経済数学攻略マニュアル（学部編）

関数・微分・最適化から、動学と不確実性の入口まで

目次

序　経済数学の地図 **4**

序.1 経済学はなぜ数学を使うのか 4

序.2 本書の構成 4

序.3 本書の読み方 5

1　関数・指数・対数 **6**

1.1　関数とは何か 6

1.2　べき関数とコブ＝ダグラス型 7

1.3　よく使う式変形のパターン 7

1.4　指数関数とネイピア数 9

1.5　対数関数 9

1.6　対数と成長率 10

1.7　和と積の記号 11

2　1変数の微分：「限界」の数学 **13**

2.1　限界と微分 13

2.2　微分の公式 14

2.3　平均と限界の関係 15

2.4　2階微分と凹関数・凸関数 16

2.5　1次近似とテイラー展開 17

2.6　弾力性 17

2.7 時間についての微分と成長率 18

3 多変数の微分：偏微分・全微分・陰関数 20

3.1 多変数関数と等高線 20
3.2 偏微分 20
3.3 全微分 21
3.4 陰関数と無差別曲線の傾き 22
3.5 多変数の連鎖律 24
3.6 比較静学 24
3.7 同次関数とオイラーの定理 25

4 最適化：一階条件とラグランジュ法 28

4.1 最適化問題の書き方 28
4.2 制約のない最適化：一階条件 28
4.3 二階条件と大域的な最適 29
4.4 制約付き最適化(1)：代入法 30
4.5 制約付き最適化(2)：ラグランジュ法 30
4.6 応用：費用最小化と費用関数 33
4.7 ラグランジュ乗数の意味と包絡線定理 34

5 集合・凸性・選好 38

5.1 集合と論理の記号 38
5.2 凸集合 39
5.3 凹関数・凸関数の一般的な定義 40
5.4 準凹関数と無差別曲線の凸性 40
5.5 選好の公理と効用関数 41
5.6 一般均衡理論で使う考え方 42

6 数列・級数・現在価値 44

6.1 数列 44
6.2 等比級数の和 44
6.3 無限級数と収束 45
6.4 現在価値と割引 46

6.5 生涯予算制約 47

7 差分方程式と動学 50

7.1 差分方程式とは 50

7.2 1階線形差分方程式 50

7.3 応用：くもの巣モデル 51

7.4 非線形の差分方程式と線形化 52

7.5 応用：ソローモデル 52

8 離散時間の動的最適化：オイラー方程式 55

8.1 2期間の消費・貯蓄モデル 55

8.2 CRRA型効用と異時点間の代替 57

8.3 多期間・無限期間の問題 58

8.4 横断性条件 59

8.5 ラムゼイモデル（離散時間） 60

9 確率と期待効用 62

9.1 確率変数と期待値 62

9.2 分散と共分散 63

9.3 期待効用 63

9.4 凹な効用と危険回避 63

9.5 危険回避度 65

9.6 不確実性のもとでのオイラー方程式 66

序章

経済数学の地図

> **この章の問い**　経済学ではどんな数学を、どんな順番で学べばよいのか。
> **この章で分かること**　本書（学部編）と続編（大学院編）の全体像と、各章が経済学のどの場面で使われるかです。

序.1　経済学はなぜ数学を使うのか

経済学の基本的な考え方は、次の3つにまとめられます。

1. **最適化**：家計や企業は、制約のもとで自分にとって一番よい選択をする。
2. **均衡**：多くの人の選択が、価格などを通じて互いに整合的になる。
3. **動学**：経済の状態（資本、借金、技術など）が時間を通じて変化していく。

「一番よい選択」を正確に表すには微分と最適化が、「互いに整合的」を表すには連立方程式が、「時間を通じた変化」を表すには数列・差分方程式が必要です。数学は、経済学の考え方を誤解なく書き表し、そこから結論を導くための**言語**だと考えてください。

序.2　本書の構成

本書は、前の章が次の章の前提になるように並んでいます。

章	数学	主に使う経済学の場面
1	関数・指数・対数	需要・供給、生産関数、成長率
2	1変数の微分	限界効用・限界費用、弾力性、収穫逓減
3	多変数の微分	限界代替率、成長会計、比較静学
4	最適化とラグランジュ法	効用最大化、費用最小化、利潤最大化
5	集合・凸性・選好	選好の公理、一般均衡理論の土台
6	数列・級数・現在価値	割引、生涯予算制約、資産価格
7	差分方程式と動学	ソローモデル、定常状態と安定性
8	離散時間の動的最適化	2期間モデル、オイラー方程式、ラムゼイモデル
9	確率と期待効用	不確実性、危険回避、保険

続編の大学院編では、線形代数、固有値と二次形式、最小二乗法の導出、微分方程式、ハミルトニアン（連続時間の動的最適化）、ベルマン方程式（動的計画法）を扱います。

序.3　本書の読み方

- 各章の冒頭には「この章の問い」があります。まず問いを意識してから読み進めてください。
- 式の導出は1行ずつ縦に並べ、右側に各行で何をしたかを書いています。手元で紙に写しながら読むと効果的です。
- 枠の役割は次のとおりです。**青枠**は要点、**赤枠**は図の読み方、灰色の枠は数式の読み方・計算例・用語の説明・補足、**緑枠**は発展（飛ばしても本筋は分かる内容）です。
- 初めて読むときは緑枠を飛ばし、2回目に読むと効率的です。

要点

- 経済学の骨組みは「最適化・均衡・動学」で、それぞれに対応する数学がある。
- 本書は、関数 → 微分 → 最適化 → 時間と不確実性、の順に積み上げる。
- 数学は「経済学のどんな考え方を表す道具か」を意識して学ぶ。

第1章

関数・指数・対数

ここまでの流れ　序章で、経済学の骨組みが「最適化・均衡・動学」であることを見ました。
この章の問い　経済学のモデルは、変数どうしの関係をどのような「関数」で書くのか。指数と対数はなぜこれほど頻繁に使われるのか。
この章で分かること　関数の基本用語、べき関数・指数関数・対数関数の性質、対数と成長率の関係、$\sum$ と $\prod$ の記号です。

1.1　関数とは何か

ある量が決まると、別の量がただ1つに決まる関係を**関数**と呼びます。所得 I が決まると消費 C が決まる、労働投入 L が決まると生産量 Y が決まる、といった関係です。

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

と書き、x を**独立変数**（入力）、y を**従属変数**（出力）と呼びます。

用語の説明

- **定義域**：入力 x がとりうる値の範囲。経済学では「消費量は0以上」のように、$x \geq 0$ や $x > 0$ が多い。
- **値域**：出力 y がとりうる値の範囲。
- $f : X \to Y$ という書き方は「集合 X の要素を集合 Y の要素に対応させる関数 f」という意味です。例えば $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ は「2財の消費量（0以上の実数の組）を受け取って、効用（実数）を返す関数」です。$\mathbb{R}$ は実数全体、$\mathbb{R}_+$ は0以上の実数全体を表します。
- **逆関数**：$y = f(x)$ を x について解いた関数 $x = f^{-1}(y)$。需要関数 $q = D(p)$ を p について解いた $p = D^{-1}(q)$ は**逆需要関数**と呼ばれます。

入力が2つ以上ある関数も使います。効用関数 $u(x_1, x_2)$ や生産関数 $Y = F(K, L)$ がその例です。これは第3章で詳しく扱います。

1.2 べき関数とコブ＝ダグラス型

x の何乗かで表される関数

$$f(x) = x^a \qquad (x > 0) \tag{1.2}$$

を**べき関数**と呼びます。a は分数や負の数でもかまいません。

数式の読み方：指数法則

$x, y > 0$ のとき、次が成り立ちます。

$$x^a x^b = x^{a+b}, \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, \qquad (x^a)^b = x^{ab},$$
$$(xy)^a = x^a y^a, \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \qquad x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

経済学の式変形の大半は、この6つの組み合わせです。

経済学で最もよく使う関数の1つが**コブ＝ダグラス型**です。

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{1.3}$$

数式の読み方

- Y は生産量、K は資本、L は労働、A は技術水準（全要素生産性）です。
- 指数の和が $\alpha + (1-\alpha) = 1$ なので、K と L を両方 t 倍すると Y もちょうど t 倍になります（**規模に関して収穫一定**）。実際、$A(tK)^{\alpha}(tL)^{1-\alpha} = t^{\alpha+1-\alpha}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = tY$ です。
- 労働者1人あたりで書くと、$y = Y/L$、$k = K/L$ として $y = Ak^{\alpha}$ になります（両辺を L で割り、$L^{1-\alpha}/L = L^{-\alpha}$ を使う）。マクロ経済学の成長モデルはこの形から出発します。

1.3 よく使う式変形のパターン

経済学の式変形は、指数法則を使った少数のパターンの組み合わせです。ここで型として覚えておくと、後の章の計算が格段に楽になります。

要点：4つの式変形パターン

1. **べき乗を外す**：$x^b = a\,(x, a > 0) \Rightarrow x = a^{1/b}$。両辺を $1/b$ 乗し、$(x^b)^{1/b} = x^{b\cdot\frac{1}{b}} = x$ を使う。
2. **比をとって共通部分を消す**：同じ因子を含む2つの式は、割り算をすると共通部分が消える。
3. **対数をとって足し算にする**：積やべき乗の式は、対数をとると和と定数倍の式になる。
4. **e の肩に乗せる**：$x^a = e^{a\ln x}$、$a^t = e^{t\ln a}$。指数の位置に変数がある式を、e の指数関数として扱える。

計算例：4つのパターンを使ってみる

パターン1：ソローモデル（第7章）の定常状態の条件 $sk^\alpha = \delta k$ を k について解きます。

$$
\begin{aligned}
sk^\alpha &= \delta k && \text{（出発点）}\\
\frac{s}{\delta} &= \frac{k}{k^\alpha} = k^{1-\alpha} && \text{（両辺を } \delta k^\alpha \text{ で割る、} x^a/x^b = x^{a-b}\text{）}\\
k &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} && \text{（両辺を } 1/(1-\alpha) \text{ 乗する）}
\end{aligned}
$$

パターン2：コブ＝ダグラス型の資本と労働の限界生産物（第3章）は $F_K = \alpha Y/K$、$F_L = (1-\alpha)Y/L$ です。比をとると Y が消えて

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{L}{K}$$

と、比率 L/K だけの簡単な式になります。

パターン3：$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ は $\ln Y = \ln A + \alpha\ln K + (1-\alpha)\ln L$。

パターン4：$2^t = e^{t\ln 2} \approx e^{0.693t}$。「毎期2倍」は「連続的な成長率 $\ln 2 \approx 69\%$」と同じです（後の「対数と成長率」の節の70の法則につながります）。

数式の読み方：コブ＝ダグラス型の等高線を陽関数で書く

無差別曲線 $x^a y^{1-a} = \bar{u}$ を y について解くと、パターン1から

$$y^{1-a} = \bar{u}\,x^{-a} \quad\Rightarrow\quad y = \bar{u}^{\frac{1}{1-a}}\,x^{-\frac{a}{1-a}}.$$

x の指数が負なので、x が増えると y は減る（右下がり）ことが式から読み取れます。$a = 1/2$ なら $y = \bar{u}^2/x$（直角双曲線）です。

1.4 指数関数とネイピア数

a^x のように**変数が肩に乗っている**関数を**指数関数**と呼びます。べき関数 x^a とは変数の位置が逆なので注意してください。

経済学で特に重要なのは、底が**ネイピア数** $e \approx 2.718$ の指数関数 e^x（$\exp(x)$ とも書く）です。

用語の説明：ネイピア数 e

e は次の極限で定義される数です。

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828.$$

極限（lim）とは「n をどこまでも大きくしたときに近づいていく値」のことです。経済学的には「年利100%を、1年を n 回に分けて複利で付けると、元本1が1年後に $(1+1/n)^n$ になる。分割を無限に細かくすると e になる」と読めます。つまり e は**連続複利**の数です。

一般に、成長率 g で連続的に成長する量は、t 期後に

$$x(t) = x(0)\, e^{gt} \tag{1.4}$$

になります。連続時間のマクロモデル（大学院編）では、この形が繰り返し現れます。

1.5 対数関数

$y = e^x$ を x について解いた逆関数を**自然対数**と呼び、$x = \ln y$（$\log y$ と書く本も多い）と表します。つまり $\ln y$ は「e を何乗すると y になるか」を表す数です。

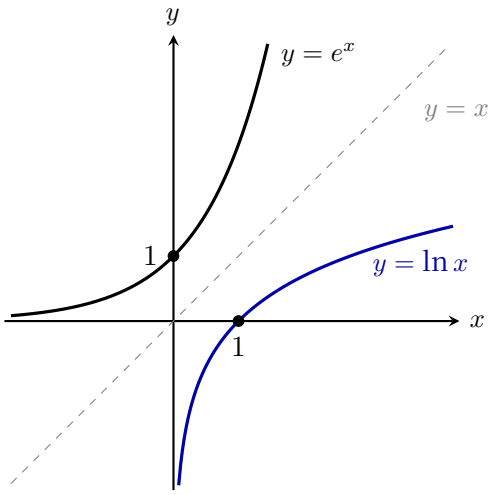
数式の読み方：対数の性質

$x, y > 0$ のとき、

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \qquad \ln x^a = a \ln x,$$
$$\ln e = 1, \qquad \ln 1 = 0.$$

- 対数は**掛け算を足し算に、べき乗を掛け算に**変えます。
- 例えば式(1.3)の両辺の対数をとると $\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln L$ と、**足し算の形**（線形）になります。回帰分析で生産関数を推定するときや、成長会計で成長率を分解するときに、この性質を使います。

図 1.1　指数関数と対数関数



$y = e^x$、$y = \ln x$、$y = x$ をそのまま描いた。

図の読み方

1. 黒の曲線が e^x、青の曲線が $\ln x$ です。2つは点線 $y = x$ について**左右対称**です。逆関数のグラフは、元のグラフを $y = x$ で折り返したものになります。
2. e^x は点 $(0, 1)$ を、$\ln x$ は点 $(1, 0)$ を通ります。$e^0 = 1$、$\ln 1 = 0$ に対応します。
3. e^x は右に行くほど急に増えます（指数的成長）。逆に $\ln x$ は右に行くほど増え方が鈍ります。この「増え方が鈍る」性質のため、$\ln x$ は限界効用が逓減する効用関数としてよく使われます（第2章）。

1.6　対数と成長率

ある量 x_t の成長率を $g_t = (x_{t+1} - x_t)/x_t$ とすると、成長率が小さいとき

$$\ln x_{t+1} - \ln x_t = \ln(1 + g_t) \approx g_t \tag{1.5}$$

が成り立ちます。

数式の読み方

- 左側の等号は、$x_{t+1} = (1+g_t)x_t$ の両辺の対数をとって $\ln x_{t+1} = \ln(1+g_t) + \ln x_t$ としたものです。
- 右側の近似 $\ln(1+g) \approx g$ は、g が0に近いときに成り立ちます（$g = 0.03$ なら $\ln 1.03 = 0.0296$）。理由は第2章の「1次近似」で説明します。
- つまり**対数の差は成長率**です。データ分析で「GDPの対数をとって差をとる」のは、成長率を計算しているのです。

計算例：倍増にかかる年数（70の法則）

年率 g で成長すると、t 年後に $(1+g)^t$ 倍になります。2倍になる年数は $(1+g)^t = 2$ を解いて

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+g)} \approx \frac{0.693}{g}.$$

$g = 0.02$（2%）なら約35年、$g = 0.07$ なら約10年です。「70を成長率（%）で割ると倍増年数」という経験則はここから来ています。

1.7 和と積の記号

多くの項を足したり掛けたりするときは、次の記号を使います。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n. \tag{1.6}$$

数式の読み方：$\sum$ の計算規則

- 定数は外に出せる：$\sum_i c\,x_i = c\sum_i x_i$。
- 和は分けられる：$\sum_i (x_i + y_i) = \sum_i x_i + \sum_i y_i$。
- 定数の和：$\sum_{i=1}^{n} c = nc$。
- 対数と組み合わせると $\ln \prod_i x_i = \sum_i \ln x_i$。第8章の生涯効用 $\sum_t \beta^t \ln c_t$ や、計量経済学の対数尤度で使います。

要点

- 関数は「入力が決まると出力が1つ決まる関係」。逆関数は入力と出力を入れ替えたもの。
- 指数法則と対数の性質（積を和に、べき乗を掛け算に）は、経済学の式変形の基本。
- ネイピア数 e は連続複利の数で、連続的な成長は $x(0)e^{gt}$ と書ける。
- 対数の差は（近似的に）成長率である。

次の章へ　経済学では「もう1単位増やすとどれだけ変わるか」という**限界**の考え方が中心です。これを数学で表すのが微分です。

大学院とのつながり　対数をとって線形にする発想は、大学院マクロの**対数線形化**（モデルを定常状態のまわりで成長率の式に直す方法）につながります。

第2章

1変数の微分：「限界」の数学

ここまでの流れ　第1章で、経済の関係を関数で書き、指数と対数で扱う方法を学びました。
この章の問い　「もう1単位増やすとどれだけ変わるか」という限界の考え方を、数学ではどう表すのか。増え方が鈍る（逓減する）ことは、どう表すのか。
この章で分かること　微分の定義と公式、2階微分と凹関数・凸関数、1次近似、弾力性、時間についての微分と成長率です。

2.1　限界と微分

経済学では、ある量を少しだけ増やしたときの変化を**限界**（marginal）と呼びます。もう1個食べたら満足がどれだけ増えるか（限界効用）、もう1単位作ったら費用がどれだけ増えるか（限界費用）、といった具合です。

関数 $y = f(x)$ で、x を Δx だけ増やしたときの「増え方の割合」は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

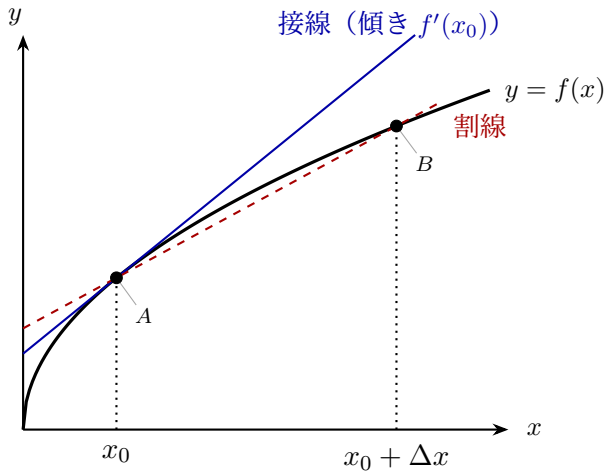
です。これを**平均変化率**と呼びます。Δx をどこまでも小さくしたときの値が**微分**（導関数）です。

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

数式の読み方

- $f'(x)$、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ はすべて同じものを表します。$\mathrm{d}x$ は「x のごくわずかな変化」と読みます。
- 図形的には、$f'(x)$ はグラフ上の点 $(x, f(x))$ における**接線の傾き**です（図2.1）。
- 経済学的には、$f'(x)$ は「x を1単位増やしたときに y がおよそどれだけ増えるか」です。$u'(c)$ は限界効用、$C'(q)$ は限界費用、$f'(k)$ は資本の限界生産物です。

図 2.1　接線の傾きとしての微分



$f(x) = 2\sqrt{x}$、$x_0 = 1$、$\Delta x = 3$。接線は $y = x + 1$（傾き $f'(1) = 1$）、割線の傾きは $(4-2)/3 = 2/3$。

図の読み方

1. 黒の曲線が $y = f(x)$ です。点 A と点 B を結ぶ赤の点線（**割線**）の傾きが、平均変化率 $\Delta y/\Delta x$ です。
2. 点 B を点 A に近づけていく（$\Delta x \to 0$）と、割線は青の直線に近づきます。これが点 A での**接線**で、その傾きが微分 $f'(x_0)$ です。
3. この曲線は右に行くほど傾きが緩やかになっています。「増え方が鈍る」この性質を、2階微分で表します（第2.4節）。

2.2　微分の公式

定義(2.1)から毎回計算するのは大変なので、次の公式を使います。

要点：微分の公式

- べき関数：$(x^a)' = a\,x^{a-1}$（a は任意の実数）。例：$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$。
- 指数関数：$(e^x)' = e^x$。対数関数：$(\ln x)' = 1/x$。
- 定数倍と和：$\big(af(x) + bg(x)\big)' = af'(x) + bg'(x)$。定数の微分は0。
- 積：$(fg)' = f'g + fg'$。　商：$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$。
- 合成関数（**連鎖律**）：$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$。

用語の説明：合成関数と連鎖律

合成関数とは、関数の出力を別の関数の入力にしたものです。例えば $h(x) = \ln(2x+1)$ は、$g(x) = 2x+1$ を計算してから $f(z) = \ln z$ に入れた $f(g(x))$ です。**連鎖律**（チェーンルール）は「外側の微分 × 内側の微分」という規則で、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}z)(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x)$ と、分数のように約分する形で覚えられます。

計算例：公式を組み合わせる

$$\big(\ln(2x+1)\big)' = \frac{1}{2x+1}\cdot 2 = \frac{2}{2x+1} \qquad \text{（連鎖律：外側 } 1/z\text{、内側 } 2\text{）}$$

$$\big(e^{gt}\big)' = e^{gt}\cdot g = g\,e^{gt} \qquad \text{（}t\text{ で微分。内側 } gt \text{ の微分は } g\text{）}$$

$$\big(x^2e^x\big)' = 2x\,e^x + x^2e^x \qquad \text{（積の微分）}$$

補足：公式の確かめ方と指数関数の微分

- 公式は定義(2.1)から確かめられます。例えば $f(x) = x^2$ なら $\dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ で、$\Delta x \to 0$ とすると $2x$ になります。
- $(e^x)' = e^x$ は「増える速さが、そのときの値自身に等しい」という性質で、成長率 $(e^x)'/e^x$ がいつも1であることを意味します。e はこの性質をもつ唯一の底です。
- 一般の底の指数関数は、第1章のパターン4で $a^x = e^{x\ln a}$ と直してから連鎖律を使うと $(a^x)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a$ です。

2.3 平均と限界の関係

費用 $C(q)$ について、1単位あたりの費用を**平均費用** $AC(q) = C(q)/q$、追加1単位の費用を**限界費用** $MC(q) = C'(q)$ と呼びます。両者の間には次の関係があります。

$$\begin{aligned} AC'(q) &= \frac{C'(q)\,q - C(q)\cdot 1}{q^2} && \text{（商の微分）} \\ &= \frac{1}{q}\Big(C'(q) - \frac{C(q)}{q}\Big) = \frac{1}{q}\big(MC(q) - AC(q)\big) && \text{（}\tfrac{1}{q}\text{ でくくる）} \end{aligned} \tag{2.2}$$

数式の読み方：式(2.2)の読み方

- $MC > AC$ なら $AC' > 0$：平均費用は上がっていく。$MC < AC$ なら平均費用は下がっていく。
- したがって、平均費用が最小になる点（$AC' = 0$）では $MC = AC$。**限界費用曲線は平均費用曲線の最低点を通る**という学部ミクロの性質は、この1行の計算から出てきます。
- 直観：クラスの平均点より高い点の生徒が転入してくれば平均点は上がる。「限界」が「平均」より大きければ平均は上がる、というだけのことです。平均生産物と限界生産物の関係も同じです。

計算例：固定費用のある費用関数

$C(q) = F + cq^2$（F は固定費用）なら $AC = F/q + cq$、$MC = 2cq$。$AC' = -F/q^2 + c = 0$ より $q = \sqrt{F/c}$ で、そこでは $AC = \sqrt{Fc} + \sqrt{Fc} = 2\sqrt{Fc}$、$MC = 2c\sqrt{F/c} = 2\sqrt{Fc}$ となり、確かに一致します。

2.4 2階微分と凹関数・凸関数

微分 $f'(x)$ もまた x の関数なので、もう一度微分できます。これを**2階微分** $f''(x)$（$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$）と呼びます。$f''(x)$ は「傾きがどう変化するか」を表します。

数式の読み方：2階微分の符号の意味

- $f''(x) < 0$：x が増えるほど傾き $f'(x)$ が小さくなる。グラフは上に膨らんだ形で、**凹関数**（concave）と呼びます。限界効用の逓減（$u'' < 0$）、限界生産物の逓減（$f'' < 0$）を表します。
- $f''(x) > 0$：傾きがだんだん大きくなる。グラフは下に膨らんだ形で、**凸関数**（convex）と呼びます。限界費用の逓増（$C'' > 0$）を表します。

例：$u(c) = \ln c$ なら $u'(c) = 1/c > 0$、$u''(c) = -1/c^2 < 0$。消費が増えるほど効用は増えるが、その増え方は鈍っていきます。

補足：「凹」「凸」の呼び方

日本語の「凸関数」は英語の convex、「凹関数」は concave です。漢字の形（凸＝上に出っ張る）とは逆に感じるかもしれませんが、「グラフの**下側**の領域が凸か」ではなく「グラフの**上側**の領域が凸な集合か」で名付けられています（第5章で集合の凸性を学びます）。混乱したら f'' の符号で確認してください。

2.5　1次近似とテイラー展開

接線は、接点の近くでは元の曲線とほとんど重なっています。そこで、x_0 の近くで

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h \tag{2.3}$$

と近似できます。これを**1次近似**（線形近似）と呼びます。

計算例：$\ln(1+g) \approx g$ の理由

$f(x) = \ln x$、$x_0 = 1$、$h = g$ とすると、$f(1) = 0$、$f'(1) = 1/1 = 1$ なので

$$\ln(1+g) \approx 0 + 1 \cdot g = g.$$

第1章の「対数の差は成長率」はこの1次近似です。

さらに精度を上げるには2次の項まで含めます。

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2. \tag{2.4}$$

このように、微分を使って関数を多項式で近似することを**テイラー展開**と呼びます。2次の項は、第9章で危険回避の度合いを測るときに使います。

2.6　弾力性

「x が1%増えたとき、y は何%変化するか」を**弾力性**と呼びます。

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}y/y}{\mathrm{d}x/x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{x}{y} = \frac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}\ln x}. \tag{2.5}$$

数式の読み方

- $\mathrm{d}y/y$ は y の変化率、$\mathrm{d}x/x$ は x の変化率です。弾力性は**変化率どうしの比**なので、単位（円、ドル、個）に左右されません。
- 最後の等号は、$\mathrm{d}\ln y = \mathrm{d}y/y$（ln の微分が $1/y$ であることから）を使っています。つまり、**両辺の対数をとって微分すると弾力性が出る**。
- べき関数 $y = Ax^a$ では、$\ln y = \ln A + a \ln x$ なので、弾力性は常に a で一定です。コブ＝ダグラス型の指数 α が「資本の産出弾力性」と呼ばれるのはこのためです。
- 需要の価格弾力性は、$q = D(p)$ について $-\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\dfrac{p}{q}$ と、正の値になるように負号を付けて定義することが多いです。

計算例：価格弾力性と売上、独占のマークアップ

売上（収入）$R(p) = p\,q(p)$ を価格で微分すると

$$\begin{aligned} R'(p) &= q(p) + p\,q'(p) && \text{（積の微分）} \\ &= q\left(1 + \frac{p}{q}q'(p)\right) = q\,(1-\varepsilon) && (\varepsilon = -\frac{p}{q}q'(p)) \end{aligned}$$

需要が**弾力的**（$\varepsilon > 1$）なら値上げで売上が減り、**非弾力的**（$\varepsilon < 1$）なら値上げで売上が増えます。同様に、数量で表した限界収入は $MR = p(1 - 1/\varepsilon)$ となり、独占企業の利潤最大化条件 $MR = MC$ から

$$p = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\,MC$$

が得られます。$\varepsilon/(\varepsilon-1)$ を**マークアップ率**と呼び、需要が弾力的なほど価格は限界費用に近づきます。ニューケインジアン・モデルの価格設定の式は、この形をしています。

2.7 時間についての微分と成長率

変数が時間 t とともに変化するとき、$x(t)$ を t で微分したものを、上に点をつけて $\dot{x}$ と書きます。

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{成長率} = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{\mathrm{d}\ln x(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{2.6}$$

数式の読み方

- $\equiv$ は「左辺を右辺で定義する」という意味の記号です。
- $\dot{x}/x$ は「1年あたり何%増えるか」という連続時間での成長率です。式(1.4)の $x(t) = x(0)e^{gt}$ なら、$\ln x(t) = \ln x(0) + gt$ を t で微分して $\dot{x}/x = g$ です。
- 積の成長率は成長率の和、比の成長率は成長率の差です。$y = k^{\alpha}$ なら $\dot{y}/y = \alpha\,\dot{k}/k$、$k = K/L$ なら $\dot{k}/k = \dot{K}/K - \dot{L}/L$。両辺の対数をとって t で微分すれば確かめられます。

要点

- 微分 $f'(x)$ は接線の傾きで、経済学では「限界」を表す。
- 2階微分の符号で、限界的な効果が逓減するか（凹、$f'' < 0$）逓増するか（凸、$f'' > 0$）が分かる。
- 1次近似 $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ は、曲線を接線で置き換える考え方。
- 弾力性は $\mathrm{d}\ln y/\mathrm{d}\ln x$。成長率は $\mathrm{d}\ln x/\mathrm{d}t$。対数をとってから微分すると見通しがよい。

次の章へ　効用は複数の財に、生産は資本と労働に依存します。次の章では、変数が2つ以上ある関数の微分（偏微分・全微分）を学びます。

大学院とのつながり　1次近似は、大学院マクロで非線形なモデルを定常状態のまわりで線形化するときの基本道具です（大学院編）。

第3章

多変数の微分：偏微分・全微分・陰関数

> **ここまでの流れ**　第2章で、1変数の関数の微分が「限界」を表すことを学びました。
> **この章の問い**　効用が2つの財に、生産が資本と労働に依存するとき、「1つだけ増やしたときの効果」や「同時に変わったときの効果」をどう表すのか。無差別曲線の傾きはどう計算するのか。
> **この章で分かること**　偏微分、全微分、陰関数とその微分（陰関数定理）、比較静学、同次関数とオイラーの定理です。

3.1　多変数関数と等高線

2つの財の消費量 (x, y) から効用 $u(x, y)$ が決まる、というように、入力が2つ以上ある関数を**多変数関数**と呼びます。入力が2つなら、グラフは3次元の「山」の形になります。

3次元の図は描きにくいので、経済学では山の**等高線**を描きます。効用関数の等高線、つまり「効用が同じ値 $\bar{u}$ になる (x, y) の集まり」

$$\{(x, y) : u(x, y) = \bar{u}\}$$

が**無差別曲線**です。生産関数の等高線は**等量曲線**と呼ばれます。

用語の説明：集合の書き方

$\{(x, y) :$ 条件$\}$ は「条件を満たす (x, y) を全部集めたもの」という意味です（**集合**、第5章）。コロン「:」は「ただし」と読みます。縦棒「|」を使う本もあります。

3.2　偏微分

2変数関数 $z = f(x, y)$ で、y **を一定にしたまま** x だけを少し動かしたときの変化の割合を、x についての**偏微分**と呼びます。

$$f_x(x, y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

計算するときは、**他の変数を定数とみなして、普通に微分**すれば構いません。∂ は「ラウンド」「デル」などと読み、「他の変数は止めている」ことを示す記号です。

計算例：コブ＝ダグラス型の限界生産物

$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ について、

$$F_K = \alpha A K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha\frac{Y}{K} \qquad (L \text{ を定数とみなして } K \text{ で微分})$$

$$F_L = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y}{L} \qquad (K \text{ を定数とみなして } L \text{ で微分})$$

資本の限界生産物は「平均生産物 Y/K の α 倍」です。K を増やすと Y/K が下がるので、限界生産物は逓減します。

偏微分をもう一度偏微分したものを**2階偏微分**と呼びます。$f_{xx} = \partial^2 f/\partial x^2$、$f_{xy} = \partial^2 f/\partial y \partial x$（$x$ で微分してから y で微分）などです。

数式の読み方：交差偏微分の意味

- $f_{xx} < 0$：x の限界的な効果が逓減する（例：資本の限界生産物の逓減 $F_{KK} < 0$）。
- f_{xy}：y が増えたとき、x の限界的な効果がどう変わるか。$F_{KL} > 0$ なら「労働者が増えると、機械1台の追加の効果が大きくなる」（資本と労働は補完的）。
- 通常の関数では、微分の順番を入れ替えても結果は同じです：$f_{xy} = f_{yx}$（**ヤングの定理**）。

3.3 全微分

x と y が**同時に**少しずつ（$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$）変化したとき、z の変化はそれぞれの効果の和で近似できます。

$$\mathrm{d}z = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y. \tag{3.2}$$

これを**全微分**と呼びます。1変数の1次近似（第2章）を、変数が複数ある場合に広げたものです。

計算例：成長会計

$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ の両辺の対数をとって全微分すると、

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L \qquad \text{（対数の性質）}$$
$$\mathrm{d}\ln Y = \mathrm{d}\ln A + \alpha\,\mathrm{d}\ln K + (1-\alpha)\,\mathrm{d}\ln L \qquad \text{（全微分）}$$

$\mathrm{d}\ln x$ は x の成長率なので、「産出の成長率 ＝ 技術の成長率 ＋ α×資本の成長率 ＋ $(1-\alpha)$×労働の成長率」となります。技術の成長率は直接観測できないので、他の項を差し引いた残りとして計算します（**ソロー残差**）。

3.4 陰関数と無差別曲線の傾き

無差別曲線 $u(x,y) = \bar{u}$ は、y を x の関数として表していると考えられます（x を決めると、効用を $\bar{u}$ に保つ y が決まる）。しかし、$y = \ldots$ という形にはっきり解けているわけではありません。このような関数を**陰関数**と呼びます。

用語の説明：陽関数と陰関数

- **陽関数**（explicit function）：$y = 9/x$ のように、$y =$（x の式）の形で書かれた関数。
- **陰関数**（implicit function）：$\sqrt{xy} = 3$ のように、方程式 $G(x,y) = 0$ の中に x と y の関係が「隠れて」いる関数。解けば陽関数になることもあるが、解けない場合もある。

陰関数のまま、つまり y について解かずに、その傾き $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を求められる、というのが次の陰関数定理です。

無差別曲線の上では効用が変わらないので、全微分(3.2)で $\mathrm{d}u = 0$ とおきます。

$$0 = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y \qquad \text{（曲線上では効用一定）}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u_x}{u_y} \qquad \text{（}\mathrm{d}y\text{ について解き }\mathrm{d}x\text{ で割る）} \tag{3.3}$$

要点：陰関数定理（2変数）

$G(x,y) = 0$ を満たす点の近くで $G_y \neq 0$ なら、その近くで y は x の関数 $y = h(x)$ として表せて、その傾きは

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{G_x}{G_y}$$

である。（y について式を解かなくても、傾きが分かる。）

数式の読み方：限界代替率

- 式(3.3)の右辺の符号を正にした u_x/u_y を**限界代替率**（MRS）と呼びます。「x を1単位増やしてもらえるなら、y を何単位まで手放してよいか」という、自分の中での交換比率です。
- 分子・分母はそれぞれの財の限界効用なので、「x の限界効用が y の2倍なら、x 1単位は y 2単位と同じ価値」と読めます。
- 生産関数の等量曲線では、同じ計算で F_L/F_K が**技術的限界代替率**になります。

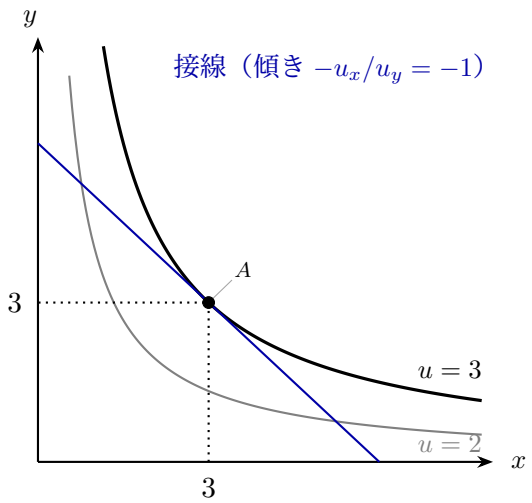
計算例：コブ＝ダグラス型効用の限界代替率

$u(x,y) = x^a y^{1-a}$ の偏微分は、次のように「u を使って」書くと見通しがよくなります。

$$
\begin{aligned}
u_x &= a\,x^{a-1}y^{1-a} = a\,\frac{x^a y^{1-a}}{x} = a\,\frac{u}{x} && (x^{a-1} = x^a/x) \\
u_y &= (1-a)\,x^a y^{-a} = (1-a)\,\frac{u}{y} && (\text{同様}) \\
\mathrm{MRS} &= \frac{u_x}{u_y} = \frac{a}{1-a}\cdot\frac{y}{x} && (\text{比をとると } u \text{ が消える})
\end{aligned}
$$

「べき関数を x_i で偏微分すると、（指数）×（元の関数）÷ x_i」という形は、コブ＝ダグラス型の計算で何度も使います。限界代替率は y/x の比だけで決まり、x を多く持つほど小さくなる（逓減する）ことが式から読み取れます。

図 3.1　無差別曲線とその傾き



$u(x,y) = \sqrt{xy}$。無差別曲線 $u = 3$ は $y = 9/x$、$u = 2$ は $y = 4/x$。点 $A = (3,3)$ での傾きは $-u_x/u_y = -y/x = -1$、接線は $y = 6 - x$。

図の読み方

1. 黒の曲線は効用が3の無差別曲線、灰色の曲線は効用が2の無差別曲線です。右上の曲線ほど効用が高くなります。
2. 点 A での接線（青）の傾きが $-u_x/u_y$ です。ここでは $u_x/u_y = y/x = 1$ なので、点 A では「x 1単位と y 1単位が同じ価値」です。
3. 曲線に沿って右下に進むと、傾きが緩やかになります（y/x が小さくなる）。x をたくさん持つほど、x を追加でもらうために手放してよい y が減る、という**限界代替率の逓減**を表しています。

3.5 多変数の連鎖律

$z = f(x, y)$ で、x と y がどちらも時間 t とともに動く（$x = x(t)$、$y = y(t)$）とき、z の時間変化は、全微分(3.2)の両辺を $\mathrm{d}t$ で割った

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

で与えられます。これを**多変数の連鎖律**と呼びます。1変数の連鎖律「外側の微分 × 内側の微分」を、経路ごとに足し合わせたものです。

数式の読み方：式(3.4)の読み方

- 右辺の第1項は「x が動いたことによる z の変化」、第2項は「y が動いたことによる z の変化」です。
- 例えば $Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$ の両辺の対数を t で微分すると、第2章の記号で
  $$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}$$
  となります。上の成長会計の式を、連続時間で厳密に書いたものです。
- x と y がさらに2つの変数 (s, t) に依存する場合も、$\dfrac{\partial z}{\partial s} = f_x\dfrac{\partial x}{\partial s} + f_y\dfrac{\partial y}{\partial s}$ と同じ形になります。オイラーの定理（本章の最後）の証明は、この形を使います。

3.6 比較静学

経済モデルの均衡は、多くの場合「方程式の解」として決まります。そして、外から与えられる条件（所得、税率、技術など）が変わったとき、均衡がどちらに動くかを調べることを**比較静学**と呼びます。

用語の説明：内生変数と外生変数

- **内生変数**：モデルの中で決まる変数（均衡価格、均衡数量など）。
- **外生変数**（パラメータ）：モデルの外から与えられる変数（所得、税率、技術水準など）。

比較静学は「外生変数が変わったとき、内生変数がどう変わるか」を調べる分析です。

均衡条件が $G(x^*, a) = 0$（x^* が内生変数、a が外生変数）と書けるとき、陰関数定理から

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}a} = -\frac{G_a}{G_x} \tag{3.5}$$

が得られます。均衡を具体的に解かなくても、変化の**方向**（符号）が分かるのがこの方法の強みです。

計算例：所得が増えると価格はどう動くか

需要 $D(p, I)$（p：価格、I：所得）、供給 $S(p)$ の市場で、均衡条件は $G(p, I) \equiv D(p, I) - S(p) = 0$ です。

$$\begin{aligned} G_p &= D_p - S_p && (p \text{ で偏微分}) \\ G_I &= D_I && (I \text{ で偏微分}) \\ \frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}I} &= -\frac{D_I}{D_p - S_p} = \frac{D_I}{S_p - D_p} && (\text{式(3.5)}) \end{aligned}$$

需要曲線が右下がり（$D_p < 0$）、供給曲線が右上がり（$S_p > 0$）なら分母は正です。財が上級財（$D_I > 0$）なら、所得が増えると均衡価格は上がります。関数の具体形を知らなくても、符号だけで結論が出ています。

3.7 同次関数とオイラーの定理

すべての変数を t 倍したとき、関数の値が t^k 倍になる関数をk**次同次関数**と呼びます。

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \qquad (\text{すべての } t > 0). \tag{3.6}$$

数式の読み方：経済学での意味

- 生産関数が1次同次 $\iff$ **規模に関して収穫一定**（投入をすべて2倍にすると生産も2倍）。
- 需要関数が価格と所得について0次同次 $\iff$ すべての価格と所得が2倍になっても需要は変わらない（**貨幣錯覚がない**）。
- 1次同次関数の偏微分は0次同次です。例えば限界生産物 $F_K(K,L)$ は、K と L を両方2倍しても変わりません。したがって F_K は比率 $k = K/L$ だけで決まります。

$\iff$ は「左と右が同じことを言っている（同値）」という記号です。

要点：オイラーの定理

$F(K,L)$ が1次同次なら

$$F_K \cdot K + F_L \cdot L = F(K,L).$$

数式の読み方

- 導き方：$F(tK,tL) = tF(K,L)$ の両辺を t で微分すると、左辺は連鎖律で $F_K \cdot K + F_L \cdot L$、右辺は $F(K,L)$。$t = 1$ とおけば定理が出ます。
- 経済学的な意味：競争的な市場では要素価格が限界生産物に等しい（$r = F_K$、$w = F_L$、第4章）。このとき $rK + wL = Y$、つまり**生産物はちょうど資本と労働への支払いに分け尽くされ**、利潤はゼロになります。マクロモデルで「企業の利潤がゼロ」とされるのはこのためです。

要点

- 偏微分は「他の変数を止めて1つだけ動かす」効果。全微分は「同時に動かす」効果の合計。
- 陰関数定理により、方程式を解かずに曲線の傾き $-G_x/G_y$ が求められる。無差別曲線の傾きは $-u_x/u_y$（限界代替率）。
- 比較静学は陰関数定理の応用で、外生変数の変化が均衡に与える影響の符号を調べる。
- 1次同次関数ではオイラーの定理 $F_K K + F_L L = F$ が成り立ち、競争均衡で生産物が要素所得に分け尽くされる。

次の章へ　道具がそろったので、いよいよ経済学の中心である「最適化」を数学で表します。

大学院とのつながり　変数が多くなると、比較静学は連立方程式になり、行列（大学院編）を使って解きます。陰関数定理も多変数版に一般化されます。

第4章

最適化：一階条件とラグランジュ法

ここまでの流れ　第2・3章で、微分・偏微分・全微分・陰関数の道具をそろえました。
この章の問い　「一番よい選択」を数学ではどう書き、どう求めるのか。予算などの制約があるときはどうするのか。
この章で分かること　max と arg max の違い、一階条件と二階条件、ラグランジュ法とラグランジュ乗数の意味、包絡線定理、不等式制約（発展）です。

4.1　最適化問題の書き方

経済主体の行動は、次の形の**最適化問題**として書かれます。

$$\max_{x} \; f(x) \qquad \text{s.t.} \quad x \text{ が制約を満たす.} \tag{4.1}$$

用語の説明：最適化の記号

- $\max_x f(x)$：x を動かしたときの $f(x)$ の**最大値**そのもの（数値）。x を**選択変数**（操作変数）、f を**目的関数**と呼びます。
- $\arg\max_x f(x)$：$f(x)$ を最大にする x **の値**（argument of the maximum）。例えば $f(x) = 4x - x^2$ なら、$\max_x f(x) = 4$、$\arg\max_x f(x) = 2$ です。
- min と arg min は、最小化について同じ意味です。最小二乗法は「残差平方和を最小にする係数」なので、$\hat{\beta} = \arg\min_b \sum_i (y_i - x_i b)^2$ と書かれます。
- s.t. は subject to の略で「〜という制約のもとで」と読みます。
- 最適な x を x^* と書くことが多く、$x^* = \arg\max_x f(x)$、$f(x^*) = \max_x f(x)$ という関係になります。

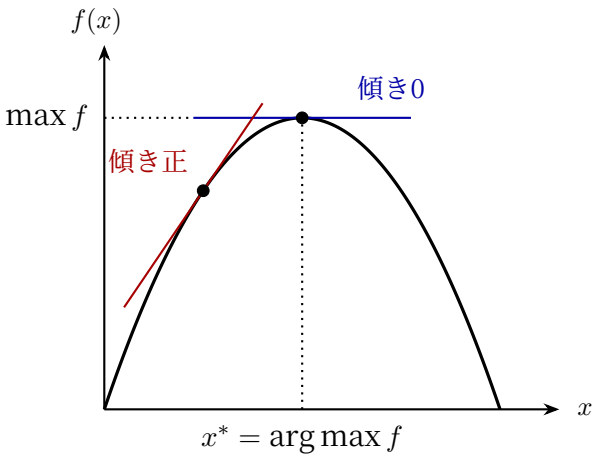
4.2　制約のない最適化：一階条件

山の頂上では、接線が水平になります。したがって、x^* で f が最大（最小）になるなら

$$f'(x^*) = 0 \tag{4.2}$$

が成り立ちます。これを**一階条件**（first-order condition, FOC）と呼びます。

図 4.1　最大値と一階条件



$f(x) = 4x - x^2$。$f'(x) = 4 - 2x = 0$ より $x^* = 2$、最大値 $f(2) = 4$。$x = 1$ での接線の傾きは $f'(1) = 2$。

図の読み方

1. 頂上より左（$x < x^*$）では接線の傾きが正です（赤）。x を増やせば f が増えるので、まだ頂上ではありません。
2. 頂上より右では傾きが負で、x を減らせば f が増えます。
3. 増やしても減らしても改善できない点は、傾きがちょうど0の点（青）です。これが一階条件 $f'(x^*) = 0$ の意味です。横軸の目盛りが $\arg\max$、縦軸の目盛りが $\max$ です。

数式の読み方：経済学での読み方

利潤 $\pi(q) = pq - C(q)$ を最大にする企業の一階条件は $\pi'(q) = p - C'(q) = 0$、つまり**価格 = 限界費用**です。「もう1単位作ると、売上が p 増え、費用が $C'(q)$ 増える。前者が大きければ増産し、後者が大きければ減産する。等しいところで止まる」と読みます。一階条件は、いつも「**限界的な便益 = 限界的な費用**」という形をしています。

4.3　二階条件と大域的な最適

一階条件は、谷底（最小値）でも成り立ってしまいます。最大か最小かを区別するのが二**階条件**です。

- $f'(x^*) = 0$ かつ $f''(x^*) < 0$ なら、x^* はその近くで最大（**極大**）。
- $f'(x^*) = 0$ かつ $f''(x^*) > 0$ なら、x^* はその近くで最小（**極小**）。

要点：凹関数なら一階条件で十分

f が凹関数（すべての x で $f''(x) \le 0$）なら、一階条件 $f'(x^*) = 0$ を満たす x^* は、全体の中での最大値（**大域的な最大**）を与える。

補足：経済学のモデルで凹性を仮定する理由

経済学では効用関数や生産関数に「限界効用の逓減」「限界生産物の逓減」、つまり凹性を仮定することがほとんどです。これは現実の観察に合うだけでなく、「一階条件を解けば最適解が求まる」ことを保証してくれる、数学上とても便利な仮定でもあります。

多変数の場合も、一階条件はすべての偏微分が0になることです：$f_x = 0$、$f_y = 0$。利潤最大化 $\max_{K,L}\ F(K,L) - rK - wL$ の一階条件は

$$F_K(K,L) = r, \qquad F_L(K,L) = w \tag{4.3}$$

で、**限界生産物 = 要素価格**です。多変数の二階条件はヘッセ行列という行列で判定します（大学院編）。

4.4 制約付き最適化(1)：代入法

消費者は予算の範囲内でしか買えません。

$$\max_{x,y}\ u(x,y) \qquad \text{s.t.} \quad p_x x + p_y y = I. \tag{4.4}$$

最も素朴な方法は、制約を y について解いて目的関数に代入し、制約のない問題にすることです：$y = (I - p_x x)/p_y$ を代入して $\max_x u\big(x, (I - p_x x)/p_y\big)$。連鎖律で微分してゼロとおくと

$$u_x + u_y \cdot \left(-\frac{p_x}{p_y}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_x}{u_y} = \frac{p_x}{p_y}.$$

これは**限界代替率 = 価格比**という、学部ミクロの最適消費の条件です。

4.5 制約付き最適化(2)：ラグランジュ法

変数や制約が多くなると代入法は大変です。そこで使うのが**ラグランジュ法**です。一般に

$$\max_{x,y}\ f(x,y) \qquad \text{s.t.} \quad g(x,y) = c$$

を考えます。

要点：ラグランジュ法の手順

1. 制約を「$=0$」の形にする：$c - g(x,y) = 0$。
2. 新しい変数 λ（**ラグランジュ乗数**）を掛けて目的関数に足し、**ラグランジュ関数**を作る：
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\big[c - g(x,y)\big].$$
3. x、y、λ で偏微分してゼロとおく（一階条件）：
$$\mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0, \qquad \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0, \qquad \mathcal{L}_\lambda = c - g(x,y) = 0.$$
4. 最初の2式から λ を消去して $f_x/f_y = g_x/g_y$ を得て、制約式と連立して解く。

数式の読み方：ラグランジュ法は何をしているのか

- $\mathcal{L}_\lambda = 0$ は制約式そのものです。ラグランジュ関数の一階条件を解けば、自動的に制約が満たされます。
- $f_x/f_y = g_x/g_y$ は、目的関数の等高線の傾きと制約式の傾きが等しい、つまり2つの曲線が**接している**ことを表します（図4.2）。効用最大化では「無差別曲線と予算線が接する」です。
- $f_x = \lambda g_x$ は「x を増やす限界的な便益 f_x」と「x が制約を使う量 g_x に、制約の値段 λ を掛けたもの」が等しい、と読めます。λ が制約の「値段」である理由は次節で説明します。

計算例：コブ＝ダグラス型効用の需要関数

$u = a\ln x + (1-a)\ln y$（$0 < a < 1$）、予算 $p_x x + p_y y = I$ とします。

$$\mathcal{L} = a\ln x + (1-a)\ln y + \lambda(I - p_x x - p_y y) \qquad \text{（ラグランジュ関数）}$$
$$\mathcal{L}_x = \frac{a}{x} - \lambda p_x = 0, \qquad \mathcal{L}_y = \frac{1-a}{y} - \lambda p_y = 0 \qquad \text{（一階条件）}$$
$$p_x x = \frac{a}{\lambda}, \qquad p_y y = \frac{1-a}{\lambda} \qquad \text{（それぞれ変形）}$$
$$I = p_x x + p_y y = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{（足し合わせて予算制約へ）}$$
$$x^* = \frac{aI}{p_x}, \qquad y^* = \frac{(1-a)I}{p_y}, \qquad \lambda^* = \frac{1}{I} \qquad \text{（代入して整理）}$$

所得の割合 a を x に、$1-a$ を y に使う、という需要関数が得られました。

数式の読み方：なぜ対数の形の効用関数で解いたのか

コブ＝ダグラス型の効用はふつう $U(x,y)=x^a y^{1-a}$ と書かれます。上の計算例では、その対数 $u=\ln U=a\ln x+(1-a)\ln y$ を使いました。これは次の理由で許されます。

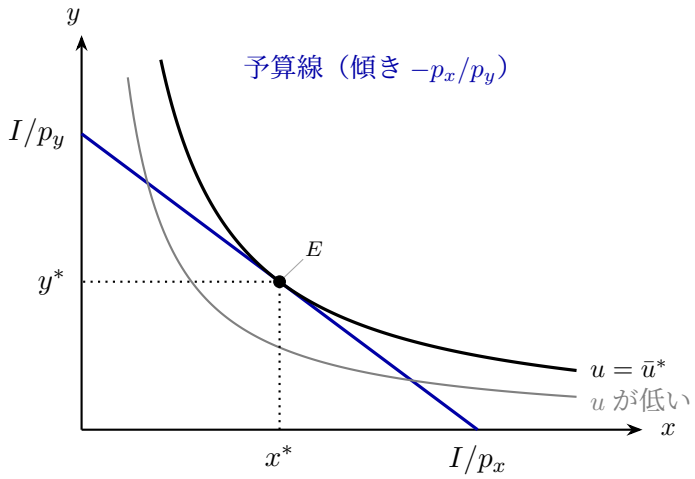
- ln は増加関数なので、$U(x^*,y^*)\geq U(x,y)$ と $\ln U(x^*,y^*)\geq \ln U(x,y)$ は同値です。したがって、**U を最大にする点（$\arg\max$）と $\ln U$ を最大にする点は同じ**です（第5章の序数的効用の考え方）。
- 変わるのは最大値とラグランジュ乗数の値だけです。需要関数を求めるのが目的なら、計算しやすい形に変換してから解いてかまいません。
- 対数をとると、べき乗が掛け算に、積が和に変わり（第1章パターン3）、微分が a/x のような簡単な形になります。

もとの形のまま解いても同じ答えになります。$\mathcal{L}=x^a y^{1-a}+\lambda(I-p_x x-p_y y)$ の一階条件は、第3章の計算から $aU/x=\lambda p_x$、$(1-a)U/y=\lambda p_y$。これらを $p_x x=aU/\lambda$、$p_y y=(1-a)U/\lambda$ と書き直して足すと $I=U/\lambda$ なので、$p_x x=aI$、$p_y y=(1-a)I$ となり、上と同じ需要関数が得られます。

数式の読み方：需要関数 $x^*=aI/p_x$ の読み方

- $p_x x^*/I=a$：所得のうち x に使う割合（**支出シェア**）が、価格や所得によらず一定です。効用関数の指数 a は「支出シェア」と読めます。
- 需要の所得弾力性は1、自己価格弾力性も1（$\ln x^*=\ln a+\ln I-\ln p_x$ を微分すれば分かる）、y の価格には反応しません（交差価格弾力性0）。
- 計算が簡単なうえに性質がはっきりしているため、マクロ経済学でもコブ＝ダグラス型が標準的に使われます。ただし「支出シェア一定」は強い仮定でもあり、それを緩めたのが CES 型（緑枠、本章末）です。

図 4.2　効用最大化：無差別曲線と予算線の接点



$u=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln y$、$p_x=1$、$p_y=2$、$I=12$。最適点 $E=(6,3)$。無差別曲線は $xy=18$（黒）と $xy=10$（灰）。予算線は $y=6-x/2$。

図の読み方

1. 青の直線が予算線で、消費者はこの線上（またはその内側）の組合せしか買えません。
2. 灰色の無差別曲線は予算線と2点で交わります。交点では「無差別曲線の傾き ≠ 予算線の傾き」なので、予算線に沿って動けば、より右上の無差別曲線に移れます。
3. 黒の無差別曲線は予算線と点 E で**接して**います。これより右上の無差別曲線には予算線が届きません。接点では $u_x/u_y=p_x/p_y$ が成り立ちます。

4.6　応用：費用最小化と費用関数

企業は、生産量 q をもっとも安く作る資本と労働の組合せを選びます。

$$\min_{K,L}\ rK+wL \qquad \text{s.t.}\quad AK^{\alpha}L^{1-\alpha}=q. \tag{4.5}$$

$$\mathcal{L}=rK+wL+\lambda\big(q-AK^{\alpha}L^{1-\alpha}\big) \qquad \text{（ラグランジュ関数）}$$

$$r=\lambda\,\alpha\frac{q}{K},\qquad w=\lambda(1-\alpha)\frac{q}{L} \qquad \text{（一階条件（第3章の } F_K=\alpha Y/K \text{ の形））}$$

$$\frac{r}{w}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{L}{K}\ \Rightarrow\ rK=\frac{\alpha}{1-\alpha}\,wL \qquad \text{（比をとる（パターン2））}$$

費用最小点では、資本への支払いと労働への支払いの比が $\alpha:(1-\alpha)$ で一定になります。一階条件をそれぞれ $rK=\alpha\lambda q$、$wL=(1-\alpha)\lambda q$ と書き直して足すと、総費用は $C=rK+wL=\lambda q$ です。

計算例：費用関数を求める

$rK=\alpha\lambda q$ と $wL=(1-\alpha)\lambda q$ から $K=\alpha\lambda q/r$、$L=(1-\alpha)\lambda q/w$。これを生産の制約に代入すると

$$
\begin{aligned}
A\Big(\frac{\alpha\lambda q}{r}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{(1-\alpha)\lambda q}{w}\Big)^{1-\alpha} &= q && \text{（制約に代入）}\\
A\,\lambda q\Big(\frac{\alpha}{r}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{w}\Big)^{1-\alpha} &= q && \text{（}\lambda q\text{ をまとめる（指数の和が1））}\\
\lambda &= \frac{1}{A}\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{w}{1-\alpha}\Big)^{1-\alpha} && \text{（}\lambda\text{ について解く）}
\end{aligned}
$$

したがって費用関数は

$$C(q;r,w)=\lambda q=\frac{q}{A}\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{w}{1-\alpha}\Big)^{1-\alpha}.$$

限界費用 $C'(q)=\lambda$ は q によらず一定で、平均費用に等しくなります（規模に関して収穫一定のため）。ここでもラグランジュ乗数 λ が限界費用、つまり「制約（生産量）を1単位増やすのに必要な費用」になっていることが確かめられます。

4.7　ラグランジュ乗数の意味と包絡線定理

最適化問題の答えとして得られる最大値を、外生変数の関数とみなしたものを**価値関数**（最大値関数）と呼びます。効用最大化なら $V(p_x,p_y,I)=u(x^*,y^*)$ で、**間接効用関数**と呼ばれます。

要点：包絡線定理

最適化問題のパラメータ a が変わったときの価値関数の変化は、ラグランジュ関数を a で**直接**偏微分し、最適解で評価したものに等しい：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a}\Big|_{x=x^*,\,y=y^*,\,\lambda=\lambda^*}.$$

（最適な x^*、y^* が a とともに動く効果は、一階条件により打ち消し合って0になる。）

数式の読み方：λ はシャドウ・プライス

- 制約の右辺 c に包絡線定理を当てはめると、$\partial \mathcal{L}/\partial c = \lambda$ なので $\mathrm{d}V/\mathrm{d}c = \lambda^*$。つまり λ^* は「**制約を1単位ゆるめたとき、最大値がどれだけ増えるか**」です。
- 効用最大化では、λ^* は「所得が1円増えたときの効用の増加」＝**所得の限界効用**です。上の計算例では $\lambda^* = 1/I$ で、豊かな人ほど1円の価値が小さくなります。
- 市場で値段のついていない「制約」に、暗黙の値段をつけていると考えられるので、**シャドウ・プライス**（影の価格）と呼ばれます。費用最小化問題では、λ は限界費用になります。
- 「包絡線」という名前は、価値関数のグラフが、いろいろな選択を固定したときのグラフの「外側を包む線」になっていることに由来します。

計算例：ロワの恒等式を確かめる

上の計算例で $V = a\ln\frac{aI}{p_x} + (1-a)\ln\frac{(1-a)I}{p_y}$ です。p_x で微分すると $\partial V/\partial p_x = -a/p_x$。一方、包絡線定理では $\partial \mathcal{L}/\partial p_x = -\lambda^* x^* = -\frac{1}{I}\cdot\frac{aI}{p_x} = -a/p_x$ で一致します。両者の比から $x^* = -\dfrac{\partial V/\partial p_x}{\partial V/\partial I}$（**ロワの恒等式**）が得られます。

発展：シェパードの補題とスルツキー方程式

費用関数 $C(q; r, w)$ に包絡線定理を当てはめると、$\partial \mathcal{L}/\partial r = K$ なので $\partial C/\partial r = K^*$（**シェパードの補題**）。上の例では $\partial C/\partial r = \alpha C/r = K^*$ と確かめられます。消費者の**支出最小化**問題（効用 $\bar{u}$ を達成する最小の支出 $e(p,\bar{u})$）でも同様に $\partial e/\partial p_x = h_x$（補償需要、ヒックス需要）となり、恒等式 $h_x(p,\bar{u}) = x\big(p, e(p,\bar{u})\big)$ を p_x で微分すると

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \underbrace{\frac{\partial h_x}{\partial p_x}}_{\text{代替効果}} - \underbrace{x\frac{\partial x}{\partial I}}_{\text{所得効果}}$$

という**スルツキー方程式**が得られます（右辺第2項は連鎖律で $\frac{\partial x}{\partial I}\frac{\partial e}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial I}x$ を移項したもの）。価格変化の効果を代替効果と所得効果に分ける学部ミクロの議論は、包絡線定理と連鎖律の組み合わせなのです。

発展：不等式制約とクーン＝タッカー条件

「消費量は0以上」「予算を使い切らなくてもよい」のように、制約が不等式 $g(x) \le c$ の場合は、ラグランジュ法の一階条件に次の条件が加わります（**カルーシュ＝クーン＝タッカー条件**、KKT条件）。

$$\lambda \ge 0, \qquad c - g(x^*) \ge 0, \qquad \lambda \bigl[c - g(x^*)\bigr] = 0.$$

最後の式は**相補スラック条件**と呼ばれ、「制約が余っている（$c - g > 0$）なら値段 λ は0、値段が正なら制約はぴったり効いている」という意味です。余っている資源にお金を払う人はいない、という直観に対応します。また、ある財をまったく買わない**端点解**（$x^* = 0$）では、一階条件が等号ではなく $u_x \le \lambda p_x$ となります。「その財の1円あたりの限界効用が低すぎて、1単位目すら買う価値がない」という状態です。

発展：CES型関数と代替の弾力性

コブ＝ダグラス型を一般化した **CES 型**（constant elasticity of substitution）

$$u(x, y) = \bigl(a\, x^{\theta} + (1 - a)\, y^{\theta}\bigr)^{1/\theta} \qquad (\theta < 1,\ \theta \ne 0)$$

では、第3章と同じ計算で $\mathrm{MRS} = \dfrac{a}{1-a}\Bigl(\dfrac{x}{y}\Bigr)^{\theta - 1}$ となり、最適条件 $\mathrm{MRS} = p_x / p_y$ から

$$\frac{x}{y} = \Bigl(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{p_y}{p_x}\Bigr)^{\frac{1}{1-\theta}}, \qquad \frac{\mathrm{d}\ln(x/y)}{\mathrm{d}\ln(p_y/p_x)} = \frac{1}{1-\theta} \equiv \eta.$$

η を**代替の弾力性**と呼び、相対価格が1%変わったとき消費の比率が何%変わるかを表します。$\theta \to 0$ で $\eta = 1$ となり、コブ＝ダグラス型（支出シェア一定）に戻ります。$\eta > 1$ なら、相対的に安くなった財への支出シェアが増えます。大学院マクロの独占的競争モデル（ディキシット＝スティグリッツ型の集計）でも、この形が使われます。

要点

- max は最大値、arg max は最大値を与える選択変数の値。
- 一階条件 $f'(x^*) = 0$ は「限界便益 ＝ 限界費用」。目的関数が凹なら、一階条件を満たす点が最大。
- ラグランジュ法は、制約付き問題を一階条件の連立方程式に直す方法。最適点では等高線と制約が接する。
- ラグランジュ乗数は制約のシャドウ・プライス。包絡線定理により、価値関数の変化はラグランジュ関数の直接の偏微分で求まる。

次の章へ　ここまで「効用関数がある」「凹である」ことを前提にしてきました。次の章では、その前提を集合と凸性の言葉で整理します。

大学院とのつながり　包絡線定理は、動的計画法（ベルマン方程式、大学院編）でオイラー方程式を導くときの鍵になります。

第5章

集合・凸性・選好

> **ここまでの流れ**　第4章で、効用関数が凹であれば一階条件で最適解が求まることを見ました。
> **この章の問い**　そもそも「効用関数」はどんな前提から作られるのか。無差別曲線が原点に向かって膨らむ（凸である）ことは、どう表すのか。
> **この章で分かること**　集合と論理の記号、凸集合、凹関数・準凹関数の一般的な定義、選好の公理と効用関数の関係、一般均衡理論で使う考え方です。

5.1　集合と論理の記号

理論の教科書や論文では、次の記号が説明なしに使われます。ここでまとめて覚えてしまいましょう。

記号	意味（読み方）
$x \in A$	x は集合 A の要素である（x は A に属する）
$A \subseteq B$	A は B の部分集合（A の要素はすべて B の要素）
$A \cup B$、$A \cap B$	和集合（どちらかに属する）、共通部分（両方に属する）
$\emptyset$	空集合（要素が1つもない）
$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{R}^n_+$	n 個の実数の組全体、そのうち各成分が0以上のもの
$[a, b]$、(a, b)	a 以上 b 以下の区間、a より大きく b より小さい区間
$\forall x$	すべての x について（for all）
$\exists x$	ある x が存在して（there exists）
$P \Rightarrow Q$	P ならば Q
$P \iff Q$	P と Q は同値（P ならば Q、かつ Q ならば P）

計算例：予算集合を記号で書く

価格 $p = (p_1, p_2)$、所得 I のもとで買える消費の組合せ全体（**予算集合**）は

$$B(p, I) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I\}$$

です。「0以上の数の組 (x_1, x_2) のうち、支出が所得以下のもの全体」と読みます。効用最大化は $\max_{x \in B(p,I)} u(x)$ と簡潔に書けます。

補足：定義を声に出して読む

記号で書かれた定義は、左から順に日本語に直すと読みやすくなります。例えば

$$\forall x \in A,\ \exists y \in B :\ x \le y$$

は「A のどの要素 x に対しても、x 以上の要素 y が B の中に見つかる」と読みます。$\forall$ と $\exists$ の順番を入れ替えた「$\exists y \in B,\ \forall x \in A :\ x \le y$」は「$B$ の中に、A のすべての要素以上であるような（共通の）y がある」で、意味がまったく違います（後者のほうが強い主張）。理論の論文で定義や仮定が分からなくなったら、記号を1つずつ日本語に置き換えてみてください。

5.2 凸集合

集合の中のどの2点を選んでも、それらを結ぶ線分が集合からはみ出さないとき、その集合を**凸集合**と呼びます。

要点：凸集合の定義

集合 A が凸集合であるとは、

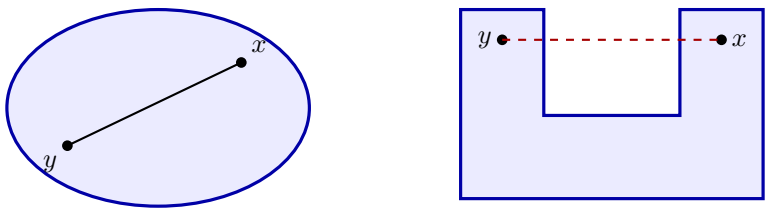
$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1] :\quad tx + (1-t)y \in A$$

が成り立つことである。

数式の読み方

- $tx + (1-t)y$ は、t を0から1まで動かすと y から x までの線分上を動く点です（$t=1$ で x、$t=0$ で y、$t=1/2$ で中点）。これを x と y の**凸結合**と呼びます。
- 経済学的には「2つの選択肢を混ぜたもの（平均）も選べる」という意味です。予算集合は凸集合です。

図 5.1　凸集合と凸でない集合



(a) 凸集合　　(b) 凸でない集合

模式図。

図の読み方

1. (a) の楕円では、どの2点を選んでも結ぶ線分（黒）は集合の中にあります。凸集合です。
2. (b) のU字型では、x と y を結ぶ線分（赤の点線）が、くぼみの部分で集合の外に出てしまいます。凸集合ではありません。

5.3 凹関数・凸関数の一般的な定義

第2章では f'' の符号で凹・凸を定義しましたが、微分できない関数や多変数関数にも使える、より一般的な定義があります。

要点：凹関数・凸関数

- f が**凹関数**：$\forall x, y,\ \forall t \in [0,1]:\ f\big(tx + (1-t)y\big) \ \geq\ tf(x) + (1-t)f(y)$。
- f が**凸関数**：上の不等号が逆向き（$\leq$）。

不等号が等号なしで成り立つ（$x \neq y$、$0 < t < 1$ のとき $>$）場合を**強く凹**（狭義凹）と呼ぶ。

数式の読み方

- 左辺は「平均をとってから関数に入れた値」、右辺は「関数に入れてから平均をとった値」です。凹関数では「**平均の値 $\geq$ 値の平均**」。グラフでは、曲線上の2点を結ぶ弦が曲線の下にあることを意味します。
- 経済学的には「極端な消費より、ならした消費を好む」ことを表します。毎日パンだけ・水だけより、両方を半分ずつのほうがよい。第8章の消費の平準化、第9章の危険回避は、どちらもこの性質から来ます。
- 1変数で2回微分できるなら、「凹 $\iff$ $f'' \leq 0$」で、第2章の定義と一致します。

5.4 準凹関数と無差別曲線の凸性

効用関数で本当に大切なのは、効用の値そのものではなく**順番**（どちらが好ましいか）です。そのため、凹性より弱い次の性質が使われます。

用語の説明：上方集合と準凹関数

- **上方集合**（上位集合）：$\{x : u(x) \geq \bar{u}\}$。「効用が $\bar{u}$ 以上になる消費の組合せ全体」で、無差別曲線より右上の領域です。
- **準凹関数**：すべての $\bar{u}$ について上方集合が凸集合になる関数。

無差別曲線が原点に向かって膨らんでいる（**原点に対して凸**）ことは、効用関数が準凹であることと同じです。

数式の読み方：凹と準凹の違い

- 凹関数は準凹関数ですが、逆は成り立ちません。例えば $u(x, y) = xy$ は凹ではありません（x, y を両方2倍すると効用が4倍になり、増え方が逓増する）が、無差別曲線 $xy = \bar{u}$ は原点に対して凸なので準凹です。
- 効用関数を単調増加関数で変換しても（例：xy を $\ln(xy)$ や $\sqrt{xy}$ にしても）、好みの順番と無差別曲線は変わりません。効用の値の大きさには意味がなく順番だけに意味がある、という考え方を**序数的効用**と呼びます。準凹性は単調変換で保たれますが、凹性は保たれません。だから選好の性質としては準凹性が自然なのです。

5.5 選好の公理と効用関数

消費者の好みを、2つの選択肢を比べる関係として表します。$x \succsim y$ を「x は y と同じかそれ以上に好ましい」と読み、**選好関係**と呼びます。

要点：選好の主な公理

- **完備性**：任意の x, y について、$x \succsim y$ か $y \succsim x$ の少なくとも一方が成り立つ（どんな2つも比べられる）。
- **推移性**：$x \succsim y$ かつ $y \succsim z$ なら $x \succsim z$（好みに矛盾がない）。
- **連続性**：好みが急に飛ばない（わずかに違う選択肢は、ほぼ同じように評価される）。
- **単調性**：どの財も多いほうが好ましい。
- **凸性**：$x \succsim z$ かつ $y \succsim z$ なら、混ぜたもの $tx + (1-t)y$ も z 以上に好ましい。

数式の読み方：公理と効用関数の関係

- 完備性・推移性・連続性を満たす選好は、連続な効用関数 u で表せます：$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$。これが「効用関数を使ってよい」ことの根拠です。
- 単調性は「無差別曲線が右下がり」、凸性は「無差別曲線が原点に対して凸（効用関数が準凹）」に対応します。
- 公理という言葉は「議論の出発点として認める前提」という意味です。経済学の結論は、どの公理を前提にしたかに依存します。

5.6 一般均衡理論で使う考え方

すべての市場を同時に考える**一般均衡理論**では、ここまでの道具が次のように使われます。

- **超過需要関数**：財 j の総需要から総供給を引いたもの $z_j(p)$。均衡価格は $z_j(p^*) = 0$（すべての j）を満たす価格です。
- **0次同次性**：すべての価格を2倍しても需要は変わらない（第3章）。そのため価格は比率しか決まらず、1つの財の価格を1と決めてよい（**ニューメレール**、価格の基準化）。
- **ワルラス法則**：各人が予算を使い切るなら、すべての市場の超過需要の価値の合計は 0：$\sum_j p_j z_j(p) = 0$。したがって n 個の市場のうち $n-1$ 個が均衡すれば、残り1つも自動的に均衡します。

計算例：ワルラス法則の導き方

消費者 i の予算制約 $\sum_j p_j x_j^i = \sum_j p_j \omega_j^i$（$\omega$ は初期保有）をすべての消費者について足し合わせると

$$\sum_i \sum_j p_j x_j^i = \sum_i \sum_j p_j \omega_j^i \qquad \text{（予算制約の和）}$$

$$\sum_j p_j \Big(\sum_i x_j^i - \sum_i \omega_j^i \Big) = 0 \qquad \text{（和の順番を入れ替えて移項）}$$

$$\sum_j p_j z_j(p) = 0 \qquad \text{（括弧の中が超過需要）}$$

価格をかけて足すと0になる、というのは「誰かが使ったお金は、必ず誰かの収入になる」ことの数学的な表現です。

発展：均衡の存在と不動点定理

「すべての市場を同時に均衡させる価格は本当に存在するのか」という問いには、**ブラウワーの不動点定理**（凸でコンパクトな集合からそれ自身への連続な関数 f には、$f(x^*) = x^*$ となる点 x^* が存在する）を使って答えます。超過需要が正の財の価格を上げ、負の財の価格を下げる「価格調整の関数」を作り、その不動点が均衡価格になることを示します。ここで、選好の凸性（準凹性）と連続性が、需要が連続に変化することを保証する重要な役割を果たします。**コンパクト**とは、大まかには「境界を含み、無限に広がっていない」集合のことです。

要点

- $\in, \subseteq, \forall, \exists, \Rightarrow, \iff$ などの記号で、経済学の前提や結論を正確に書ける。
- 凸集合は「2点を結ぶ線分がはみ出さない集合」。凹関数は「平均の値 $\geq$ 値の平均」で、平準化を好むことを表す。
- 無差別曲線が原点に対して凸 $\iff$ 効用関数が準凹 $\iff$ 選好が凸。
- 一般均衡理論では、0次同次性（価格の基準化）とワルラス法則（市場が1つ余分）が基本道具。

次の章へ　ここまでは「ある一時点」の選択を扱ってきました。次の章からは時間を導入します。まず、将来の価値を今の価値に直す「割引」と、そのための数列・級数を学びます。

大学院とのつながり　大学院ミクロでは、選好の公理から需要理論や一般均衡の存在をきちんと証明します。そこでは本章の集合と論理の記号が日常的に使われます。

第6章

数列・級数・現在価値

ここまでの流れ　第1〜5章で、ある一時点での選択（静学）を扱う数学をそろえました。
この章の問い　将来の収入や効用は、今の価値に直すとどれだけになるのか。無限の将来まで足し合わせても、なぜ有限の値になるのか。
この章で分かること　数列と和の記号、等比級数の和の公式と収束の条件、現在価値と割引、永久債と資産価格、生涯予算制約、連続時間の割引です。

6.1　数列

$x_0, x_1, x_2, \dots$ のように、番号のついた数の並びを**数列**と呼びます。経済学では、番号 t は時間（年、四半期）を表し、x_t は「t 期の値」です。

- **等差数列**：毎期一定額 d ずつ増える。$x_t = x_0 + dt$。
- **等比数列**：毎期一定の倍率 q で変化する。$x_t = x_0 q^t$。成長率 g で増える量は $q = 1+g$ の等比数列です。

6.2　等比級数の和

数列の項を足し合わせたものを**級数**と呼びます。経済学で最も重要なのは等比数列の和です。

要点：有限等比級数の和

$q \neq 1$ のとき

$$S_T \equiv \sum_{t=0}^{T-1} q^t = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{T-1} = \frac{1 - q^T}{1 - q}.$$

数式の読み方：導き方

$$
\begin{aligned}
S_T &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{T-1} && \text{（定義）} \\
qS_T &= \quad q + q^2 + \cdots + q^{T-1} + q^T && \text{（両辺に } q \text{ を掛ける）} \\
S_T - qS_T &= 1 - q^T && \text{（上から下を引くと、中間の項が消える）} \\
S_T &= \frac{1 - q^T}{1 - q} && \text{（} 1 - q \text{ で割る）}
\end{aligned}
$$

「q 倍して引く」というこの技は、級数の計算で何度も使います。

6.3 無限級数と収束

項を無限に足し続けたもの $\sum_{t=0}^{\infty} q^t$ を**無限級数**と呼びます。その値は、有限の和 S_T の $T \to \infty$ での極限として定義されます。

要点：無限等比級数

$|q| < 1$ なら

$$\sum_{t=0}^{\infty} q^t = \lim_{T \to \infty} \frac{1 - q^T}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

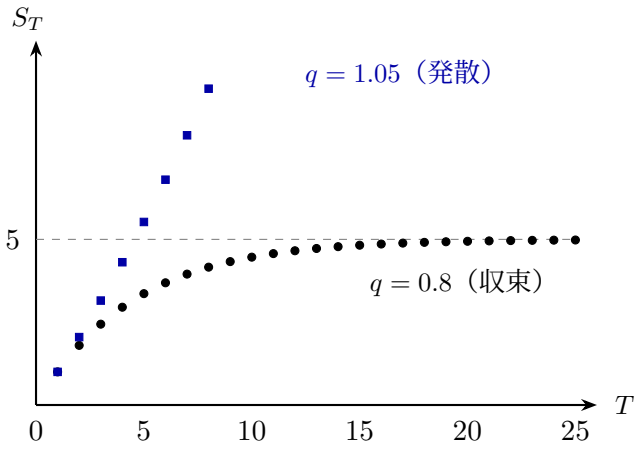
$|q| \geq 1$ なら、和は有限の値に定まらない（**発散**する）。

用語の説明：収束と発散

- **収束**：T を大きくしていくと、S_T がある一定の値にいくらでも近づくこと。その値を**極限**と呼びます。
- **発散**：S_T が無限に大きくなる、または振動して一定の値に近づかないこと。

$|q| < 1$ なら q^T は $T \to \infty$ で0に近づくので、公式の分子 $1 - q^T$ が1に近づきます。

図 6.1　等比級数の部分和：収束と発散



$S_T = \sum_{t=0}^{T-1} q^t = (1-q^T)/(1-q)$ を $T = 1, 2, \ldots$ について計算した。$q = 0.8$ の極限は $1/(1-0.8) = 5$。

図の読み方

1. 黒の点は $q = 0.8$ の部分和です。足す項 0.8^t がどんどん小さくなるので、和の増え方が鈍り、点線の5に近づいていきます。
2. 青の点は $q = 1.05$ の部分和です。足す項が毎回大きくなるので、和は際限なく増えていきます（図の範囲外まで増え続ける）。

6.4　現在価値と割引

利子率を r とすると、今の1円は1年後に $1 + r$ 円になります。逆に、1年後の1円は今の $1/(1 + r)$ 円の価値しかありません。一般に

$$t\text{年後の } X\text{円の}\textbf{現在価値} = \frac{X}{(1 + r)^t}. \tag{6.1}$$

数式の読み方

- $X/(1 + r)^t$ 円を今預ければ、t 年後にちょうど X 円になる、というのが根拠です。
- 将来の値を今の値に直すことを**割り引く**と呼び、$1/(1 + r)$ を**割引因子**と呼びます。
- 効用の割引も同じ形です。$\beta = 1/(1 + \rho)$ を**主観的割引因子**、ρ を**時間選好率**と呼びます。β が小さいほど、将来を軽く見る「せっかちな」人です。

毎年 D 円の配当を永久に払い続ける資産（**永久債**）の価格は、配当の現在価値の合計で

す。$q = 1/(1+r)$ として

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r}\sum_{t=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t && \text{（初項を外に出す）} \\
&= \frac{D}{1+r}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{D}{r} && \text{（無限等比級数の公式）}
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

計算例：有限期間の年金と住宅ローン

毎年 D 円を T 年間受け取る資産（年金、ローン返済の流列）の現在価値は、有限等比級数の公式から

$$
\begin{aligned}
P_T &= \sum_{t=1}^{T} \frac{D}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r}\cdot\frac{1-(1+r)^{-T}}{1-(1+r)^{-1}} && \text{（初項 } D/(1+r)\text{、公比 } 1/(1+r)\text{）} \\
&= \frac{D}{r}\Big[1-\frac{1}{(1+r)^T}\Big] && \text{（分母を整理）}
\end{aligned}
$$

です。「永久債の価値 D/r」から「T 年後に始まる永久債の、今の価値 $\frac{D}{r}(1+r)^{-T}$」を引いたもの、と読めます。逆に、借入額 P を T 年で返す毎年の返済額は $D = rP/[1-(1+r)^{-T}]$ です。

計算例：成長する配当（ゴードン・モデル）

配当が毎年 g の率で成長し（$D_t = D(1+g)^{t-1}$）、$g < r$ なら、同じ計算で

$$
P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \frac{D}{r-g}.
$$

となります（$q = (1+g)/(1+r) < 1$ の等比級数）。$g \geq r$ だと和が発散して価格が無限大になってしまうため、$r > g$ という条件が必要です。マクロ経済学で「利子率が成長率より大きい」という条件が頻繁に出てくるのは、このように無限の将来の和を有限にするためです。

6.5 生涯予算制約

家計が $t = 0, 1, 2, \ldots$ と生き、毎期 y_t の所得を得て c_t を消費し、利子率 r で自由に貸し借りできるとします。資産 a_t の動きは

$$
a_{t+1} = (1+r)a_t + y_t - c_t \tag{6.3}
$$

です。これを**フローの予算制約**と呼びます。

これを時点0から繰り返し代入していくと、T 期までについて

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} + \frac{a_{T+1}}{(1+r)^T} = (1+r)a_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t} \tag{6.4}$$

が得られます（両辺を $(1+r)^t$ で割ってから $t=0$ から T まで足すと、途中の a_t が打ち消し合う）。

要点：生涯（異時点間）予算制約

借金を永久に先送りできない（$T \to \infty$ で $a_{T+1}/(1+r)^T \to 0$）とすると

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{(1+r)^t} = (1+r)a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{y_t}{(1+r)^t}.$$

「消費の現在価値の合計 ＝ 初期資産 ＋ 所得の現在価値の合計」。

数式の読み方：ポンジー・ゲームの禁止

- $a_{T+1}/(1+r)^T \to 0$ という条件は、「借金を返すために新たに借金をし、それを永遠に続ける」こと（**ポンジー・ゲーム**）を禁止する条件です。これがないと、家計は無限に借りて消費できてしまいます。
- 第8章の動的最適化では、この条件と、資産を使い残さない条件（**横断性条件**）が対になって登場します。

発展：連続時間の割引と積分

時間を連続的に考えると、連続複利（第1章）により t 年後の1円の現在価値は e^{-rt} です。毎瞬間の所得 $y(t)$ の現在価値の合計は、和 $\sum$ の代わりに**積分** $\int$ で書きます。

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} y(t)\,\mathrm{d}t.$$

積分は「細かく区切った短い時間 $\mathrm{d}t$ ごとの値 $e^{-rt}y(t)\,\mathrm{d}t$ を、すべて足し合わせたもの」で、グラフでは曲線の下の面積です。所得が一定 y なら、$\int_0^{\infty} e^{-rt} y\,\mathrm{d}t = y/r$ となり、離散時間の永久債の公式 D/r と同じ形になります。積分は大学院編で連続時間モデルを扱うときに詳しく説明します。

要点

- 等比級数の和は「q 倍して引く」で求まり、$|q| < 1$ なら無限和 $1/(1-q)$ に収束する。
- 現在価値は $X/(1+r)^t$。永久債の価格は D/r、成長する配当なら $D/(r-g)$（$r > g$ が必要）。
- フローの予算制約を繰り返し代入し、ポンジー・ゲームを禁止すると、生涯予算制約が得られる。

次の章へ　資産の式 $a_{t+1} = (1+r)a_t + y_t - c_t$ のように、今期の値から来期の値が決まる式を「差分方程式」と呼びます。次の章では、その解き方と、経済が長期的にどこへ向かうかを調べる方法を学びます。

第7章

差分方程式と動学

ここまでの流れ　第6章で、資産が $a_{t+1} = (1+r)a_t + y_t - c_t$ のように時間を通じて変化することを見ました。
この章の問い　「今期の値から来期の値が決まる」関係が与えられたとき、経済は長期的にどこへ向かうのか。そこにとどまるのか、離れていくのか。
この章で分かること　差分方程式の用語、1階線形差分方程式の解き方、定常状態とその安定性、非線形の場合の線形化、ソローモデルへの応用です。

7.1　差分方程式とは

今期の値 x_t から来期の値 x_{t+1} が決まる関係

$$x_{t+1} = g(x_t) \tag{7.1}$$

を**1階差分方程式**と呼びます。「1階」は、1期前の値だけが関係することを指します。

用語の説明

- **状態変数**：その期の経済の状態を表し、過去から引き継がれる変数（資本ストック k_t、資産 a_t など）。
- **初期条件**：出発点の値 x_0。差分方程式と初期条件がそろえば、$x_1 = g(x_0)$、$x_2 = g(x_1)$、…と、すべての期の値が決まります。
- **時間経路**（パス）：$x_0, x_1, x_2, \ldots$ という値の並び。
- **定常状態**：$x_{t+1} = x_t$ となって、もう動かなくなる状態。$\bar{x} = g(\bar{x})$ を満たす $\bar{x}$ です。

7.2　1階線形差分方程式

最も基本的な形は

$$x_{t+1} = a\,x_t + b \qquad (a \neq 1) \tag{7.2}$$

です。これは手で完全に解けます。

数式の読み方：解き方

$$\bar{x} = a\bar{x} + b \;\Rightarrow\; \bar{x} = \frac{b}{1-a} \qquad \text{（定常状態を求める）}$$

$$x_{t+1} - \bar{x} = ax_t + b - (a\bar{x} + b) = a(x_t - \bar{x}) \qquad \text{（2つの式を引き算）}$$

$$x_t - \bar{x} = a^t(x_0 - \bar{x}) \qquad \text{（毎期 } a \text{ 倍されるので } t \text{ 回で } a^t \text{ 倍）}$$

定常状態からの乖離（ずれ）$x_t - \bar{x}$ に注目すると、それが毎期 a 倍される単純な等比数列になります。

要点：線形差分方程式の安定性

解 $x_t = \bar{x} + a^t(x_0 - \bar{x})$ について、

- $|a| < 1$：$a^t \to 0$ なので、どこから出発しても $x_t \to \bar{x}$（**安定**）。
- $|a| > 1$：乖離が拡大し、x_t は $\bar{x}$ から離れていく（**不安定**）。
- $a < 0$：符号が毎期入れ替わるので、$\bar{x}$ のまわりを上下に振動する。

計算例：半減期

$0 < a < 1$ のとき、乖離が半分になるまでの期間は $a^t = 1/2$ を解いて $t = \ln(1/2)/\ln a$ です。$a = 0.93$ なら約9.6期です。成長論で「収束速度」と呼ばれるのは $1 - a$（この例では毎期7%ずつ乖離が縮む）です。

7.3 応用：くもの巣モデル

農産物のように生産に時間がかかる財では、生産者は**前期の価格**を見て今期の供給量を決めます。需要 $q_t^d = a - bp_t$、供給 $q_t^s = c + dp_{t-1}$（$a, b, d > 0$）とし、毎期市場が均衡するとします。

$$a - bp_t = c + dp_{t-1} \qquad \text{（需要 = 供給）}$$

$$p_t = -\frac{d}{b}p_{t-1} + \frac{a-c}{b} \qquad \text{（}p_t \text{ について解く）}$$

これは式(7.2)で a にあたる係数が $-d/b < 0$ の線形差分方程式です。

数式の読み方：くもの巣モデルの読み方

- 定常状態は $\bar{p} = (a-c)/(b+d)$ で、通常の需要・供給の交点と同じです。
- 係数が負なので、価格は $\bar{p}$ のまわりで高い・安いを交互に繰り返します（高値を見て増産 → 今期は供給過剰で値下がり → 減産 → ...）。
- 安定条件 $|-d/b| < 1$、つまり $d < b$：供給の価格への反応が需要の反応より小さければ、振動はだんだん小さくなり $\bar{p}$ に収束します。逆なら振動が拡大します。
- 需要・供給の傾きという静学的な性質が、動学的な安定性を決めている点に注目してください。

7.4 非線形の差分方程式と線形化

経済モデルの g はたいてい非線形ですが、定常状態の近くでは1次近似（第2章）で線形の式に直せます。

$$\begin{aligned} x_{t+1} = g(x_t) &\approx g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) && (\bar{x} \text{ のまわりで1次近似}) \\ x_{t+1} - \bar{x} &\approx g'(\bar{x})\,(x_t - \bar{x}) && (g(\bar{x}) = \bar{x} \text{ を使う}) \end{aligned} \tag{7.3}$$

これは式(7.2)の乖離の式で $a = g'(\bar{x})$ としたものです。

要点：局所安定性

$|g'(\bar{x})| < 1$ なら、定常状態 $\bar{x}$ の近くから出発した経路は $\bar{x}$ に収束する（**局所的に安定**）。

このように、非線形の式を定常状態のまわりで線形の式に直すことを**線形化**と呼びます。「局所的」とは「定常状態の近くでは」という意味です。

7.5 応用：ソローモデル

人口と技術が一定のソローモデルでは、1人あたり資本 k_t が

$$k_{t+1} = s\,k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t \equiv g(k_t) \tag{7.4}$$

にしたがって動きます。

数式の読み方

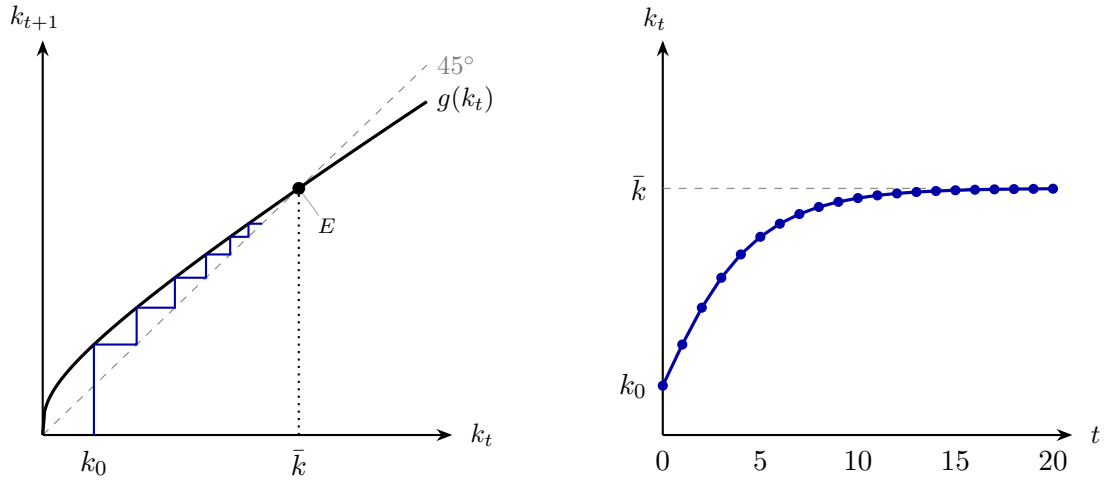
- k_t^{α} は1人あたり生産（$y = k^{\alpha}$）、s は貯蓄率で、sk_t^{α} が新たな投資です。
- δ は資本減耗率で、$(1-\delta)k_t$ は今期の資本のうち来期まで残る部分です。
- 「来期の資本 ＝ 新たな投資 ＋ 残った資本」という、資本の**蓄積式**です。

計算例：定常状態と安定性

$$
\begin{aligned}
\bar{k} &= s\bar{k}^{\alpha} + (1-\delta)\bar{k} && \text{（定常状態の条件）} \\
\delta\bar{k} &= s\bar{k}^{\alpha} && \text{（両辺から } (1-\delta)\bar{k} \text{ を引く：投資 ＝ 減耗）} \\
\bar{k} &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} && (\bar{k}^{1-\alpha} = s/\delta) \\
g'(\bar{k}) &= \alpha s\bar{k}^{\alpha-1} + 1 - \delta && \text{（式(7.4)を微分）} \\
&= \alpha\delta + 1 - \delta = 1 - (1-\alpha)\delta && (s\bar{k}^{\alpha-1} = \delta \text{ を代入）}
\end{aligned}
$$

$0 < \alpha < 1$、$0 < \delta < 1$ なら $0 < g'(\bar{k}) < 1$ なので、定常状態は安定です。例えば $s = 0.3$、$\alpha = 0.3$、$\delta = 0.1$ なら $\bar{k} = 3^{1/0.7} \approx 4.80$、$g'(\bar{k}) = 0.93$ です。

図 7.1　ソローモデルの動学：45度線図と時間経路



$g(k) = 0.4k^{0.3} + 0.6k$（$s = 0.4$、$\alpha = 0.3$、$\delta = 0.4$）、$k_0 = 0.2$。$\bar{k} = (s/\delta)^{1/(1-\alpha)} = 1$、$g'(\bar{k}) = 1 - (1-\alpha)\delta = 0.72$。経路は式(7.4)を逐次計算した値。見やすさのため減耗率を大きめにとった。

図の読み方

1. 左図の黒の曲線が $k_{t+1} = g(k_t)$、点線が45度線 $k_{t+1} = k_t$ です。両者の交点 E では $k_{t+1} = k_t$ なので、これが定常状態 $\bar{k}$ です。
2. 青の階段は経路の追い方です。k_0 から上に進んで曲線にぶつかった高さが k_1。そこから横に進んで45度線にぶつかると、横軸の位置が k_1 になります。これを繰り返します。
3. $\bar{k}$ より左では曲線が45度線より上にあるので $k_{t+1} > k_t$、資本は増えます。右では逆に減ります。交点で曲線の傾き $g'(\bar{k})$ が1より小さいことが、安定性の条件 $|g'(\bar{k})| < 1$ に対応します。
4. 右図は同じ経路を時間の関数として描いたものです。$\bar{k}$ に近づくほど増え方が鈍ります。定常状態の近くでは、乖離が毎期およそ $g'(\bar{k}) = 0.72$ 倍になるためです。

発展：変数が2つ以上の差分方程式

ラムゼイモデルのように、資本 k_t と消費 c_t の2つが同時に動く場合は、線形化すると

$$\begin{pmatrix} k_{t+1} - \bar{k} \\ c_{t+1} - \bar{c} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k_t - \bar{k} \\ c_t - \bar{c} \end{pmatrix}$$

と、**行列** A を使った式になります。1変数のときの「$|a| < 1$ なら安定」に対応するのは、「行列 A の**固有値**の大きさが1より小さいか」です。2つの固有値のうち1つが安定で1つが不安定な場合を**鞍点**と呼び、マクロ経済学の動学モデルで中心的な役割を果たします。大学院編で詳しく扱います。

要点

- 差分方程式 $x_{t+1} = g(x_t)$ と初期条件で、時間経路が決まる。定常状態は $\bar{x} = g(\bar{x})$。
- 線形の場合 $x_t - \bar{x} = a^t(x_0 - \bar{x})$ で、$|a| < 1$ なら安定。
- 非線形の場合は定常状態のまわりで線形化し、$|g'(\bar{x})| < 1$ なら局所的に安定。
- ソローモデルの定常状態は「投資 = 減耗」で決まり、安定である。

次の章へ　ソローモデルでは貯蓄率 s を一定と仮定しました。次の章では、家計が将来を見通して毎期の消費と貯蓄を**最適に**選ぶ問題（動的最適化）を扱います。

第8章

離散時間の動的最適化：オイラー方程式

ここまでの流れ　第4章でラグランジュ法を、第6章で割引と生涯予算制約を、第7章で差分方程式を学びました。
この章の問い　将来を見通す家計は、今日と明日の消費をどう配分するのか。期間が無限に続く場合も、同じ考え方で解けるのか。
この章で分かること　2期間モデルとオイラー方程式、CRRA型効用と異時点間の代替の弾力性、多期間・無限期間のラグランジュ法、横断性条件、ラムゼイモデルの定常状態です。

8.1　2期間の消費・貯蓄モデル

今年（1期）と来年（2期）の2期間生きる家計を考えます。所得は y_1、y_2、利子率 r で自由に貸し借りでき、生涯効用を

$$U = u(c_1) + \beta\, u(c_2) \qquad (0 < \beta < 1) \tag{8.1}$$

とします。β は第6章の主観的割引因子です。今年 c_1 だけ消費すると、貯蓄 $y_1 - c_1$ が来年 $(1+r)$ 倍になるので、

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \equiv W \tag{8.2}$$

が予算制約です（W は生涯所得の現在価値）。「今年の消費」と「来年の消費」を2つの財とみなすと、来年の消費の価格が $1/(1+r)$ の、第4章とまったく同じ形の問題になります。

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda\Bigl(W - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\Bigr) \qquad \text{（ラグランジュ関数）}$$

$$\mathcal{L}_{c_1} = u'(c_1) - \lambda = 0, \qquad \mathcal{L}_{c_2} = \beta u'(c_2) - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \qquad \text{（一階条件）}$$

λ を消去すると、次の重要な式が得られます。

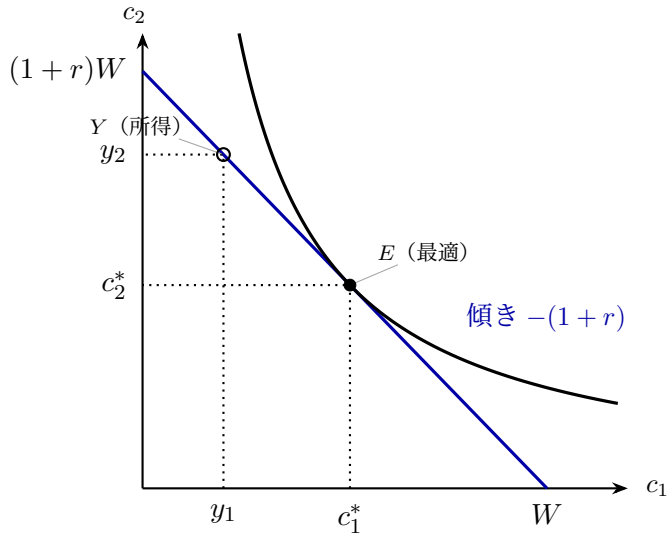
要点：オイラー方程式

$$u'(c_1) = \beta(1+r)\, u'(c_2).$$

数式の読み方：オイラー方程式の読み方

- 左辺は「今年の消費を1単位減らしたときに失う効用」です。
- 右辺は「その1単位を貯蓄すると来年 $1+r$ 単位になり、それを消費して得る効用（を今年の価値に割り引いたもの）」です。
- 最適な計画では、両者が等しい。もし右辺が大きければ、もっと貯蓄すれば効用が上がるので、元の計画は最適ではありません（**摂動による導出**：最適な計画を少しずらしても改善できない、という考え方）。
- 第4章の「限界代替率 ＝ 価格比」で書くと $\dfrac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = 1+r$ です。

図 8.1　2期間モデルの最適消費



$u = \ln c$、$\beta = 0.95$、$r = 0.1$、$y_1 = 4$、$y_2 = 17.6$（$W = 20$）。$c_1^* = W/(1+\beta) \approx 10.26$、$c_2^* = \beta(1+r)c_1^* \approx 10.72$。

図の読み方

1. 青の直線が予算線(8.2)で、所得の組合せ Y を必ず通ります。傾き $-(1+r)$ は「今年1単位あきらめると来年 $1+r$ 単位得られる」交換比率です。
2. 所得は来年に偏っています（$y_2 > y_1$）が、最適点 E では消費がほぼ平準化されています。家計は今年 $c_1^* - y_1$ だけ**借りて**消費を前倒ししています。
3. E で無差別曲線と予算線が接していることが、オイラー方程式に対応します。消費が平らになるのは、効用関数が凹で「ならした消費」を好むからです（第5章）。

8.2 CRRA型効用と異時点間の代替

マクロ経済学で標準的に使われる効用関数は

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad (\sigma > 0,\ \sigma \neq 1), \qquad u(c) = \ln c \quad (\sigma = 1) \tag{8.3}$$

です。$u'(c) = c^{-\sigma}$ なので、オイラー方程式は

$$\begin{aligned} c_1^{-\sigma} &= \beta(1+r) c_2^{-\sigma} && (u'(c) = c^{-\sigma} \text{ を代入}) \\ \frac{c_2}{c_1} &= \big[\beta(1+r)\big]^{1/\sigma} && (\text{両辺を } c_2^{-\sigma} \text{ で割って } 1/\sigma \text{ 乗}) \end{aligned}$$

数式の読み方：パラメータの意味

- $\beta(1+r) > 1$（利子率が時間選好率より高い）なら $c_2 > c_1$、消費は時間とともに増えます。
- 両辺の対数をとると $\ln(c_2/c_1) = \frac{1}{\sigma}\big[\ln\beta + \ln(1+r)\big]$。利子率が上がったときの消費成長率の反応は $1/\sigma$ で、これを**異時点間の代替の弾力性**と呼びます。σ が大きいほど、消費を時点間で入れ替えることを嫌い、平準化の欲求が強くなります。
- $-cu''(c)/u'(c) = \sigma$ が c によらず一定なので、CRRA（constant relative risk aversion、**相対的危険回避度一定**）型と呼ばれます。危険回避との関係は第9章で扱います。

計算例：CRRA型効用の2期間モデルを解き切る

オイラー方程式から $c_2 = [\beta(1+r)]^{1/\sigma} c_1$。これを予算制約(8.2)に代入します。

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+r} c_1 &= W && (\text{代入}) \\ c_1\Big[1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1}\Big] &= W && ((1+r)^{1/\sigma}/(1+r) = (1+r)^{1/\sigma-1}) \\ c_1 &= \frac{W}{1 + \beta^{1/\sigma}(1+r)^{(1-\sigma)/\sigma}} && (c_1 \text{ について解く}) \end{aligned}$$

$\sigma = 1$（対数効用）なら $c_1 = W/(1+\beta)$ です（図8.1の値）。

数式の読み方：利子率が上がると貯蓄は増えるか

生涯所得 W を一定とすると、r が c_1 に与える効果は分母の $(1+r)^{(1-\sigma)/\sigma}$ で決まります。

- **代替効果**：来年の消費が相対的に安くなるので、今年の消費を減らして貯蓄を増やす。
- **所得効果**：貯蓄者にとっては利子収入が増えて豊かになるので、今年の消費も増やす。
- $\sigma < 1$ なら指数が正で、r が上がると c_1 は減る（代替効果が勝つ）。$\sigma > 1$ なら c_1 は増える（所得効果が勝つ）。$\sigma = 1$ では両者がちょうど打ち消し合います。
- さらに $W = y_1 + y_2/(1+r)$ 自体も r に依存し、将来所得の現在価値が下がる効果（**富効果**）が加わります。利子率と貯蓄の関係が理論的にはっきりしないのは、このためです。

8.3 多期間・無限期間の問題

次に、$t = 0, 1, 2, \dots$ と無限に続く問題を考えます。

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \qquad \text{s.t.} \quad a_{t+1} = (1+r)a_t + y_t - c_t \quad (t = 0, 1, 2, \dots) \tag{8.4}$$

用語の説明：記号 $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$

$\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ は「$c_0, c_1, c_2, \dots$ という数列全体」を表します。max の下に書くと「すべての期の消費と資産を、まとめて一度に選ぶ」という意味です。家計は時点0で、将来にわたる**計画**を立てると考えます。

制約は毎期1本ずつ、無限個あります。そこで、**各期の制約に別々のラグランジュ乗数** λ_t を付けます。

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \big[(1+r)a_t + y_t - c_t - a_{t+1} \big]. \tag{8.5}$$

補足：和を書き出して確かめる

ラグランジュ関数の和のうち、a_{t+1} を含む部分だけを書き出すと

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \cdots &+ \beta^t u(c_t) + \lambda_t\big[(1+r)a_t + y_t - c_t - \underline{a_{t+1}}\big] \\ &+ \beta^{t+1}u(c_{t+1}) + \lambda_{t+1}\big[(1+r)\underline{a_{t+1}} + y_{t+1} - c_{t+1} - a_{t+2}\big] + \cdots\end{aligned}$$

です。a_{t+1}（下線）は、「t 期の終わりに持ち越す資産」として t 期の制約に、「$t+1$ 期の初めに持っている資産」として $t+1$ 期の制約に、2回現れます。無限の和でも、ある1つの変数で微分するときは、その変数を含む有限個の項だけを見ればよいのです。

数式の読み方：一階条件の求め方

c_t は第 t 項にしか現れません。a_{t+1} は、t 期の制約（$-a_{t+1}$）と $t+1$ 期の制約（$(1+r)a_{t+1}$）の2か所に現れます。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} &= \beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0 && \text{（}c_t\text{ で偏微分）} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{t+1}} &= -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1+r) = 0 && \text{（2か所の }a_{t+1}\text{ を微分）} \\ \beta^t u'(c_t) &= (1+r)\beta^{t+1}u'(c_{t+1}) && \text{（1本目を2本目に代入）} \\ u'(c_t) &= \beta(1+r)u'(c_{t+1}) && \text{（両辺を }\beta^t\text{ で割る）}\end{aligned}$$

2期間モデルと同じオイラー方程式が、**すべての隣り合う2期間**について成り立ちます。

補足：現在価値の乗数と当期価値の乗数

$\lambda_t = \beta^t u'(c_t)$ は、t 期の資源1単位の価値を時点0の効用で測ったもの（**現在価値**の乗数）です。$\mu_t \equiv \lambda_t/\beta^t = u'(c_t)$ と割引を外したものを**当期価値**の乗数と呼びます。教科書によってどちらを使うかが異なるので、式の形が違って見えても中身は同じです。

8.4 横断性条件

オイラー方程式は「隣り合う2期間の関係」なので、それだけでは消費の**水準**が決まりません（c_0 を決めれば後は決まるが、c_0 が決まらない）。最後の決め手となるのが次の条件です。

要点：横断性条件

$$\lim_{T\to\infty} \lambda_T a_{T+1} = \lim_{T\to\infty} \beta^T u'(c_T)\, a_{T+1} = 0.$$

数式の読み方：横断性条件の意味

- 有限期間 T の問題なら、最後の期に資産を残しても意味がないので $a_{T+1} = 0$（使い切る）が最適です。横断性条件はその無限期間版で、「**遠い将来に、価値のある資産を使い残さない**」という条件です。
- 第6章のポンジー・ゲームの禁止（借金を永久に先送りしない）は、資産が**マイナス**に発散するのを防ぐ制約でした。横断性条件は、資産が**プラス**に貯まりすぎる計画を最適でないとして排除します。両者がそろうと、生涯予算制約が等号で成り立ちます。

計算例：対数効用の解

$u = \ln c$ のとき、オイラー方程式は $c_{t+1} = \beta(1+r)c_t$ なので $c_t = [\beta(1+r)]^t c_0$。生涯予算制約（第6章）に代入すると、生涯資産を $W \equiv (1+r)a_0 + \sum_t y_t/(1+r)^t$ として

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{[\beta(1+r)]^t c_0}{(1+r)^t} = W \qquad \text{（生涯予算制約）}$$

$$c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \frac{c_0}{1-\beta} = W \qquad \text{（}(1+r)^t\text{ が約分され、等比級数）}$$

$$c_0 = (1-\beta)W$$

対数効用の家計は、毎期、生涯資産の一定割合 $1-\beta$ を消費します。とくに $\beta(1+r) = 1$ なら消費は毎期一定で、これはフリードマンの**恒常所得仮説**の考え方に対応します。

8.5 ラムゼイモデル（離散時間）

ソローモデル（第7章）の貯蓄率を、家計の最適化から決めるのがラムゼイモデルです。社会計画者（または代表的家計）は

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \qquad \text{s.t.} \quad k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \tag{8.6}$$

を解きます。家計の問題で $1+r$ だったところが、ここでは「資本1単位を持ち越したときの来期の収益」$f'(k_{t+1}) + 1 - \delta$ に置き換わります。

要点：ラムゼイモデルのオイラー方程式と定常状態

$$u'(c_t) = \beta\, u'(c_{t+1})\big[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\big].$$

定常状態（$c_{t+1} = c_t$）では $\beta[f'(\bar{k}) + 1 - \delta] = 1$、つまり

$$f'(\bar{k}) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta = \rho + \delta \qquad (\beta = 1/(1+\rho)).$$

数式の読み方

- 定常状態の資本は「資本の純収益 $f'(\bar{k}) - \delta$ ＝ 時間選好率 ρ」で決まります。これを**修正黄金律**と呼びます。せっかちな（ρ が大きい）経済ほど、資本の限界生産物が高い、つまり資本が少ない状態にとどまります。
- ソローモデルでは s を外から与えましたが、ここでは貯蓄が「今の消費をあきらめる損」と「将来の生産が増える得」の比較から決まります。
- 動学は k_t と c_t の2変数の差分方程式になり、定常状態は鞍点（第7章の発展）です。この分析は大学院編で詳しく行います。

要点

- 2期間モデルは「今の消費」と「将来の消費」の2財の問題で、最適条件はオイラー方程式 $u'(c_t) = \beta(1+r)u'(c_{t+1})$。
- CRRA型効用では、消費成長率が $\frac{1}{\sigma}\ln[\beta(1+r)]$ で決まり、$1/\sigma$ が異時点間の代替の弾力性。
- 無限期間の問題は、各期の制約に乗数 λ_t を付けるラグランジュ法で解ける。消費の水準は横断性条件で決まる。
- ラムゼイモデルの定常状態は修正黄金律 $f'(\bar{k}) = \rho + \delta$。

次の章へ　ここまでは将来が確実に分かっていると仮定しました。最後の章では、不確実性を扱うための確率と期待効用を学びます。

大学院とのつながり　同じ問題を「価値関数」を使って再帰的に解くのがベルマン方程式、連続時間で解くのがハミルトニアンです。どちらも答えは同じオイラー方程式になります（大学院編）。

第9章

確率と期待効用

ここまでの流れ　第8章で、将来が確実に分かる場合の動的最適化を学びました。
この章の問い　将来の所得や収益が不確実なとき、人々はどう選択するのか。「リスクを嫌う」ことは数学でどう表すのか。
この章で分かること　確率変数・期待値・分散・共分散、期待効用、凹な効用関数と危険回避（ジェンセンの不等式）、確実性等価とリスクプレミアム、危険回避度、確率的なオイラー方程式です。

9.1　確率変数と期待値

サイコロの目や来年の所得のように、どの値をとるかが確率的に決まる変数を**確率変数**と呼びます。とりうる値が $x_1, \dots, x_n$、それぞれの確率が $\pi_1, \dots, \pi_n$（$\pi_i \geq 0$、$\sum_i \pi_i = 1$）のとき、

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \tag{9.1}$$

を X の**期待値**（平均）と呼びます。確率で重みをつけた平均です。

用語の説明：確率分布と密度関数

- **確率分布**：確率変数がどの値をどの確率でとるかを表したもの。
- 連続的な値をとる確率変数（例：所得）では、1つの値ぴったりをとる確率は0になるので、**確率密度関数** $f(x)$ を使います。X が区間 $[a, b]$ に入る確率は曲線 f の下の面積 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ で、期待値は $\mathrm{E}[X] = \int x f(x)\,\mathrm{d}x$ です。和 $\sum$ が積分 $\int$ に変わるだけで、考え方は同じです。

要点：期待値の線形性

定数 a, b と確率変数 X, Y について

$$\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b, \qquad \mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y].$$

ただし一般に $\mathrm{E}[g(X)] \neq g(\mathrm{E}[X])$、$\mathrm{E}[XY] \neq \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ であることに注意。

9.2 分散と共分散

期待値のまわりでのばらつきの大きさを**分散**と呼びます。

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big[(X - \mathrm{E}[X])^2\big] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2. \tag{9.2}$$

分散の平方根 $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ を**標準偏差**と呼びます。元の変数と単位がそろうので、ばらつきの目安として使いやすい量です。

2つの確率変数が一緒に動く度合いを**共分散**と呼びます。

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\big[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\big] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]. \tag{9.3}$$

数式の読み方

- $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$：X が平均より大きいとき Y も大きくなりやすい（同じ方向に動く）。
- 共分散を標準偏差の積で割った $\mathrm{Corr}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) / \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$ を**相関係数**と呼び、-1 から1の値をとります。
- 計算規則：$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$、$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$。
- 2番目の式から、負の相関をもつ資産を組み合わせるとばらつきが小さくなります。これが**分散投資**の原理です。

9.3 期待効用

結果が不確実な選択肢（**くじ**）を評価するとき、経済学では「各結果の効用の期待値」を使います。

$$\mathrm{E}[u(W)] = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \, u(w_i). \tag{9.4}$$

これを**期待効用**と呼び、人々は期待効用が最も大きくなる選択をすると考えます（**期待効用仮説**）。ここで u は**フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン効用関数**と呼ばれ、第5章の序数的効用と違い、単調変換をすると選択が変わりうる点に注意してください（許される変換は $au + b$、$a > 0$ という1次変換だけです）。

9.4 凹な効用と危険回避

期待値が同じなら、確実にもらえるほうを好む性質を**危険回避**と呼びます。効用関数が凹なら、危険回避になります。

要点：ジェンセンの不等式

u が凹関数なら、任意の確率変数 W について

$$\mathrm{E}[u(W)] \;\le\; u\big(\mathrm{E}[W]\big).$$

（凸関数なら不等号が逆向き。）

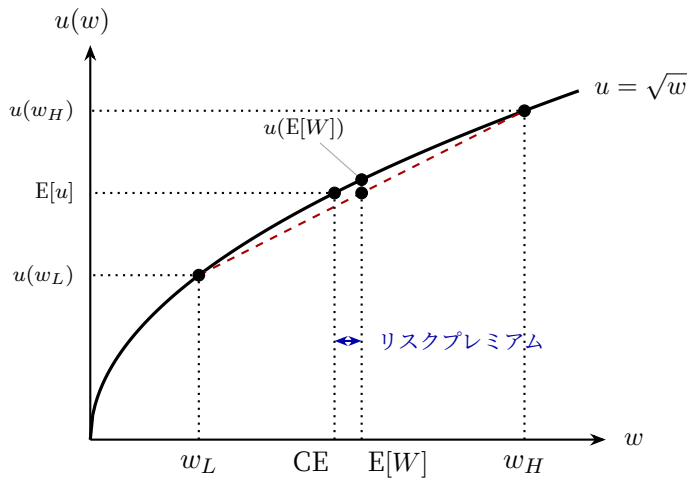
数式の読み方

- これは第5章の凹関数の定義「値の平均 $\le$ 平均の値」を、確率で重みをつけた平均に広げたものです。
- 左辺は「くじの期待効用」、右辺は「くじの期待値を確実にもらったときの効用」。凹な効用の人は、くじより確実な期待値を好む、つまり危険回避的です。

用語の説明：確実性等価とリスクプレミアム

- **確実性等価**（CE）：くじと同じ効用を与える確実な金額。$u(\mathrm{CE}) = \mathrm{E}[u(W)]$ を満たす。
- **リスクプレミアム**：$\mathrm{E}[W] - \mathrm{CE}$。「リスクを避けるためなら、期待値からこれだけ減ってもかまわない」金額で、保険料を払う理由になります。

図 9.1　凹な効用関数と危険回避



$u(w) = \sqrt{w}$。くじは確率1/2ずつで $w_L = 4$、$w_H = 16$。$\mathrm{E}[W] = 10$、$\mathrm{E}[u] = (2+4)/2 = 3$、$u(10) \approx 3.16$、$\mathrm{CE} = 3^2 = 9$、リスクプレミアム $= 1$。

図の読み方

1. 赤の点線は、くじの2つの結果を結ぶ弦です。確率が1/2ずつなので、期待効用 $\mathrm{E}[u] = 3$ は弦の中点の高さです。
2. 期待値 $\mathrm{E}[W] = 10$ を確実にもらうと、効用は曲線上の $u(10) \approx 3.16$ で、弦の中点より高くなります。これがジェンセンの不等式です。
3. 期待効用3と同じ効用を確実に得るには、9あれば十分です（$\sqrt{9} = 3$）。これが確実性等価で、期待値との差1がリスクプレミアム（青の矢印）です。曲線の曲がり方が強いほど、リスクプレミアムは大きくなります。

計算例：公正な保険は完全保険を選ばせる

資産 w をもつ人が、確率 π で損失 L を被るとします。保険金1円あたり保険料 γ で、保険金 q を買えるとします。

$$\mathrm{E}[u] = \pi\, u(w - L + q - \gamma q) + (1-\pi)\, u(w - \gamma q) \qquad \text{（期待効用）}$$

$$0 = \pi(1-\gamma)\, u'(w_B) - (1-\pi)\gamma\, u'(w_G) \qquad \text{（}q\text{ で微分）}$$

ここで w_B は損失が起きたときの資産、w_G は無事だったときの資産です。保険料が**公正**（$\gamma = \pi$、保険会社の期待利潤が0）なら、第2式は $\pi(1-\pi)[u'(w_B) - u'(w_G)] = 0$、つまり $u'(w_B) = u'(w_G)$ です。u が強く凹なら u' は減少関数なので $w_B = w_G$、すなわち $q = L$（損失の全額を保険でカバーする）が最適です。危険回避的な人は、公正な条件なら所得の変動をすべて取り除こうとする、ということです。

9.5 危険回避度

曲線の「曲がり方」は2階微分で測れます。ただし u'' は効用の単位に依存するので、u' で割って基準化します。

要点：アロー＝プラットの危険回避度

$$\text{絶対的危険回避度 } A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}, \qquad \text{相対的危険回避度 } R(w) = -\frac{w\, u''(w)}{u'(w)}.$$

小さなリスク ε（$\mathrm{E}[\varepsilon] = 0$、分散 σ_ε^2）に対するリスクプレミアムは、近似的に $\frac{1}{2} A(w) \sigma_\varepsilon^2$。

数式の読み方：近似式の導き方

くじ $w+\varepsilon$ のリスクプレミアムを π とすると、$u(w-\pi)=\mathrm{E}[u(w+\varepsilon)]$。左辺を1次、右辺を2次までテイラー展開（第2章）します。

$$
\begin{aligned}
u(w)-u'(w)\pi &\approx \mathrm{E}\Big[u(w)+u'(w)\varepsilon+\tfrac{1}{2}u''(w)\varepsilon^2\Big] && \text{（テイラー展開）}\\
&= u(w)+0+\tfrac{1}{2}u''(w)\sigma_\varepsilon^2 && \text{（}\mathrm{E}[\varepsilon]=0\text{、}\mathrm{E}[\varepsilon^2]=\sigma_\varepsilon^2\text{）}\\
\pi &\approx -\frac{u''(w)}{u'(w)}\cdot\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} && \text{（}\pi\text{ について解く）}
\end{aligned}
$$

リスクプレミアムは「危険回避度 × リスクの大きさ（分散）」に比例します。

第8章のCRRA型効用 $u=c^{1-\sigma}/(1-\sigma)$ では $R(c)=\sigma$ で一定です。同じ σ が「時点間の平準化の欲求」と「リスクを嫌う度合い」の両方を決めている点が、この効用関数の特徴であり、限界でもあります。

9.6 不確実性のもとでのオイラー方程式

第8章の家計が、来期の利子率や所得が不確実な世界で生きているとします。今期の情報のもとでの期待値を $\mathrm{E}_t[\cdot]$ と書くと、オイラー方程式は

$$
u'(c_t)=\beta\,\mathrm{E}_t\big[(1+r_{t+1})\,u'(c_{t+1})\big] \tag{9.5}
$$

となります。

数式の読み方

- E_t は「t 期に分かっている情報を使って計算した期待値」で、**条件付き期待値**と呼ばれます（大学院編で詳しく扱います）。
- 「今期1単位の消費をあきらめる損」と「貯蓄して来期に得る効用の**期待値**」が等しい、と読みます。確実な場合の式に期待値をかぶせた形です。
- この式は、資産価格の基本式（消費に基づく資産価格モデル）にもなります。両辺を $u'(c_t)$ で割ると $1=\mathrm{E}_t[m_{t+1}(1+r_{t+1})]$、$m_{t+1}\equiv\beta u'(c_{t+1})/u'(c_t)$ で、m を**確率的割引因子**と呼びます。

発展：予備的貯蓄

利子率が確実で $\beta(1+r)=1$ のとき、式(9.5)は $u'(c_t)=\mathrm{E}_t[u'(c_{t+1})]$ です。もし u' が凸関数（$u'''>0$、CRRA型はこれを満たす）なら、ジェンセンの不等式から $\mathrm{E}_t[u'(c_{t+1})]\geq u'(\mathrm{E}_t[c_{t+1}])$ なので、$u'(c_t)\geq u'(\mathrm{E}_t[c_{t+1}])$、つまり $c_t\leq \mathrm{E}_t[c_{t+1}]$ となります（u' は減少関数）。将来の所得が不確実だと、今の消費を控えて貯蓄を増やします。これを**予備的貯蓄**と呼びます。

要点

- 期待値は確率で重みをつけた平均で、線形性をもつ。分散はばらつき、共分散は一緒に動く度合い。
- 不確実な選択は期待効用 $\mathrm{E}[u(W)]$ で評価する。
- 凹な効用ならジェンセンの不等式 $\mathrm{E}[u(W)]\leq u(\mathrm{E}[W])$ により危険回避的になり、リスクプレミアムは近似的に $\frac{1}{2}A\sigma^2$。
- 不確実性のもとでのオイラー方程式は $u'(c_t)=\beta\mathrm{E}_t[(1+r_{t+1})u'(c_{t+1})]$。

学部編のおわりに　本書では、関数と微分から始めて、静学的な最適化、時間を通じた最適化、不確実性までを学びました。経済学のモデルは、ほとんどがこれらの組み合わせでできています。

大学院編へ　大学院編では、多くの変数を一度に扱う線形代数、データからモデルを推定する統計の道具、そして動的最適化の2つの本格的な方法（連続時間のハミルトニアンと、離散時間のベルマン方程式）を学びます。