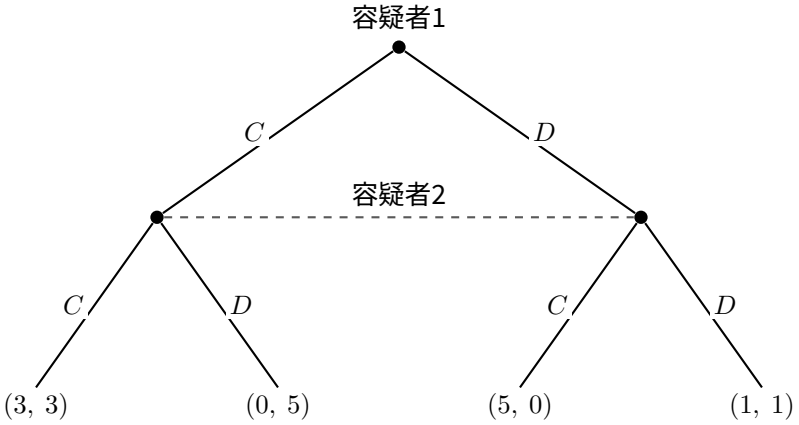
補足：脅しを信用させるには

既存企業が脅しを信用させたいなら、「参入されたら戦わざるをえない」状況を事前に作る必要があります。たとえば大きな生産設備を先に建てておくと、参入後に増産して戦うことの費用が下がり、Fight が最適になることがあります。このように、自分の選択肢を事前に狭めたり費用を変えたりして相手の行動を変えることを**コミットメント**と呼びます。

5.5 情報集合：相手の行動が見えないとき

これまでの木では、後から動く人は先の人の行動を見てから選んでいました。しかし、相手の行動を見ずに選ぶ場合もあります。そのとき「自分がどの決定節にいるか分からない」ことを表すのが**情報集合**です。

図 5.4　囚人のジレンマを展開形で表す：情報集合



利得は第2章の数値例（容疑者1, 容疑者2）。破線で結ばれた2つの決定節が、容疑者2の1つの情報集合。

図の読み方

1. 木の上では容疑者1が先に選んでいるように見えますが、2つの決定節が**破線**で結ばれています。これは「容疑者2は、自分が左右どちらの決定節にいるか区別できない」ことを表します。
2. 容疑者1の行動が見えないので、容疑者2は左右で違う行動をとることはできません。同じ情報集合では、選べる行動も選ぶ行動も同じです。
3. このように、情報集合を使うと「同時に選ぶ」ゲームも木で表せます。戦略は「各**情報集合**で何を選ぶか」の完全な計画と言い直せます。
4. どの情報集合も決定節を1つしか含まないゲームを**完全情報ゲーム**と呼びます。参入ゲームは完全情報ゲーム、この図は完全情報ではないゲームです。

5.6　部分ゲームと部分ゲーム完全均衡

情報集合があると、後ろ向き帰納法をそのまま使えません。図5.4の容疑者2は、どちらの決定節にいるか分からないので、「最後の決定節で最善の行動」を1つの決定節ごとに決められないからです。そこで、後ろ向き帰納法の考え方を一般化します。

部分ゲームとは、ゲームの木のうち、次の条件を満たす部分です。

- 1つの決定節から始まり、その決定節だけで1つの情報集合になっている（つまり、そこで動く人は自分がどこにいるか分かっている）。
- その決定節より後のすべての節を含む。
- どの情報集合も切り離さない（情報集合の一部だけを含むことはない）。

ゲーム全体も1つの部分ゲームです。そして、戦略の組 s^* が次の条件を満たすとき、s^* を**部分ゲーム完全均衡**と呼びます（ゼルテンによる概念です）。

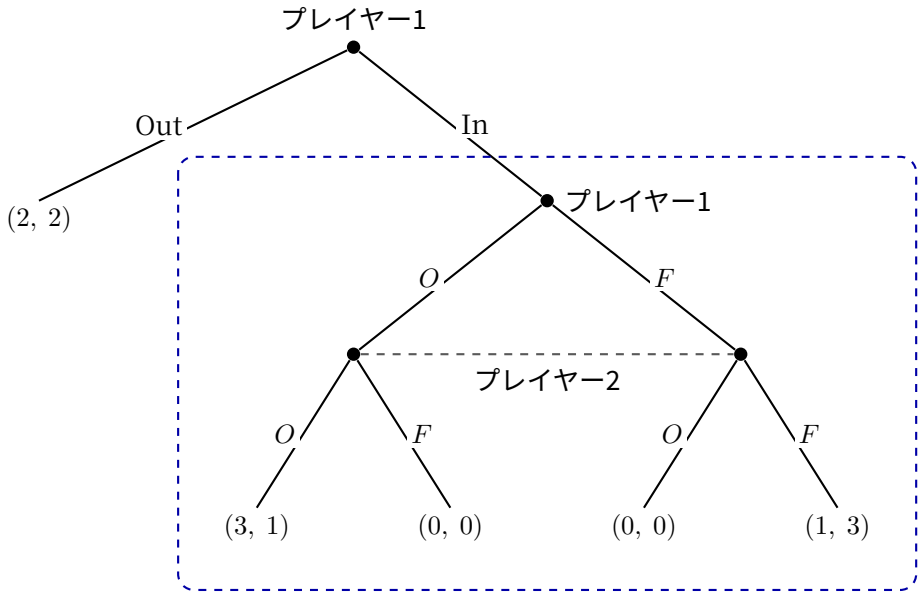
s^* を部分ゲームに制限したものが、**すべての**部分ゲームでナッシュ均衡になる　(5.1)

数式の読み方：部分ゲーム完全均衡の定義

- 「すべての部分ゲームで」が重要です。実際には到達しない部分ゲーム（均衡経路外）でも、そこでの行動がナッシュ均衡になっていなければなりません。これが信用できない脅しを排除します。
- 参入ゲームの部分ゲームは「ゲーム全体」と「I の決定節から始まる部分」の2つです。後者で I が Fight を選ぶのはナッシュ均衡（この場合は単なる最適化）ではないので、(Out, Fight) は部分ゲーム完全均衡ではありません。
- 完全情報の有限ゲームでは、後ろ向き帰納法の答えと部分ゲーム完全均衡は一致します。

情報集合を含むゲームでは、「後ろの部分ゲームのナッシュ均衡を求め、その利得で部分ゲームを置き換えて前に戻る」という手順で解きます。図5.5の例で確かめましょう。プレイヤー1はまず外部の選択肢（Out，利得 $(2,2)$）を取るか、プレイヤー2との同時手番のゲーム（In）に入るかを選びます。

図 5.5　同時手番の部分ゲームを含むゲーム



利得は（プレイヤー1, プレイヤー2）の順。青い破線の枠が、In の後に始まる部分ゲーム。

図の読み方

1. In の後では、プレイヤー1が O か F を選び、プレイヤー2はそれを見ずに O か F を選びます（破線の情報集合）。この部分は第3章の男女の争いと同じ形の同時手番ゲームです。

2. 青い枠の部分ゲームは、プレイヤー1の決定節から始まり、情報集合を切らずに後ろをすべて含むので、部分ゲームの条件を満たします。一方、プレイヤー2の決定節の片方だけから始まる部分は、情報集合を切ってしまうので部分ゲームではありません。

3. 手順1：部分ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡は (O,O)（利得 $(3,1)$）と (F,F)（利得 $(1,3)$）の2つです。

4. 手順2：部分ゲームでの均衡ごとに、プレイヤー1の最初の選択を決めます。部分ゲームで (O,O) が予想されるなら、In の 3 が Out の 2 を上回るので In を選びます。(F,F) が予想されるなら、In の 1 は Out の 2 を下回るので Out を選びます。

計算例：部分ゲーム完全均衡の一覧

純粋戦略に限ると、部分ゲーム完全均衡は次の2つです（プレイヤー1の戦略は「最初の選択, 部分ゲームでの選択」）。

- $\big((\text{In},\, O),\, O\big)$：利得 $(3,1)$
- $\big((\text{Out},\, F),\, F\big)$：利得 $(2,2)$

後者でプレイヤー1は実際には部分ゲームに入りませんが、「入ったら F を選ぶ」ことまで戦略に含めて書きます。部分ゲーム完全均衡も、一般には1つとは限りません。

5.7 シュタッケルベルク競争：先手の利益

第3章のクールノー競争を、企業1が先に生産量を決め、企業2がそれを見てから生産量を決める逐次手番のゲームに変えてみます。これを**シュタッケルベルク競争**と呼び、企業1を**リーダー**、企業2を**フォロワー**と呼びます。設定（式(3.4)）は同じです。

手順1：フォロワーの選択　企業2は q_1 を見てから選ぶので、その最適反応は第3章と同じです。

$$q_2 = BR_2(q_1) = \frac{a - c - b\,q_1}{2b} \tag{5.2}$$

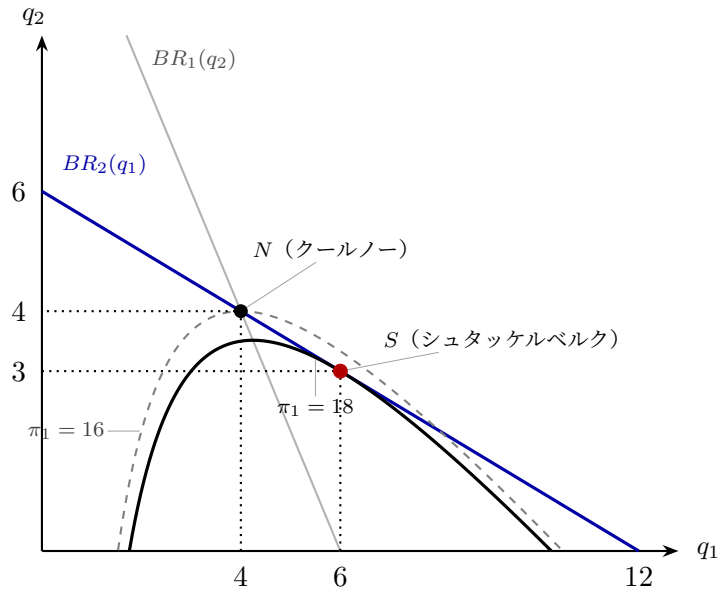
手順2：リーダーの選択　企業1は、自分の q_1 に企業2がどう反応するかを見越して選びます。

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \big[a - b\big(q_1 + BR_2(q_1)\big) - c\big]\, q_1 && (q_2 \text{ に } BR_2(q_1) \text{ を代入}) \\
&= \left[a - c - b\, q_1 - \frac{a - c - b\, q_1}{2}\right] q_1 && (\text{式(5.2)を代入}) \\
&= \frac{a - c - b\, q_1}{2}\, q_1 && (\text{整理}) \\
\frac{d\pi_1}{dq_1} &= \frac{a - c - 2b\, q_1}{2} = 0 && (\text{1階条件}) \\
q_1^S &= \frac{a - c}{2b}, \qquad q_2^S = BR_2(q_1^S) = \frac{a - c}{4b} && (\text{解いて式(5.2)に戻す}) \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

数式の読み方：クールノーとの違い

- クールノーでは、企業1は q_2 を**固定された数**として最適化しました。シュタッケルベルクでは、q_2 を**自分の q_1 に反応する関数** $BR_2(q_1)$ として扱います。これが後ろ向き帰納法そのものです。
- リーダーは「自分が多く作れば、フォロワーは生産を減らす」ことを利用できます（BR_2 の傾きは $-1/2$）。そのため、クールノーの $(a-c)/(3b)$ より多い $(a-c)/(2b)$ を作ります。

図 5.6　シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡



$a-c=12$, $b=1$ として描いた。青線 BR_2：$q_2=(12-q_1)/2$，灰色の実線 BR_1：$q_1=(12-q_2)/2$（上部は省略），黒の曲線は企業1の等利潤曲線 $q_2 = 12 - q_1 - 18/q_1$（利潤18），灰色の破線は $q_2 = 12 - q_1 - 16/q_1$（利潤16）。$S=(6,3)$ で黒の曲線と BR_2 は接する（傾きはともに $-1/2$）。

図の読み方

1. リーダー（企業1）は、フォロワーの最適反応 BR_2（青線）の上の点しか実現できないことを知っています。そこで青線上で、自分の利潤が最大になる点を選びます。

2. 企業1の等利潤曲線は、下にあるものほど利潤が大きくなります（第3章の図3.3参照）。青線上で最も下の等利潤曲線に届く点は、等利潤曲線が青線に**接する**点 $S = (6, 3)$ です。

3. クールノー均衡 $N = (4, 4)$ を通る等利潤曲線（灰色の破線，利潤16）は、S を通る曲線（黒，利潤18）より上にあります。リーダーは先に動くことで利潤を 16 から 18 に増やしています。これを**先手の利益**と呼びます。

4. 逆にフォロワーの生産量は 4 から 3 に減ります。リーダーが先に多く作ってしまう（コミットする）ので、フォロワーは引き下がるしかないのです。

計算例：数値で比べる

$a - c = 12$, $b = 1$ のとき、シュタッケルベルク均衡は $q_1^S = 6$, $q_2^S = 3$、総生産量は 9、価格は $P = c + 3$ です。利潤は企業1が $3 \times 6 = 18$、企業2が $3 \times 3 = 9$ です。クールノー均衡（各社 $q = 4$、利潤 16）と比べ、総生産量は増え、価格は下がり、リーダーの利潤は増え、フォロワーの利潤は減ります。

発展：後ろ向き帰納法と実験結果

後ろ向き帰納法の予測は、実験では必ずしも成り立ちません。代表例が**最後通牒ゲーム**です。提案者が一定額の分け方を提案し、応答者が受諾すればその通りに、拒否すれば2人とも0になります。応答者が自分の金銭だけを気にするなら、わずかでも正の額なら受諾するはずなので、部分ゲーム完全均衡では提案者はほぼすべてを取ります。しかし多くの実験では、提案者は相当な割合を相手に提示し、低い提案はしばしば拒否されることが知られています。この結果は、利得に公平さへの選好を入れる研究（行動経済学）につながりました。

要点

- 展開形ゲームはゲームの木で表し、戦略は「すべての情報集合で何を選ぶか」の完全な行動計画です。
- ナッシュ均衡には、均衡経路外の信用できない脅しに支えられた均衡が含まれます。
- 後ろ向き帰納法と部分ゲーム完全均衡は、すべての部分ゲームでの合理性を要求することで、信用できない脅しを排除します。
- 情報集合は「どの決定節にいるか分からない」ことを表し、部分ゲームは情報集合を切らない形で定義されます。

次の章へ　動学的なゲームの重要な応用が、同じゲームを何度も繰り返す状況です。1回限りでは裏切りしか起こらない囚人のジレンマでも、繰り返されると協力が生まれることがあります。

大学院とのつながり　大学院では、部分ゲーム完全均衡をさらに精緻化した逐次均衡や、交渉ゲーム（ルービンシュタインの交互提案モデル）などを部分ゲーム完全均衡で分析します。

第6章

繰り返しゲーム：協力はどのように維持されるか

ここまでの流れ　第2章では、1回限りの囚人のジレンマでは協力が実現しないことを見ました。第5章では、動学的なゲームを部分ゲーム完全均衡で分析する方法を学びました。

この章の問い　同じ相手と何度も取引する場合、「裏切ったら将来罰を受ける」という仕組みで協力を維持できるでしょうか。それはどのような条件のもとで可能でしょうか。

この章で分かること　有限回の繰り返しでは協力が崩れる理由、無限回の繰り返しでトリガー戦略が協力を支える条件、フォーク定理が示す「実現可能な利得の広さ」、そして寡占企業の暗黙の共謀（カルテル）の維持条件が分かります。

6.1　繰り返しゲームの設定

1回分のゲームを**段階ゲーム**と呼び、それを同じプレイヤーが何度も繰り返すゲームを**繰り返しゲーム**と呼びます。この章の段階ゲームは、第2章の囚人のジレンマ（$T=5,\ R=3,\ P=1,\ S=0$）です。各期のはじめに、プレイヤーは過去のすべての期の行動（**履歴**）を見ることができるとします。

将来の利得は、現在の利得より割り引いて評価します。第 t 期（$t=0,1,2,\ldots$）の利得を $u_{i,t}$ とすると、プレイヤー i の総利得は次のように表されます。

$$V_i \;=\; u_{i,0} + \delta\, u_{i,1} + \delta^2 u_{i,2} + \cdots \;=\; \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t\, u_{i,t} \tag{6.1}$$

数式の読み方：割引因子 δ

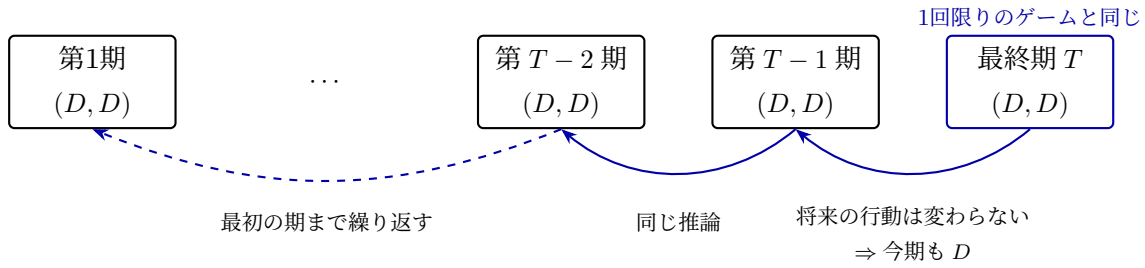
- δ（$0<\delta<1$）は**割引因子**です。1期先の利得1単位を、今の δ 単位と同じ価値とみなします。利子率 r を使えば $\delta = 1/(1+r)$ と考えられます。
- δ が1に近いほど、プレイヤーは将来を重視する（辛抱強い）ことになります。
- 「ゲームが毎期、確率 $1-\delta$ で終わる」と解釈することもできます。この場合、δ は「関係が続く確率」です。
- 毎期同じ利得 u が続くと、等比級数の公式から $V = u+\delta u+\delta^2 u+\cdots = u/(1-\delta)$ となります。この式はこの章で何度も使います。

繰り返しゲームの戦略は、「これまでの履歴に応じて、各期に何を選ぶか」を定めた計画です。過去に相手がどう行動したかによって、今期の行動を変えることができます。これが1回限りのゲームとの決定的な違いです。

6.2 有限回の繰り返し：協力は崩れる

まず、囚人のジレンマを決まった回数 T 回だけ繰り返す場合を考えます。後ろ向き帰納法で解きます（図6.1）。

図 6.1 有限回の繰り返しでの後ろ向き帰納法



青い矢印は推論の向き（最後の期から逆向きに）。

図の読み方

1. 最終期 T には、もう将来がありません。そのため最終期のゲームは1回限りの囚人のジレンマと同じで、両者とも D を選びます。
2. 第 $T-1$ 期で協力しても裏切っても、最終期に (D, D) となることは変わりません。将来の行動が今期の行動に左右されないので、第 $T-1$ 期も1回限りのゲームと同じになり、(D, D) です。
3. この推論を最初の期まで繰り返すと（青い矢印）、**すべての期で** (D, D) が唯一の部分ゲーム完全均衡になります。最後から協力が「ほどけていく」ので、この現象をアンラベリングと呼ぶことがあります。

補足：終わりが決まっていることの重要性

アンラベリングの出発点は「最終期が確実に分かっている」ことでした。段階ゲームのナッシュ均衡が1つしかない場合、有限回の繰り返しでは協力は生まれません。一方、終わりが決まっていない（毎期、関係が続く可能性がある）場合には、次の節で見るように結論が大きく変わります。

6.3　無限回の繰り返しとトリガー戦略

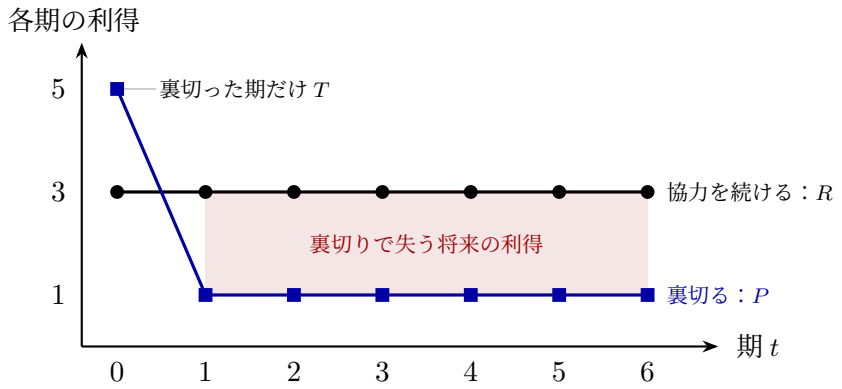
ゲームが無限に続く（あるいは、いつ終わるか分からない）場合を考えます。最終期がないので、後ろ向き帰納法の出発点がありません。そこで、次の戦略を考えます。

要点：グリム・トリガー戦略

- 第0期は C（協力）を選ぶ。
- 以降、これまで両者が常に C を選んでいれば C を選ぶ。
- 一度でも誰かが D を選んだら、その後は永遠に D を選ぶ（罰）。

両者がこの戦略をとると、毎期 (C, C) が実現し、各自は毎期 $R = 3$ を得ます。ある期に一方が裏切るとどうなるかを、利得の流れで比べたのが図6.2です。

図 6.2　協力を続ける場合と裏切る場合の利得の流れ



第0期に裏切る場合。利得は $T = 5$, $R = 3$, $P = 1$。相手はグリム・トリガー戦略に従う。

図の読み方

1. 黒線は協力を続けた場合で、毎期 $R = 3$ が続きます。
2. 青線は第0期に裏切った場合です。裏切った期だけ $T = 5$ を得ますが、相手が翌期から永遠に D を選ぶので、自分も D を選ぶしかなく、以後は毎期 $P = 1$ です。
3. 裏切りの「得」は第0期の $T - R = 2$、「損」は第1期以降、毎期 $R - P = 2$ ずつ失う分（薄い赤の部分）です。損は将来に発生するので、割引因子 δ で割り引いて評価されます。将来を重視するほど（δ が大きいほど）、損が重くのしかかります。

この比較を式にします。協力を続ける場合と、ある期に裏切る場合の総利得は、

$$V^{\text{協力}} = R + \delta R + \delta^2 R + \cdots = \frac{R}{1-\delta} \tag{6.2}$$

$$V^{\text{裏切り}} = T + \delta P + \delta^2 P + \cdots = T + \frac{\delta P}{1-\delta} \tag{6.3}$$

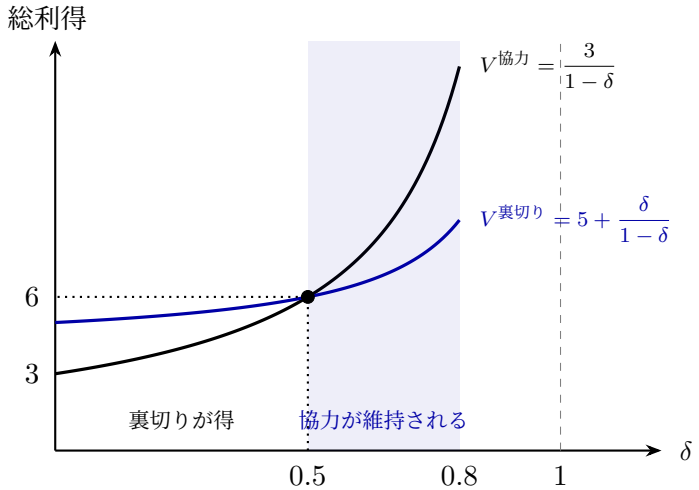
です。協力が維持されるのは $V^{\text{協力}} \geq V^{\text{裏切り}}$ のときです。

$$\begin{aligned}
\frac{R}{1-\delta} &\geq T + \frac{\delta P}{1-\delta} && \text{（協力の条件）} \\
R &\geq (1-\delta)T + \delta P && \text{（両辺に } 1-\delta \text{ を掛ける）} \\
\delta(T-P) &\geq T - R && \text{（}\delta \text{ の項を左辺に集める）} \\
\delta &\geq \frac{T-R}{T-P} && \text{（}T-P>0 \text{ で割る）}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

数式の読み方：協力が維持される条件

- 分子 $T-R$ は「今期に裏切って得る追加の利得」、分母 $T-P$ は「裏切りの利得 T と罰の利得 P の差」です。
- 裏切りの誘惑 $T-R$ が小さいほど、また罰の厳しさ（$R-P$）が大きいほど、右辺は小さくなり、協力が維持されやすくなります（$T-P=(T-R)+(R-P)$ に注意）。
- 数値例では $\delta \geq (5-3)/(5-1) = 1/2$ です。将来の利得を半分以上の重みで評価するなら、協力が維持できます。

図 6.3　割引因子と協力の維持



式(6.2)・(6.3)に $T=5,\ R=3,\ P=1$ を代入して描いた。2つの曲線は $\delta = 1/2$（総利得6）で交わる。$\delta = 0$ での値はそれぞれ 3 と 5。$\delta \to 1$ で両者とも無限大に発散するため、$\delta \leq 0.8$ の範囲を描いた。

図の読み方

1. 横軸は割引因子 δ、縦軸は総利得です。$\delta = 0$ では将来を一切気にしないので、協力（3）より裏切り（5）の方が大きくなります。

2. δ が大きくなると、どちらの総利得も増えますが、協力を続ける黒線の方が速く増えます。協力の利益 R が毎期続くのに対し、裏切りの高い利得 T は1回限りだからです。

3. 2本の曲線は $\delta = 1/2$ で交わります。それより右（薄い青の範囲）では黒線が上にあり、協力を続けるのが最適です。これが式(6.4)の図的な意味です。

補足：トリガー戦略は部分ゲーム完全均衡

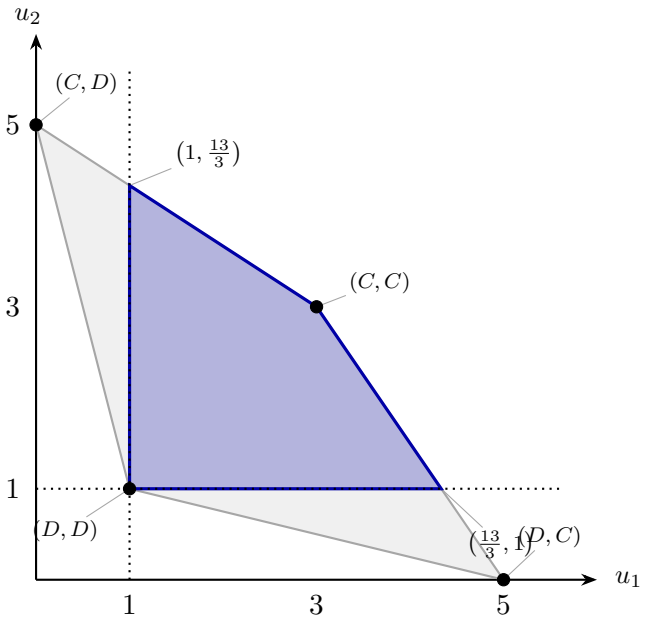
グリム・トリガー戦略の組が部分ゲーム完全均衡であるには、裏切りが起きた後の部分ゲームでも最適でなければなりません。罰の段階では、相手が永遠に D を選ぶので、自分も毎期 D を選ぶのが最適です（D は段階ゲームの支配戦略だからです）。したがって「罰する」という脅しは信用でき、$\delta \geq (T-R)/(T-P)$ なら両者のグリム・トリガー戦略は部分ゲーム完全均衡になります。罰が信用できるかどうかは、第5章の「信用できない脅し」の議論そのものです。

6.4 フォーク定理：何でも均衡になりうる

トリガー戦略で (C, C) を維持できることが分かりました。では、(C, C) 以外の結果も均衡として維持できるでしょうか。その答えを与えるのが**フォーク定理**です（研究者の間で古くから知られていたため「民間伝承（folk）」の名がつきました）。

ここで、各期の利得の平均を比べるために、総利得に $1-\delta$ を掛けた**平均利得** $(1-\delta)V_i$ を使います。毎期 u が続くなら平均利得はちょうど u です。

図 6.4　実現可能な利得と個人合理的な利得



利得は $T = 5, R = 3, P = 1, S = 0$。灰色の四角形は4点 $(3,3),(0,5),(5,0),(1,1)$ の凸包（実現可能な利得）。青い四角形は、そのうち両者の利得が 1 以上の部分で、頂点は $(1,1)$, $(1,13/3)$, $(3,3)$, $(13/3,1)$。$(1,13/3)$ は辺 $(0,5)$–$(3,3)$ 上の $u_1 = 1$ の点、$(13/3,1)$ は辺 $(3,3)$–$(5,0)$ 上の $u_2 = 1$ の点として計算した。

図の読み方

1. 4つの黒い点は、段階ゲームの4つの結果の利得です。各期に結果を混ぜたり、期ごとに切り替えたりすると、平均利得として4点を結んだ四角形（灰色）の中のどの点にも（近づくことが）できます。これを**実現可能な利得**と呼びます。

2. 点線は $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ の線です。各プレイヤーは D を選び続ければ、相手が何をしても毎期少なくとも $P = 1$ を確保できます。この保証水準を下回る利得を受け入れる人はいないので、均衡の平均利得は両者とも 1 以上でなければなりません（**個人合理性**）。

3. 青い四角形が、実現可能で個人合理的な利得の範囲です。フォーク定理は、δ が十分1に近ければ、この範囲の（ほぼ）どの点も部分ゲーム完全均衡の平均利得として実現できる、と述べます。

4. (C,C) の $(3,3)$ も、毎期 (D,D) の $(1,1)$ も、その中間の非対称な点も、すべて均衡になりえます。

要点：フォーク定理（直観的な表現）

- 無限回繰り返しゲームでは、プレイヤーが十分に辛抱強ければ（δ が1に近ければ）、実現可能で個人合理的な利得の組は、ほぼすべて部分ゲーム完全均衡で実現できます。
- 「協力は可能」である一方、「均衡は無数にあり、理論だけではどれが実現するか決まらない」ことも意味します。

発展：フォーク定理の研究史

トリガー戦略で段階ゲームのナッシュ均衡より良い結果を維持できることは、フリードマン（1971年）が示しました。ナッシュ均衡の利得による罰ではなく、各プレイヤーが確保できる最低水準（ミニマックス値）まで罰することで、個人合理的な利得の全体を部分ゲーム完全均衡として実現できることは、フューデンバーグとマスキン（1986年）が一般的な条件のもとで証明しました。囚人のジレンマでは、ミニマックス値と段階ゲームのナッシュ均衡の利得がともに P なので、両者の違いは現れません。

6.5 寡占への応用：暗黙のカルテル

第3章のクールノー複占では、2社が独占量を分け合えば各社の利潤が増えるのに、互いに増産したくなるため協調は自己拘束的ではありませんでした。これは囚人のジレンマと同じ構造です。では、2社が毎期競争を繰り返すなら、明示的な契約なしに協調（**暗黙の共謀**）を維持できるでしょうか。

設定は第3章と同じ（逆需要 $P = a - bQ$、限界費用 c）とし、$A \equiv a - c$ とおきます。次の3つの状態の1期あたり利潤を求めます。

$$\text{カルテル（独占量を折半）：} \quad q^K = \frac{A}{4b}, \qquad \pi^K = \frac{A^2}{8b} \tag{6.5}$$

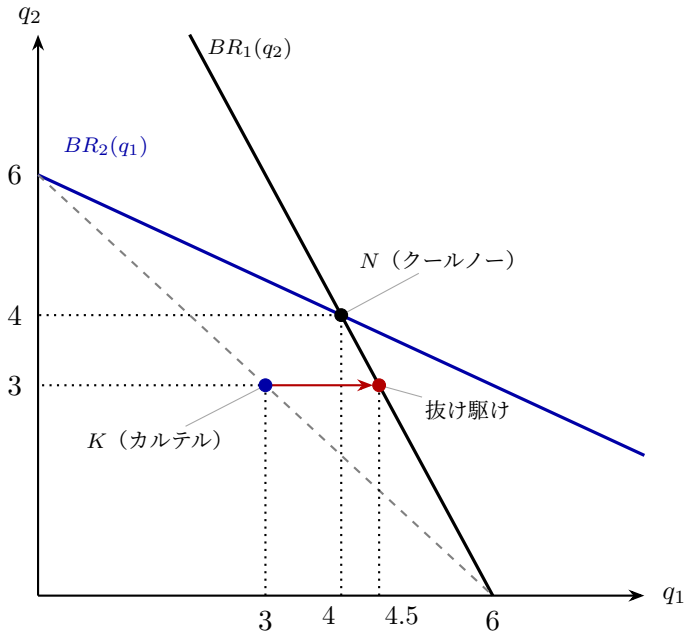
$$\text{抜け駆け（相手が } q^K \text{ のとき最適反応）：} \quad q^{\text{逸脱}} = BR(q^K) = \frac{3A}{8b}, \qquad \pi^{\text{逸脱}} = \frac{9A^2}{64b} \tag{6.6}$$

$$\text{クールノー（罰の段階）：} \quad q^N = \frac{A}{3b}, \qquad \pi^N = \frac{A^2}{9b} \tag{6.7}$$

数式の読み方：3つの利潤の導出

- カルテル：2社合計で独占量 $Q = A/(2b)$ を作ると価格は $P = c + A/2$ になり、総利潤は $(A/2) \cdot A/(2b) = A^2/(4b)$ です。これを折半して $A^2/(8b)$ です。
- 抜け駆け：相手が $q^K = A/(4b)$ のとき、第3章の式(3.6)より最適反応は $\big(A - b \cdot A/(4b)\big)/(2b) = 3A/(8b)$ です。総生産量は $5A/(8b)$、価格は $P = c + 3A/8$ で、利潤は $(3A/8) \cdot 3A/(8b) = 9A^2/(64b)$ です。
- クールノー：第3章の式(3.7)より $q^N = A/(3b)$、価格は $c + A/3$ で、利潤は $A^2/(9b)$ です。
- 大小関係は $\pi^{\text{逸脱}} > \pi^K > \pi^N$ で、囚人のジレンマの $T > R > P$ に対応しています。

図 6.5　クールノー複占でのカルテルと抜け駆け



$A = a - c = 12$, $b = 1$ として描いた。灰色の破線は独占量 $Q = 6$ を2社で分ける組。$K = (3, 3)$，抜け駆けの点 $(4.5, 3) = (BR_1(3),\, 3)$，$N = (4, 4)$。

図の読み方

1. 灰色の破線上の点は、2社合計で独占量 6 を生産する組で、総利潤が最大になります。対称な点 $K=(3,3)$ がカルテルです。
2. K は企業1の最適反応 BR_1（黒線）の上にありません。企業2が 3 を作るとき、企業1の最適反応は 4.5 です（赤い矢印）。これが抜け駆けの誘惑で、利潤は 18 から 20.25 に増えます。
3. 抜け駆けが発覚すると、以後は罰としてクールノー均衡 $N=(4,4)$ に戻り、利潤は毎期 16 に下がります。N は両方の最適反応の上にあるので、罰の段階は各期のナッシュ均衡であり、信用できる罰です。

グリム・トリガー戦略（抜け駆けが起きたら永遠にクールノー生産に戻る）で、カルテルが維持される条件を求めます。式(6.4)と同じ手順です。

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^{K}}{1-\delta} &\geq \pi^{\text{逸脱}} + \frac{\delta\,\pi^{N}}{1-\delta} && \text{（カルテルを続ける方が得）}\\
\delta &\geq \frac{\pi^{\text{逸脱}} - \pi^{K}}{\pi^{\text{逸脱}} - \pi^{N}} && \text{（式(6.4)と同様に整理）}\\
&= \frac{\frac{9}{64} - \frac{8}{64}}{\frac{9}{64} - \frac{1}{9}} && \text{（式(6.5)〜(6.7)を代入し、A^2/b で約分）}\\
&= \frac{1/64}{17/576} = \frac{9}{17} && \text{（計算）}
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

計算例：$A=12,\ b=1$ の場合

$\pi^{K}=18,\ \pi^{\text{逸脱}}=20.25,\ \pi^{N}=16$ です。条件は $\delta \geq (20.25-18)/(20.25-16) = 2.25/4.25 = 9/17 \approx 0.53$ となり、式(6.8)と一致します。需要の大きさ A や傾き b に関係なく、条件は $9/17$ です。

補足：価格競争のカルテルと企業数

ベルトラン競争（第3章の補足）を n 社で繰り返す場合、カルテルでは各社が独占利潤 Π^{M} の $1/n$ を得ます。抜け駆けして価格をわずかに下げれば市場全体（ほぼ Π^{M}）を奪えますが、以後は価格が限界費用まで下がり利潤はゼロになります。条件は $\Pi^{M}/\big(n(1-\delta)\big) \geq \Pi^{M}$、つまり $\delta \geq 1-1/n$ です。企業数が多いほど抜け駆けの誘惑が大きく、カルテルは維持しにくくなります。

要点

- 段階ゲームのナッシュ均衡が1つだけなら、有限回の繰り返しでは後ろ向き帰納法により協力は崩れます。
- 無限回（終わりが不確定）の繰り返しでは、トリガー戦略による将来の罰が協力を支えます。囚人のジレンマでは $\delta \geq (T-R)/(T-P)$ が条件です。
- フォーク定理によれば、十分に辛抱強いプレイヤーの間では、実現可能で個人合理的な利得のほぼすべてが均衡になりえます。
- 寡占企業も、繰り返しの関係の中で暗黙のカルテルを維持できることがあります。クールノー複占では $\delta \geq 9/17$、ベルトラン競争では $\delta \geq 1 - 1/n$ が条件です。

次の章へ　ここまでは、全員が全員の利得を知っている「完備情報」のゲームでした。しかし現実には、ライバル企業の費用や相手の好みは分からないことが多いものです。次の章では、相手の「タイプ」が分からないゲームを分析します。

大学院とのつながり　大学院では、相手の行動が完全には観察できない場合（不完全モニタリング）の繰り返しゲームや、評判のモデルを学びます。これらは産業組織論や契約理論の重要な道具です。

第7章

不完備情報ゲームとベイジアン・ナッシュ均衡

> **ここまでの流れ**　第2〜6章では、全員がゲームの構造、とくに全員の利得を知っている**完備情報**のゲームを扱いました。
> **この章の問い**　ライバル企業の費用や、相手の好みが分からないとき、どのように行動を決めればよいのでしょうか。「相手が自分について何を知らないか」まで含めて、どのように均衡を定義すればよいのでしょうか。
> **この章で分かること**　タイプと事前確率による不完備情報の表し方、ハルサニ変換、ベイジアン戦略とベイジアン・ナッシュ均衡の定義、そして費用が分からないクールノー競争での均衡の求め方が分かります。

7.1　タイプとハルサニ変換

現実の戦略的状況では、相手の利得が分からないことがよくあります。

- 寡占企業は、ライバルの生産費用を正確には知りません。
- オークションの入札者は、他の入札者が商品をいくらと評価しているかを知りません。
- 雇い主は、応募者の本当の能力を知りません。

このように、少なくとも1人のプレイヤーが他のプレイヤーの利得を知らないゲームを**不完備情報ゲーム**と呼びます。

「相手の利得が分からない」状況をそのまま分析するのは困難です。相手の利得について予想を立てるには、相手が自分の利得をどう予想しているか、を予想しなければならず、その予想の予想……と際限がないからです。ハルサニはこの問題を次のように解決しました。

要点：ハルサニ変換

- 各プレイヤーの私的な情報（費用、評価額、能力など）を**タイプ** t_i と呼びます。
- ゲームの最初に「**自然**」という仮想のプレイヤーが、ある確率分布（**事前確率**）に従って各プレイヤーのタイプを選ぶと考えます。
- 各プレイヤーは自分のタイプだけを知り、他人のタイプは知りません。ただし事前確率は全員の共有知識です。

こうすると「利得が分からない」という問題は、「自然の手番を見ていない」という問題に置き換わります。第5章の情報集合を使えば、これは普通の展開形ゲームとして表せます。

7.2 例：相手の気持ちが分からない男女の争い

第3章の男女の争いを変形します。プレイヤー2には2つのタイプがあり、確率 $1/2$ ずつです。

- **タイプ** m（会いたい）：これまでと同じで、プレイヤー1と同じ場所に行きたい。
- **タイプ** a（避けたい）：プレイヤー1と**違う**場所に行きたい。

プレイヤー2は自分のタイプを知っていますが、プレイヤー1は知りません。プレイヤー1の利得はタイプによらず同じで、「同じ場所に来てくれればうれしい」ままです。

図 7.1　タイプごとの利得表

(a) タイプ m（確率 $1/2$）

プレイヤー1 ＼ プレイヤー2	O	F
O	2, 1	0, 0
F	0, 0	1, 2

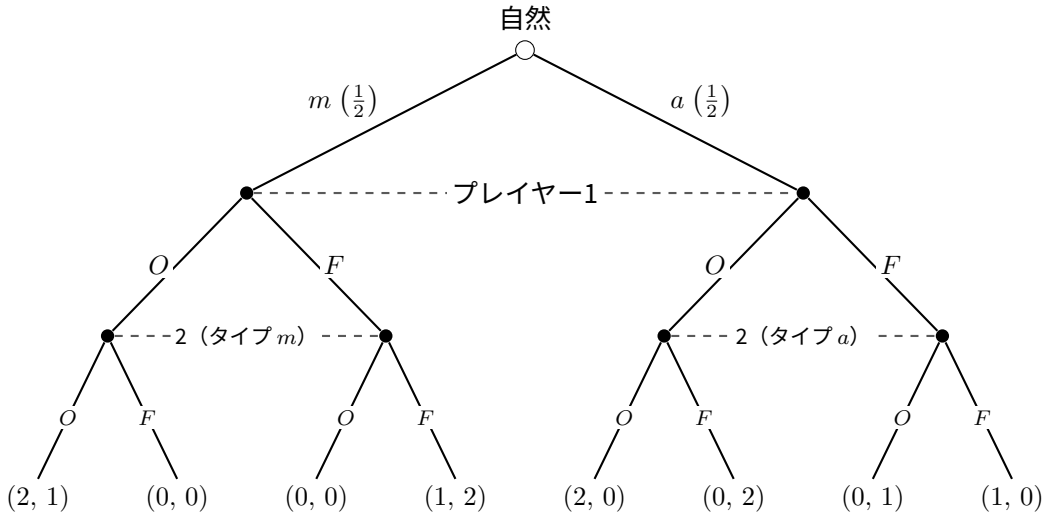
(b) タイプ a（確率 $1/2$）

プレイヤー1 ＼ プレイヤー2	O	F
O	2, 0	0, 2
F	0, 1	1, 0

プレイヤー1は、どちらの表でゲームをしているのか分からない。プレイヤー1の利得（左の数字）は両方の表で同じ。

これをハルサニ変換で展開形にしたのが図7.2です。

図 7.2　ハルサニ変換：自然の手番と情報集合



白丸は自然の手番。破線は情報集合。利得は（プレイヤー1, プレイヤー2）の順で、図7.1と同じ。

図の読み方

1. 一番上の白丸は「自然」の手番です。確率 1/2 ずつでプレイヤー2のタイプ m（左）か a（右）を選びます。
2. 次の段のプレイヤー1の2つの決定節は、破線で結ばれた1つの情報集合です。プレイヤー1は自然の選択（相手のタイプ）を見ていないので、左右どちらにいるか分かりません。
3. 一番下の段では、プレイヤー2の決定節が左の2つ、右の2つでそれぞれ情報集合をつくります。プレイヤー2は自分のタイプは知っている（左右は区別できる）が、プレイヤー1の選択は見ていない（同じ側の2つは区別できない）ことを表します。
4. このように、不完備情報ゲームは「自然の手番を含み、それを一部のプレイヤーが観察できない展開形ゲーム」として表せます。

7.3　ベイジアン戦略とベイジアン・ナッシュ均衡

不完備情報ゲームでは、戦略を次のように考えます。

- プレイヤー2の戦略は「タイプ m ならこれ、タイプ a ならこれ」という、**タイプごとの行動計画**です。これを**ベイジアン戦略**と呼びます。たとえば (O, F) は「タイプ m なら O、タイプ a なら F」を表します。
- 自分のタイプしか知らない時点で考えると、なぜ「起こらない方のタイプの行動」まで決める必要があるのでしょうか。それは**相手が**、自分のすべてのタイプの行動を予

想して期待利得を計算するからです。プレイヤー1にとっては、プレイヤー2の各タイプがどう行動するかが重要です。

各プレイヤーは、自分のタイプ t_i を知ったうえで、他人のタイプについての確率（**信念**）を使って期待利得を最大化します。全員がそうしている状態が**ベイジアン・ナッシュ均衡**です。

$$s_i^*(t_i) \in \arg\max_{a_i} \sum_{t_{-i}} \Pr(t_{-i} \mid t_i)\, u_i\big(a_i,\, s_{-i}^*(t_{-i});\, t_i\big) \qquad \text{すべての } i \text{ とすべての } t_i \text{ について} \tag{7.1}$$

数式の読み方：ベイジアン・ナッシュ均衡の条件

- $s_i^*(t_i)$ は「タイプ t_i のプレイヤー i が選ぶ行動」です。戦略はタイプの関数です。
- $\Pr(t_{-i} \mid t_i)$ は、自分のタイプが t_i のときに、他人のタイプが t_{-i} である確率（信念）です。タイプが独立に決まるなら、単に事前確率 $\Pr(t_{-i})$ になります。
- $u_i(a_i, s_{-i}^*(t_{-i}); t_i)$ は、他人がタイプ t_{-i} のときに均衡戦略どおりの行動をとった場合の、自分の利得です。利得は自分のタイプにも依存します。
- 和 $\sum_{t_{-i}}$ は期待値を表します。「相手のタイプごとの利得を、その確率で重みづけて足す」ことです。
- 「すべての t_i について」なので、**各タイプが**それぞれ最適化している必要があります。完備情報のナッシュ均衡（式(3.2)）を、タイプごと・期待利得に拡張したものだと理解できます。

例の解き方　手順は「相手の戦略を予想 → 各タイプの最適反応を求める → 予想と一致するか確かめる」です。

まず、プレイヤー2の各タイプの最適反応は、図7.1から次のように分かります。

- タイプ m：プレイヤー1が O なら O（$1 > 0$），F なら F（$2 > 0$）。相手に合わせる。
- タイプ a：プレイヤー1が O なら F（$2 > 0$），F なら O（$1 > 0$）。相手を避ける。

次に、プレイヤー2のベイジアン戦略ごとに、プレイヤー1の期待利得を計算します（図7.3）。

図 7.3　プレイヤー2の戦略ごとのプレイヤー1の期待利得

	プレイヤー2の戦略（タイプ m の行動, タイプ a の行動）			
プレイヤー1	(O,O)	(O,F)	(F,O)	(F,F)
O	2	$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0=\mathbf{1}$	$\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 2=1$	0
F	0	$\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}$	1

各セルは「プレイヤー2の各タイプがその行動をとるとき、プレイヤー1が得る期待利得」。タイプの確率は 1/2 ずつ。

図の読み方

1. 列はプレイヤー2のベイジアン戦略（4通り）です。たとえば (O,F) の列では、確率 1/2 でタイプ m が O を、確率 1/2 でタイプ a が F を選びます。
2. プレイヤー1が O を選ぶと、タイプ m とは会えて利得 2、タイプ a とはすれ違って 0 なので、期待利得は $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0=1$ です。
3. 予想1：プレイヤー1が O を選ぶとします。プレイヤー2の最適反応は「タイプ m は O、タイプ a は F」、つまり (O,F) です。(O,F) の列でプレイヤー1は O（1）を F（$\frac{1}{2}$）より好むので、予想と一致します。
4. 予想2：プレイヤー1が F を選ぶとします。プレイヤー2の最適反応は (F,O) ですが、その列ではプレイヤー1は O（1）の方を好むので、予想と矛盾します。

したがって純粋戦略のベイジアン・ナッシュ均衡は、

$$\Big(s_1^* = O,\quad s_2^*(m) = O,\ s_2^*(a) = F \Big) \tag{7.2}$$

の1つです。プレイヤー1は相手のタイプが分からなくても、「半分の確率で会える」オペラを選び、プレイヤー2の各タイプはそれぞれの好みに応じて行動します。

7.4　費用が分からないクールノー競争

不完備情報ゲームの代表的な応用として、第3章のクールノー複占で、企業1が企業2の費用を知らない場合を考えます。

設定　逆需要は $P = a - q_1 - q_2$（$b = 1$）とします。企業1の限界費用 c は共有知識です。企業2の限界費用は、確率 θ で高い c_H、確率 $1-\theta$ で低い c_L です（$c_H > c_L$）。企業2は自分の費用を知っていますが、企業1は確率しか知りません。

企業2（各タイプ）の最適反応　企業2は自分の費用を知っているので、タイプごとに第3章と同じ計算をします。

$$q_2^H = \frac{a - c_H - q_1}{2} \qquad \text{（高費用タイプの最適反応）} \tag{7.3}$$

$$q_2^L = \frac{a - c_L - q_1}{2} \qquad \text{（低費用タイプの最適反応）} \tag{7.4}$$

企業1の最適反応　企業1は、企業2の生産量が確率 θ で q_2^H、確率 $1-\theta$ で q_2^L だと予想し、期待利潤を最大化します。

$$\begin{aligned} E[\pi_1] &= \theta\,(a - q_1 - q_2^H - c)\,q_1 + (1-\theta)\,(a - q_1 - q_2^L - c)\,q_1 && \text{（タイプごとの利潤の期待値）} \\ &= \big(a - c - q_1 - \bar{q}_2\big)\,q_1, \qquad \bar{q}_2 \equiv \theta q_2^H + (1-\theta) q_2^L && \text{（}q_1\text{ について整理）} \\ q_1 &= \frac{a - c - \bar{q}_2}{2} && \text{（1階条件を解く）} \end{aligned} \tag{7.5}$$

数式の読み方：企業1は「平均」に反応する

- 利潤が q_2 について1次式なので、企業1の期待利潤は「企業2の生産量の期待値 $\bar{q}_2$」だけに依存します。
- そのため式(7.5)は、第3章の最適反応で q_2 を $\bar{q}_2$ に置き換えた形になります。
- 一方、企業2の各タイプは実際の q_1 に反応します。不完備情報の非対称性が、式の非対称性に表れています。

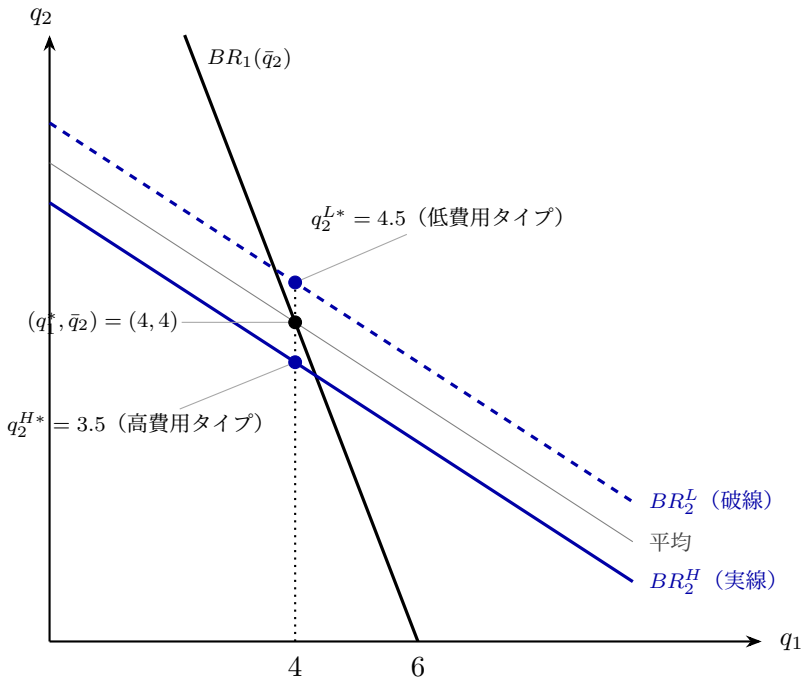
均衡の導出　式(7.3)・(7.4)から、企業2の生産量の期待値は $\bar{q}_2 = (a - \bar{c}_2 - q_1)/2$（ただし $\bar{c}_2 \equiv \theta c_H + (1-\theta) c_L$ は企業2の費用の期待値）です。これを式(7.5)に代入します。

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}\Big(a - c - \frac{a - \bar{c}_2 - q_1}{2}\Big) && \text{（}\bar{q}_2\text{ を代入）} \\ 4q_1 &= 2(a-c) - (a - \bar{c}_2) + q_1 && \text{（両辺を4倍）} \\ q_1^* &= \frac{a - 2c + \bar{c}_2}{3} && \text{（}q_1\text{ について解く）} \end{aligned} \tag{7.6}$$

これを式(7.3)・(7.4)に戻すと、企業2の各タイプの均衡生産量が得られます。

$$q_2^{H*} = \frac{a - c_H - q_1^*}{2}, \qquad q_2^{L*} = \frac{a - c_L - q_1^*}{2} \tag{7.7}$$

図 7.4　費用が分からないクールノー競争のベイジアン・ナッシュ均衡



$a = 14$, $c = 2$, $c_H = 3$, $c_L = 1$, $\theta = 1/2$ として描いた。黒線 BR_1：$q_1 = (12 - \bar{q}_2)/2$（縦軸を $\bar{q}_2$ と読む），青の実線 BR_2^H：$q_2 = (11 - q_1)/2$，青の破線 BR_2^L：$q_2 = (13 - q_1)/2$，灰色の細線は2つの青線の平均 $\bar{q}_2 = (12 - q_1)/2$。均衡は $q_1^* = 4$, $q_2^{H*} = 3.5$, $q_2^{L*} = 4.5$, $\bar{q}_2 = 4$。

図の読み方

1. 青い2本の線は企業2の2つのタイプの最適反応です。低費用タイプ（破線）の方が、同じ q_1 に対して多く生産するので、上にあります。

2. 企業1は企業2のタイプを知らないので、2つの青線の平均（灰色の細線）に対して最適反応します。黒線 BR_1 と灰色の線の交点が $(q_1^*, \bar{q}_2) = (4, 4)$ です。

3. 企業1が $q_1^* = 4$ を選ぶと、企業2の各タイプは $q_1 = 4$ の縦の点線上で、自分の最適反応の線と交わる点を選びます。高費用タイプは 3.5、低費用タイプは 4.5 で、その平均がちょうど $\bar{q}_2 = 4$ になっています。

4. 3つの点が同じ縦線上に並び、企業1の予想 $\bar{q}_2 = 4$ と企業2の実際の行動の平均が一致している状態が、ベイジアン・ナッシュ均衡です。

計算例：完備情報の場合との比較

もし企業1が企業2の費用を知っていたら、費用 (c_1, c_2) の非対称なクールノー均衡は $q_1 = (a - 2c_1 + c_2)/3,\ q_2 = (a - 2c_2 + c_1)/3$ です。

- 企業2が高費用（$c_2 = 3$）と分かっていれば：$q_1 = 13/3 \approx 4.33,\ q_2 = 10/3 \approx 3.33$。
- 企業2が低費用（$c_2 = 1$）と分かっていれば：$q_1 = 11/3 \approx 3.67,\ q_2 = 14/3 \approx 4.67$。

不完備情報のもとでは企業1は両者の中間の 4 を作ります。その結果、高費用タイプは完備情報の場合より多く（$3.5 > 3.33$）、低費用タイプは少なく（$4.5 < 4.67$）生産します。企業2の各タイプは、企業1が「平均的な相手」を想定して行動することに反応しているのです。

発展：オークションへの応用

2人の入札者が1つの商品を、封印した入札額で競り、高い方が自分の入札額を支払って商品を得る（第一価格封印入札）とします。各入札者の評価額 v_i は私的情報（タイプ）で、0から1の一様分布に独立に従うとします。相手が $b(v) = kv$ という形で入札すると予想すると、自分が b を入札したとき勝つ確率は $\Pr(kv_j < b) = b/k$ です。期待利得 $(v_i - b)\, b/k$ を b で最大化すると $b = v_i/2$ となり、$k = 1/2$ のとき予想と整合します。つまり $b(v) = v/2$ がベイジアン・ナッシュ均衡で、入札者は評価額の半分しか入札しません。オークション理論は、このようにベイジアン・ナッシュ均衡を道具として発展しました。

要点

- 不完備情報ゲームでは、私的情報を「タイプ」として表し、自然が事前確率に従ってタイプを選ぶと考えます（ハルサニ変換）。
- 戦略はタイプごとの行動計画（ベイジアン戦略）であり、相手は自分の全タイプの行動を予想して期待利得を計算します。
- ベイジアン・ナッシュ均衡では、各プレイヤーの各タイプが、相手のタイプについての信念のもとで期待利得を最大化しています。
- 費用が分からないクールノー競争では、情報を持たない企業は相手の「平均的な行動」に反応し、情報を持つ企業の各タイプはそれに反応します。

次の章へ　この章のゲームは同時手番でした。情報を持つ人が先に動き、持たない人がその行動を見てから動く場合は、「行動から相手のタイプを推測する」ことが可能になります。最後の章では、信念の更新を含む完全ベイジアン均衡と、その代表例であるシグナリングゲームを学びます。

大学院とのつながり　大学院では、ベイジアン・ナッシュ均衡がオークション理論やメカニズム・デザイン（情報を持つ人に正直に報告させる制度の設計）の基礎になります。

第8章

完全ベイジアン均衡とシグナリングゲーム

ここまでの流れ　第5章では、動学的なゲームで信用できない脅しを排除する部分ゲーム完全均衡を学びました。第7章では、相手のタイプが分からないゲームをベイジアン・ナッシュ均衡で分析しました。

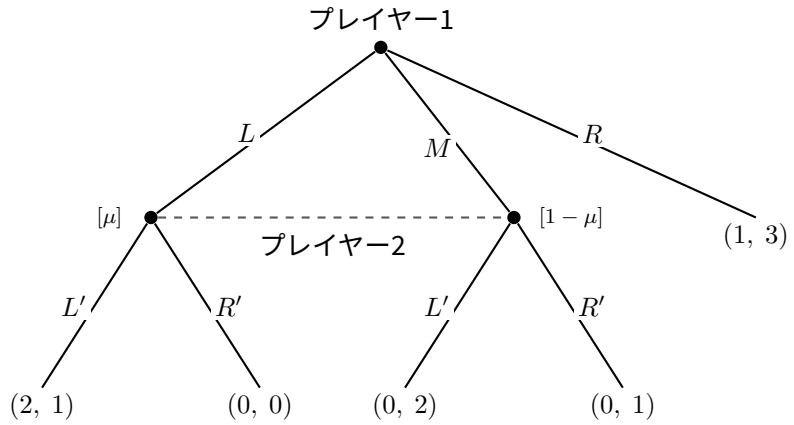
この章の問い　情報集合のある動学的なゲームでは、部分ゲーム完全均衡が十分に機能しないことがあります。また、情報を持つ人が先に動くと、その行動から情報が「漏れる」ことがあります。こうした状況では、均衡をどう定義すればよいでしょうか。

この章で分かること　部分ゲーム完全均衡の限界、信念と逐次合理性、ベイズ・ルールによる信念の更新、完全ベイジアン均衡の定義、シグナリングゲームの分離均衡と一括均衡、そしてスペンスの教育シグナリング・モデルが分かります。

8.1　部分ゲーム完全均衡の限界

図8.1のゲームを考えます。プレイヤー1は L, M, R のどれかを選びます。R ならゲームは終わります。L か M なら、プレイヤー2が、プレイヤー1が L と M のどちらを選んだかを**見ずに** L' か R' を選びます。

図 8.1　部分ゲーム完全均衡では信用できない行動が排除できない例



利得は（プレイヤー1, プレイヤー2）の順。$[\mu]$ と $[1-\mu]$ は、情報集合に着いたときにプレイヤー2が「左（L の後）にいる」「右（M の後）にいる」と考える確率（信念）。

図の読み方

1. プレイヤー2の2つの決定節は破線で結ばれた1つの情報集合です。プレイヤー2は L と M のどちらの後にいるか分かりません。
2. この情報集合は2つの決定節を含むので、どちらの決定節からも部分ゲームは始まりません。部分ゲームは「ゲーム全体」だけです。
3. 戦略形に直すと、ナッシュ均衡は (L, L') と (R, R') の2つです。(R, R') では、プレイヤー2が「R' を選ぶ」と脅し、プレイヤー1はそれを恐れて R を選んでいます。
4. 部分ゲームが全体しかないので、2つのナッシュ均衡はどちらも部分ゲーム完全均衡です。部分ゲーム完全均衡では (R, R') を排除できません。

しかし (R, R') の脅しは信用できません。プレイヤー2が実際に情報集合に着いたとき、自分が左にいる確率を μ とすると、

$$E[u_2(L')] = \mu \cdot 1 + (1-\mu) \cdot 2 = 2 - \mu$$
$$E[u_2(R')] = \mu \cdot 0 + (1-\mu) \cdot 1 = 1 - \mu$$

で、**どんな μ に対しても** L' の方が利得が大きいからです。プレイヤー2は情報集合に着いたら必ず L' を選ぶので、それを見越したプレイヤー1は L（利得2）を選びます。

要点：問題の所在

- 情報集合が複数の決定節を含むと、部分ゲームに分解できず、部分ゲーム完全均衡が「均衡経路外の行動の合理性」をチェックできなくなります。
- 解決策は、情報集合ごとに「どの決定節にいると思っているか」という**信念**を明示し、その信念のもとで最適な行動をとることを要求することです。

8.2 信念とベイズ・ルール

信念とは、各情報集合で、その中のどの決定節にいるかについての確率分布です。図8.1の μ がそれにあたります。

信念はでたらめに決めてよいわけではありません。相手の戦略が分かっているなら、その戦略と整合的でなければなりません。そのルールが**ベイズ・ルール**です。情報集合 h の

中の決定節 x について、

$$\mu(x) \;=\; \frac{\Pr(x \text{ に到達する})}{\Pr(h \text{ に到達する})} \;=\; \frac{\Pr(x \text{ に到達する})}{\displaystyle\sum_{x' \in h} \Pr(x' \text{ に到達する})} \tag{8.1}$$

とします。

数式の読み方：ベイズ・ルールの読み方

- 分母は「情報集合 h に着く確率」、分子は「その中でも決定節 x に着く確率」です。$\mu(x)$ は「h に着いたという条件のもとで、x にいる条件付き確率」です。
- 例：プレイヤー1が L を確率 0.3、M を確率 0.1、R を確率 0.6 で選ぶなら、情報集合に着く確率は 0.4 で、$\mu = 0.3/0.4 = 3/4$ です。
- 分母が0のとき、つまり均衡ではその情報集合に決して着かないとき（**均衡経路外**）は、ベイズ・ルールでは信念が決まりません。そのため、均衡経路外の信念は自由に設定できるとします（ここが後で重要になります）。

8.3 完全ベイジアン均衡

戦略と信念の組が次の条件をすべて満たすとき、それを**完全ベイジアン均衡**と呼びます。

要点：完全ベイジアン均衡の条件

- **条件1（信念）**：各情報集合で、動くプレイヤーはその中の決定節についての信念を持つ。
- **条件2（逐次合理性）**：各情報集合で、動くプレイヤーの行動は、その信念と、他のプレイヤーのその後の戦略を前提に、期待利得を最大にする。均衡経路外の情報集合でも同様である。
- **条件3（ベイズ整合性）**：均衡経路上の情報集合では、信念は均衡戦略からベイズ・ルール（式(8.1)）で計算される。
- **条件4**：均衡経路外の情報集合では、信念は（可能な場合は）ベイズ・ルールで決め、それができなければ任意でよい。

図8.1のゲームに当てはめます。条件2により、プレイヤー2はどんな信念のもとでも L' を選ぶので、(R, R') は排除されます。(L, L') では情報集合は均衡経路上にあり、プレイヤー1は確率1で L を選ぶので、条件3から信念は $\mu = 1$ です。したがって

$$\big(\,(L,\ L'),\ \mu = 1\,\big)$$

が唯一の完全ベイジアン均衡です。完全ベイジアン均衡は「戦略」と「信念」の**組**で表されることに注意してください。

補足：均衡概念の関係

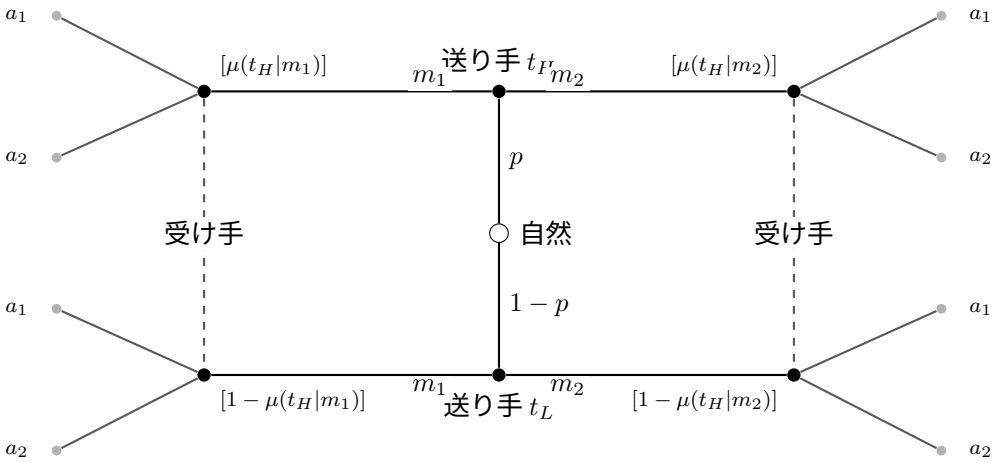
完全ベイジアン均衡は、部分ゲーム完全均衡の「すべての部分ゲームで合理的」という考え方を、「すべての情報集合で、信念のもとで合理的」に広げたものです。また、第7章のベイジアン・ナッシュ均衡に、動学的な合理性（逐次合理性）を加えたものとも言えます。第1章の図1.2の右下に当たります。

8.4 シグナリングゲームの構造

完全ベイジアン均衡の最も重要な応用が**シグナリングゲーム**です。情報を持つ人（**送り手**）が先に行動し、情報を持たない人（**受け手**）がその行動を見てから行動します。送り手の行動は、受け手にとって送り手のタイプを推測する手がかり（シグナル）になります。

1. 自然が送り手のタイプ $t \in \{t_H, t_L\}$ を、確率 p と $1-p$ で選ぶ。
2. 送り手は自分のタイプを知り、メッセージ（シグナル）m を選ぶ。
3. 受け手は m を見るが、タイプは見ない。信念 $\mu(t_H \mid m)$ を形成して行動 a を選ぶ。

図 8.2　シグナリングゲームの構造



中央の白丸が自然の手番。送り手は上（t_H）か下（t_L）にいることを知っている。受け手の情報集合（縦の破線）は左右に1つずつで、メッセージは区別できるがタイプは区別できない。灰色の点が終点（利得は省略）。

図の読み方

1. 木は中央から外側へ進みます。自然が送り手のタイプを決め（上か下）、送り手がメッセージ m_1（左）か m_2（右）を選びます。
2. 受け手の情報集合は左右の縦の破線です。左の破線は「m_1 を見た受け手」で、上下（タイプ）は区別できません。右も同様です。
3. 受け手は、それぞれの情報集合で「送り手が t_H である確率」$\mu(t_H \mid m)$ を持ち、それに基づいて行動 a_1, a_2 を選びます。
4. 送り手は、自分のメッセージが受け手の信念をどう変え、それが受け手の行動をどう変えるかを見越してメッセージを選びます。

シグナリングゲームの完全ベイジアン均衡は、送り手の各タイプの戦略によって大きく2種類に分かれます。

- **分離均衡**：タイプによって違うメッセージを送る（例：t_H は m_2、t_L は m_1）。受け手はメッセージを見ればタイプが完全に分かり、ベイズ・ルールから $\mu(t_H \mid m_2) = 1$, $\mu(t_H \mid m_1) = 0$ です。
- **一括均衡**：すべてのタイプが同じメッセージを送る（例：両タイプとも m_1）。メッセージから情報は得られないので、ベイズ・ルールから $\mu(t_H \mid m_1) = p$（事前確率のまま）です。送られない m_2 は均衡経路外なので、その信念は任意に設定でき、それが均衡を支えます。

8.5 スペンスの教育シグナリング・モデル

シグナリングの代表例が、スペンス（1973年）の労働市場のモデルです。教育が生産性を**まったく高めない**としても、能力の高い人が教育を受けることで、雇い主に能力を伝えられることを示しました。

設定

- 労働者の能力（タイプ）は θ_H（高）か θ_L（低）で、$\theta_H > \theta_L > 0$。高能力の確率は p。能力は労働者本人しか知りません。
- 労働者は教育水準 $e \geq 0$ を選びます（これがシグナル）。教育は生産性を変えません。
- 教育の費用は e/θ で、**能力の高い人ほど教育の費用が低い**とします。労働者の効用は $U = w - e/\theta$ です。

- 企業は教育水準 e を見て賃金 w を提示します。企業間の競争により、賃金は期待生産性に等しくなります：$w(e) = \mu(e)\,\theta_H + \big(1-\mu(e)\big)\,\theta_L$。ここで $\mu(e)$ は、e を見たときに労働者が高能力だと考える信念です。

以下、確認用に $\theta_H = 2,\ \theta_L = 1$ とします。効用は高能力が $U_H = w - e/2$、低能力が $U_L = w - e$ です。

数式の読み方：無差別曲線の傾きが違うこと

- 効用を一定 $\bar{U}$ とおくと、無差別曲線は $w = \bar{U} + e/\theta$ という直線です。傾き $1/\theta$ は「教育を1単位増やすのに必要な賃金の上乗せ」です。
- 低能力の傾き $1/\theta_L = 1$ は、高能力の傾き $1/\theta_H = 1/2$ より急です。同じ賃金の上乗せに対して、高能力の人の方がより多くの教育を受けてもよいと考えます。
- この「傾きの違い」（**単一交差条件**）が、教育を能力のシグナルとして機能させる鍵です。

分離均衡　低能力は $e = 0$、高能力は $e^* > 0$ を選び、企業の信念は

$$\mu(e) = \begin{cases} 1 & (e \geq e^*) \\ 0 & (e < e^*) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad w(e) = \begin{cases} \theta_H = 2 & (e \geq e^*) \\ \theta_L = 1 & (e < e^*) \end{cases} \tag{8.2}$$

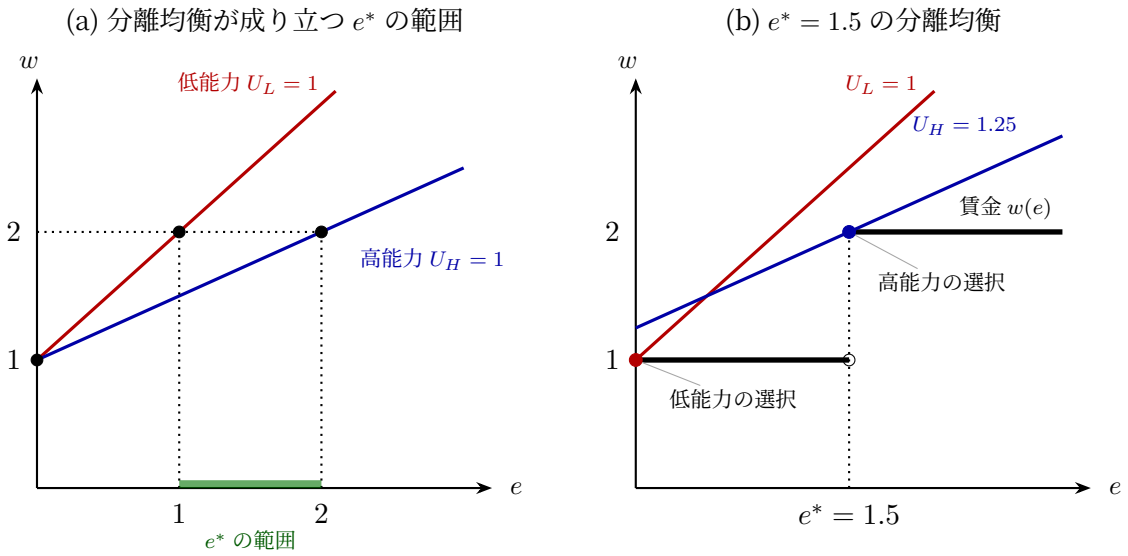
とします。均衡経路上（$e = 0$ と $e = e^*$）ではベイズ・ルールと整合的で、それ以外の e の信念は均衡経路外なので任意です。この賃金のもとで、各タイプが自分の教育水準を選ぶ条件（**誘因両立条件**）は次の2つです。

$$\text{低能力が真似しない：}\quad 1 - 0 \;\geq\; 2 - \frac{e^*}{1} \quad\Longleftrightarrow\quad e^* \geq 1 \tag{8.3}$$

$$\text{高能力が真似しない：}\quad 2 - \frac{e^*}{2} \;\geq\; 1 - 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^* \leq 2 \tag{8.4}$$

よって $1 \leq e^* \leq 2$ を満たす任意の e^* で、分離均衡が成り立ちます。一般には $\theta_L(\theta_H - \theta_L) \leq e^* \leq \theta_H(\theta_H - \theta_L)$ です。

図 8.3　教育シグナリングの分離均衡



$\theta_H = 2$, $\theta_L = 1$。赤線は低能力の無差別曲線 $w = 1 + e$（効用1），青線は高能力の無差別曲線（(a) は $w = 1 + e/2$，(b) は $(1.5, 2)$ を通る $w = 1.25 + e/2$，縦軸との交点は 1.25）。(b) の黒の階段は式(8.2)の賃金 $w(e)$（$e^* = 1.5$）。

図の読み方

1. (a) 点 $(0, 1)$ は「教育を受けずに低能力の賃金1をもらう」点です。そこを通る赤線（低能力）と青線（高能力）は、それぞれの効用が1の無差別曲線です。赤線の方が傾きが急です。

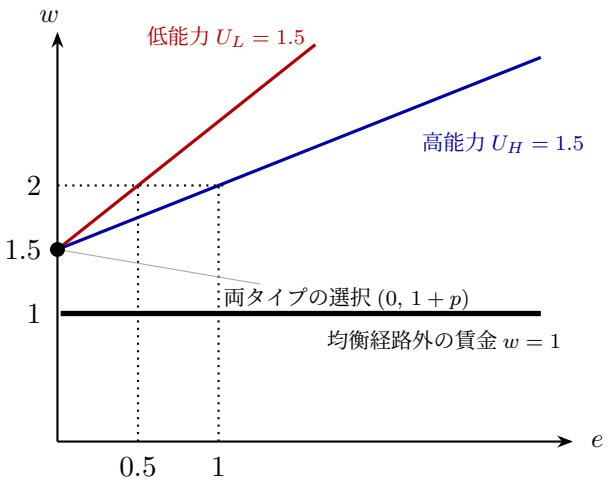
2. 高能力の賃金 $w = 2$ の高さ（点線）で見ると、赤線は $e = 1$ で、青線は $e = 2$ で到達します。$e^* < 1$ だと、低能力も $(e^*, 2)$ の方が $(0, 1)$ より良い（赤線より下の点に移れる）ので真似をしてしまいます。$e^* > 2$ だと、高能力ですら $(0, 1)$ の方が良くなります。緑の範囲 $[1, 2]$ が分離均衡の e^* です。

3. (b) 黒の階段が賃金 $w(e)$ です。低能力にとって、階段上で赤線（効用1）より上に出る点はないので、$(0, 1)$ が最適です。$(1.5, 2)$ は赤線より下にあります。

4. 高能力の無差別曲線（青，効用1.25）は $(1.5, 2)$ を通り、階段の左側の $(0, 1)$ より上を通っています。つまり高能力は $(0, 1)$ より $(1.5, 2)$ を好みます。各タイプが自分の点を選んでいることが確かめられます。

一括均衡　両タイプとも $e = 0$ を選ぶ均衡も考えられます。$e = 0$ は均衡経路上なので信念は事前確率 $\mu(0) = p$、賃金は $w(0) = 1 + p$ です。$e > 0$ は均衡経路外なので、「$e > 0$ を選ぶのは低能力だ」という信念 $\mu(e) = 0$ を置けます。すると $e > 0$ を選んでも賃金は1で、教育費用がかかるだけなので、どちらのタイプも逸脱しません。したがって任意の p で一括均衡が成り立ちます。

図 8.4　教育シグナリングの一括均衡



$\theta_H = 2$, $\theta_L = 1$, $p = 1/2$。黒い点は一括均衡 $(e, w) = (0, 1.5)$。黒線は均衡経路外の信念 $\mu(e) = 0$ のもとでの賃金 $w(e) = 1$（$e > 0$）。赤線 $w = 1.5 + e$，青線 $w = 1.5 + e/2$ は、それぞれ低能力・高能力の効用1.5の無差別曲線。

図の読み方

1. 両タイプとも $(0, 1.5)$ を選びます。教育を受けないので、企業はタイプを区別できず、平均的な生産性 $1 + p = 1.5$ を支払います。

2. $e > 0$ を選ぶと、企業は「低能力だ」と考えて賃金1しか払いません（黒線）。黒線はどちらの無差別曲線よりも下にあるので、どちらのタイプも逸脱しません。

3. この均衡を支えているのは、均衡経路外の「悲観的な」信念です。完全ベイジアン均衡では、経路外の信念は自由に設定できるため、このような均衡も排除されません。

計算例：教育は社会的に無駄か

このモデルでは教育は生産性を高めないので、教育費用は社会全体から見れば純粋な損失です。$e^* = 1$ の分離均衡では、高能力の効用は $2 - 1/2 = 1.5$、低能力は 1 です。$p = 1/2$ の一括均衡では、両タイプとも 1.5 です。この数値例では、一括均衡は分離均衡と比べて高能力の効用を変えずに低能力の効用を高めます。それでも分離均衡が生じうるのは、各自が自分の得のためにシグナルを送ろうとするからです。

発展：均衡の精緻化と直観的基準

シグナリングゲームには、均衡経路外の信念の置き方次第で多数の完全ベイジアン均衡が存在します。チョーとクレプス（1987年）の**直観的基準**は、不自然な経路外の信念を排除する代表的な方法です。考え方は「ある経路外のシグナルを送って得をする可能性があるのが一方のタイプだけなら、そのシグナルを見た受け手は、そのタイプだと信じるべきだ」というものです。

数値例の一括均衡で、$0.5 < e' < 1$ となる e' を考えます。賃金2を払ってもらえたとしても、低能力の効用は $2 - e' < 1.5$ で、一括均衡の1.5より低いので、低能力は e' を選ぶ理由がありません。一方、高能力の効用は $2 - e'/2 > 1.5$ で、得をする可能性があります。直観的基準のもとでは e' を見た企業は高能力と信じるべきで、高能力は e' に逸脱するので、一括均衡は崩れます（図8.4の点線 $e = 0.5$, $e = 1$ の間）。同じ論理で $e^* > 1$ の分離均衡も排除され、最も費用の小さい分離均衡 $e^* = 1$ だけが残ります。

要点

- 情報集合が複数の決定節を含むと部分ゲーム完全均衡では不十分になるため、各情報集合での信念を明示します。
- 完全ベイジアン均衡は、戦略と信念の組で、各情報集合での逐次合理性と、均衡経路上でのベイズ・ルールによる信念の整合性を満たすものです。
- シグナリングゲームでは、送り手のタイプごとに異なるシグナルを送る分離均衡と、同じシグナルを送る一括均衡があります。
- スペンスのモデルでは、能力の高い人ほど教育の費用が低いことで、生産性を高めない教育でも能力のシグナルとして機能します。

ここまでの道のり　このマニュアルでは、囚人のジレンマから出発し、ナッシュ均衡（第3〜4章）、部分ゲーム完全均衡（第5〜6章）、ベイジアン・ナッシュ均衡（第7章）、完全ベイジアン均衡（第8章）と、第1章の図1.2の地図を一周しました。どの均衡概念も「各プレイヤーが、他者の行動についての整合的な予想のもとで最適に行動する」というナッシュ均衡の考え方を、時間と情報の構造に合わせて精緻化したものです。

大学院とのつながり　大学院では、逐次均衡や直観的基準などの精緻化、メカニズム・デザイン、契約理論（逆選択・モラルハザード）、繰り返しゲームの評判モデルなどを学びます。いずれもこのマニュアルで学んだ均衡概念を土台としています。