大学院マクロのための経済数学

動学・確率・近似

第1版　2026年11月

作成：@dokugaku_econ

公開：econ-manuals.netlify.app

目次

序　この本の地図 **6**

序.1　ミクロ版との関係 6

序.2　学部から大学院へ：何が変わるのか 6

序.3　本全体を貫く筋 7

序.4　各章の内容と使われる場面 7

序.5　この本の読み方 9

1　準備：差分方程式と離散時間の最適化 **11**

1.1　この章の見取り図 11

1.2　数列の極限と等比級数 11

1.3　1階線形差分方程式 13

1.4　後ろ向きの解と前向きの解 14

1.5　非線形の差分方程式と定常状態の安定性 17

1.6　有限期間の最適化とオイラー方程式 20

1.7　無限期間の最適化と横断性条件 23

2　固有値と線形動学システム **27**

2.1　この章の見取り図 27

2.2　準備：線形代数の復習と複素数 28

2.3　一般の行列の固有値 29

2.4　対角化 30

2.5　線形差分方程式システムの解と安定性 32

2.6　鞍点と鞍点経路 36

3　微分方程式 **41**

3.1　この章の見取り図 41

3.2　微分方程式と解の一意性 42

3.3　積分の基本 44

3.4　1階線形微分方程式 45

3.5 変数分離法と、成長率が時間で変わる場合 47
3.6 非線形の微分方程式と位相線 47
3.7 積分因子と連続時間の予算制約 51
3.8 前向きの解：資産価格とジャンプ変数 51
3.9 線形システムと固有値 53
3.10 鞍点と位相図 55
3.11 非線形システムの線形化 57

4 連続時間の動的最適化：ハミルトニアン 61
4.1 連続時間の動的最適化問題 61
4.2 ハミルトニアンの導き方 62
4.3 離散時間の極限としての導出 64
4.4 離散時間との対応 65
4.5 当期価値ハミルトニアン 65
4.6 共役変数の意味 66
4.7 最大値原理：定理と証明 67
4.8 例1：ケーキ食べ問題 72
4.9 例2：家計の問題とケインズ＝ラムゼイ則 73
4.10 例3：ラムゼイモデル 74
4.11 比較動学：パラメータが変わったときの経路 77

5 関数空間と縮小写像の原理 81
5.1 この章の見取り図 81
5.2 ノルム空間と完備性 82
5.3 関数の空間と上限ノルム 83
5.4 縮小写像の原理 87
5.5 ブラックウェルの十分条件 91
5.6 縮小写像の原理の限界と、その先 93

6 動的計画法：ベルマン方程式 96
6.1 再帰的な考え方 96
6.2 有限期間の問題と後ろ向き帰納法 97

6.3 ベルマン方程式 98
6.4 逐次問題と再帰問題の同値性 100
6.5 価値関数の存在・一意性・連続性 103
6.6 価値関数の単調性と凹性 105
6.7 価値関数の微分可能性と包絡線条件 108
6.8 一階条件・包絡線条件・オイラー方程式 110
6.9 オイラー方程式と横断性条件 112
6.10 推測と確認：解析解が得られる例 115
6.11 価値関数反復 117
6.12 利得が有界でない場合 119
6.13 ハミルトニアンとベルマン方程式の関係 121
6.14 不確実性への拡張（予告） 122

7 確率過程 124

7.1 この章の見取り図 124
7.2 確率変数ベクトルと分散共分散行列 125
7.3 情報と条件付き期待値 125
7.4 マルコフ連鎖 128
7.5 AR(1) 過程と定常性 131
7.6 ラグ演算子とVAR 133
7.7 マルチンゲールと合理的期待 134
7.8 大数の法則・中心極限定理・エルゴード性 135
7.9 正規分布と対数正規分布 135

8 確率的動的計画法と資産価格 138

8.1 確率的ベルマン方程式 138
8.2 確率的オイラー方程式 140
8.3 確率的割引因子と資産価格 141
8.4 マルコフ連鎖による離散化と数値解法 144

9 対数線形化と摂動法 147

9.1 近似の考え方 147

9.2 テイラー近似と線形化 148
9.3 対数線形化 148
9.4 例：オイラー方程式と資源制約 150
9.5 摂動法：1次近似の根拠 151
9.6 2次近似 154

10 線形合理的期待モデルの解法 156
10.1 1変数のモデル：前向きの解と未定係数法 156
10.2 ブランシャール＝カーンの定理 158
10.3 シューア分解 161
10.4 決定性とテイラー原理 163
10.5 インパルス応答 166
10.6 QZ分解による解法 167

11 DSGEモデルの構築と解法 169
11.1 DSGEモデルを解く手順 169
11.2 RBCモデル：環境と最適化条件 170
11.3 定常状態とカリブレーション 171
11.4 対数線形化と解 172
11.5 基本的なニューケインジアン・モデル 174

12 異質的家計モデルの数学 177
12.1 所得変動と借入制約：家計の問題 177
12.2 分布の推移と定常分布 181
12.3 定常均衡 181
12.4 数値解法 183

13 推定の入口 186
13.1 射影としての最小二乗法 186
13.2 線形射影と正規分布 187
13.3 状態空間表現 189
13.4 カルマンフィルタ 189
13.5 尤度関数と最尤法 191

13.6 ベイズ推定とメトロポリス＝ヘイスティングス法 192

14 連続時間の確率解析 195

14.1 この章の進め方 195

14.2 ブラウン運動 195

14.3 二次変動と $(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$ 197

14.4 確率微分方程式 198

14.5 伊藤の補題 198

14.6 確率的なHJB方程式とポートフォリオ選択 200

14.7 コルモゴロフの前向き方程式 201

おわりに 204

序章

この本の地図

> **この章の問い**　大学院のマクロ経済学では、どんな数学が、どんな順番で必要になるのでしょうか。
> **この章で分かること**　この本で学ぶ数学の全体像、本全体を貫く筋（定常状態を求め、線形化し、固有値を数える）、各章が大学院マクロのどこで使われるか、ミクロ版との関係、読み方。

序.1　ミクロ版との関係

この本は「大学院ミクロのための経済数学」（以下、ミクロ版）と対になる2冊目です。読む順番は**ミクロ版 → この本**を想定しています。ミクロ版は、集合と論理、線形代数、位相、連続性と最大値定理、凸性と分離超平面定理、多変数の微分と陰関数定理、制約付き最適化、確率と期待効用、不動点定理という、**静学・存在・最適化**の土台を作りました。この本は、その上に**動学・確率・近似**の道具を積みます。

両方で使う道具は先に読むミクロ版に置き、この本では各章の冒頭の「前提知識」で、ミクロ版の章の名前を挙げて参照しています。特によく使うのは、次の章です。

- 「線形代数の基礎と二次形式」の章：行列・逆行列・行列式。
- 「連続性・最大値定理・対応」の章：ベルジュの最大値定理、中間値の定理。
- 「勾配・陰関数定理・ヘッセ行列・同次関数」の章：テイラーの定理と陰関数定理。
- 「制約付き最適化」の章：KKT条件。
- 「確率と期待効用」の章：期待値、ベイズの定理、状態価格。

ミクロ版を読んでいなくても、学部の数学と線形代数の基礎があれば、必要な箇所だけ参照しながら読み進められるように書いています。

序.2　学部から大学院へ：何が変わるのか

学部のマクロ経済学では、2期間のモデルやソローモデルのように、式を1本ずつ解ける範囲のモデルを扱いました。大学院では、次の3つの方向に広がります。

1. **無限期間の最適化**：家計や企業が無限の将来を見通して行動します。解は「経路」や「政策関数」という無限次元の対象で、その存在と性質を示すのに、横断性条件や縮

小写像の原理が必要になります。

2. **不確実性**：技術・所得・政策にショックが加わり、人々は条件付き期待値で将来を予想します（合理的期待）。確率過程と確率的な動的計画法が必要になります。
3. **近似と計算**：現実的なモデルは解析的に解けないので、定常状態のまわりで線形化して解いたり、数値的に解いたりします。近似が正しいことの根拠と、解が一つに決まる条件が問題になります。

序.3　本全体を貫く筋

この本のほとんどの章は、次の一つの筋でつながっています。

定常状態を求める　⟶　そのまわりで線形化する　⟶　固有値を数える

第1章では、1変数の差分方程式 $x_{t+1} = ax_t$ で、$|a| < 1$ なら過去から未来へ（後ろ向きに）、$|a| > 1$ なら未来から現在へ（前向きに）解く、という原則を学びます。第2章では、変数が複数になると a の役割を行列の固有値が担い、「安定な固有値の数と先決変数の数が等しければ、解がただ一つに決まる」ことを鞍点の場合に証明します。第3章はその連続時間版です。この筋は、第9章（非線形の確率的なモデルの線形化）と第10章（ブランシャール＝カーンの定理）で、大規模な確率的モデルにまで広がり、第11章でDSGEモデルを最初から最後まで解くところで完成します。

もう一つの筋は、**関数を未知数とする方程式を、不動点として解く**という考え方です。第5章の縮小写像の原理は、次のものの存在と一意性を、同じ一つの定理で保証します。

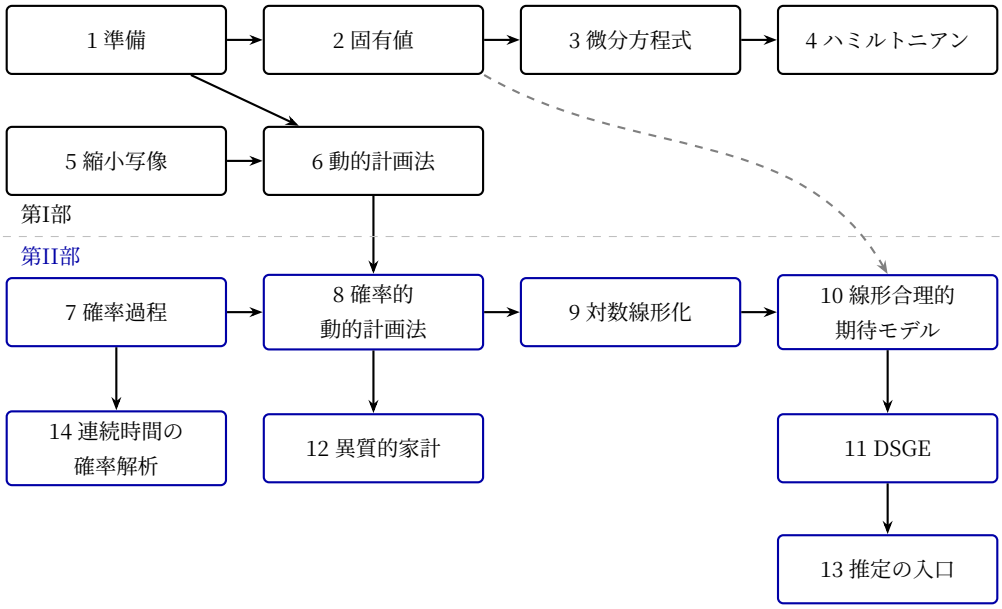
- ベルマン方程式の価値関数（第6・8章）
- マルコフ連鎖の定常分布（第7章）
- 資産価格（第8章）
- 異質的家計モデルの分布（第12章）

序.4　各章の内容と使われる場面

本は2部に分かれます。第I部（第1〜6章）は将来が確実な**決定論的な動学**、第II部（第7〜14章）は**確率的な動学とDSGE**です。

章	主な道具	マクロ経済学で使う場面
第I部　決定論的な動学		
第1章	差分方程式、前向きの解、ラグランジュ法、オイラー方程式、横断性条件	ソローモデル、消費・貯蓄、資産価格とバブル
第2章	固有値、対角化、安定性の判定、鞍点経路	動学モデルの安定性、解の一意性
第3章	微分方程式、位相図、線形システム、線形化の原理	連続時間の成長モデル
第4章	最大値原理、十分条件、横断性条件、HJB方程式	ラムゼイモデル、投資、内生的成長
第5章	完備性、縮小写像の原理、ブラックウェルの条件	価値関数・定常分布の存在
第6章	ベルマン方程式、価値関数の性質、包絡線条件	最適成長、数値解法
第II部　確率的な動学とDSGE		
第7章	条件付き期待値、マルコフ連鎖、AR(1)・VAR、マルチンゲール	ショックの過程、合理的期待
第8章	確率的ベルマン方程式、確率的割引因子	RBCモデル、資産価格
第9章	対数線形化、摂動法、確実性等価性	DSGEモデルの近似
第10章	ブランシャール＝カーンの定理、シューア分解、テイラー原理	DSGEモデルの解、金融政策ルール
第11章	モデル構築の6つの手順、カリブレーション、インパルス応答	RBC・ニューケインジアン・モデル
第12章	オイラー不等式、マルコフ作用素、定常均衡	格差、予備的貯蓄、不完備市場
第13章	射影、カルマンフィルタ、尤度、ベイズ推定とMCMC	DSGEモデルの推定
第14章	ブラウン運動、伊藤の補題、確率的HJB方程式	連続時間の資産価格、マクロ金融

図 序.1　章の依存関係



矢印は「前の章の結果を使う」関係。黒の枠は第I部、青の枠は第II部。灰色の点線は、第2章の固有値の議論が第10章で一般化されることを示す。第14章は第4章のHJB方程式も使う。

図の読み方

1. 横の流れ（1 → 2 → 3 → 4、8 → 9 → 10 → 11）が、「定常状態 → 線形化 → 固有値」の筋です。
2. 縦の流れ（5 → 6 → 8、7 → 8）が、「不動点として解く」動的計画法の筋です。2つの筋は第8章で合流し、DSGE（第11章）と異質的家計（第12章）に分かれます。

序.5　この本の読み方

- **枠の使い分け**：定義・定理・命題は青の罫線、要点は青の枠、図の読み方は赤の枠、証明のアイデア・数式の読み方・計算例・補足は灰色の枠、発展（飛ばしてもよい内容）は緑の枠です。各定理の後の「経済学での使いどころ」で、その結果が大学院マクロのどこで使われるかを確かめてください。
- **証明の扱い**：主な結果には証明をつけています。測度論が必要なものや長すぎるものは「本書では証明しません」と明記し、何を使えば証明できるかを添えています。
- **急ぐ読者へ**：DSGEモデルにすぐ進みたい場合は、次の順に読めば第9〜11章に進めます。証明は後から戻って読んでも構いません。
  1. 第1・2章
  2. 第6章の前半（ベルマン方程式と包絡線条件）

3. 第7章の条件付き期待値とAR(1)
4. 第8章の確率的オイラー方程式

- **金融に進む読者へ**：次の3つが、資産価格理論とマクロ金融への入口です。ミクロ版の「確率と期待効用」の章の状態価格と合わせて読んでください。
  - 第8章の資産価格
  - 第13章のカルマンフィルタ
  - 第14章の連続時間の確率解析

要点

- この本は、ミクロ版の静学・存在・最適化の土台の上に、動学・確率・近似の道具を積みます。
- 本全体の筋は「定常状態を求め、線形化し、固有値を数える」と「関数を未知数とする方程式を、不動点として解く」の2つです。
- 第I部で決定論的な動学の理論を完成させ、第II部でそれを確率的なモデルに広げて、DSGEモデル・異質的家計モデル・推定・連続時間の確率解析まで進みます。

第1章

準備：差分方程式と離散時間の最適化

ここまでの流れ　序章で、マクロ経済学の数学は「時間とともに変化する経済」を扱うための道具であることを見ました。
前提知識　1変数の微分（合成関数の微分、平均値の定理）、ラグランジュ乗数法とKKT条件、凹関数の性質。いずれもミクロ版の「勾配・陰関数定理・ヘッセ行列・同次関数」「制約付き最適化」「凸性と分離超平面定理」の章で扱っています。数列の極限は、この章で改めて定義します。
この章の問い　今期の値から来期の値が決まる経済は、長い目で見るとどこへ向かうのでしょうか。また、将来にわたる消費の計画は、どのような条件を満たせば最適だと言えるのでしょうか。
この章で分かること　等比級数と現在価値、1階の差分方程式の解と安定性、後ろ向きの解と前向きの解、定常状態のまわりの線形化、オイラー方程式、横断性条件と、それらが最適性を保証することの証明。

1.1　この章の見取り図

マクロ経済学のモデルは、ほとんどが「今期の状態が決まると、来期の状態が決まる」という形をしています。資本ストックは今期の資本と投資から決まり、資産は今期の資産と貯蓄から決まります。このような関係を表す式が**差分方程式**です。

この章は2つの部分からなります。前半（1.2〜1.5節）では、差分方程式が与えられたとき、その解がどのように動くかを調べます。中心になるのは、「係数の絶対値が 1 より小さいか大きいか」という、ただ一つの基準です。後半（1.6〜1.7節）では、差分方程式そのものを家計が選ぶ問題、つまり動学的な最適化を扱います。そこで得られるオイラー方程式は、再び差分方程式になります。したがって、「最適化の条件を導き、差分方程式として解く」という流れが、この本全体を通じた基本の手順になります。

1.2　数列の極限と等比級数

時間を $t = 0, 1, 2, \dots$ と区切り、各時点の値を並べた $x_0, x_1, x_2, \dots$ を数列といい、$\{x_t\}$ と書きます。

定義 1.1（数列の収束）

数列 $\{x_t\}$ が実数 x に収束するとは、どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、ある番号 N があって、$t \geq N$ ならば $|x_t - x| < \varepsilon$ となることをいう。このとき $\lim_{t\to\infty} x_t = x$、または $x_t \to x$ と書く。すべての t について $|x_t| \leq M$ となる数 M があるとき、$\{x_t\}$ は有界であるという。

命題 1.2（等比数列と等比級数）

a を実数とする。

1. $|a| < 1$ ならば $a^t \to 0$。$|a| > 1$ ならば $|a|^t$ は限りなく大きくなる。
2. $|a| < 1$ ならば、$\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} a^t = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} a^t = \frac{1}{1-a}$。

証明　1 を示します。$h > 0$ のとき、すべての $t \geq 1$ について $(1+h)^t \geq 1 + th$ が成り立ちます（$t = 1$ では等号で、$(1+h)^{t+1} \geq (1+th)(1+h) \geq 1 + (t+1)h$ なので、数学的帰納法で示せます）。$|a| > 1$ のときは $|a| = 1 + h$ と書くと、$|a|^t \geq 1 + th$ なので限りなく大きくなります。$0 < |a| < 1$ のときは $1/|a| = 1 + h$ と書くと、$|a|^t \leq 1/(1+th)$ なので、t を大きくすればいくらでも 0 に近づきます。

2 を示します。$S_T = 1 + a + \cdots + a^T$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
(1-a)S_T &= (1 + a + \cdots + a^T) - (a + a^2 + \cdots + a^{T+1}) && \text{（展開）} \\
&= 1 - a^{T+1} && \text{（途中の項が打ち消し合う）}
\end{aligned}
$$

なので、$S_T = (1 - a^{T+1})/(1-a)$ です。1 より $a^{T+1} \to 0$ なので、$S_T \to 1/(1-a)$ です。 □

補足：経済学での使いどころ　割引と現在価値

利子率が $r > 0$ のとき、t 期後に受け取る 1 円の現在の価値は $1/(1+r)^t$ 円です。毎期 d 円を永久に受け取る資産の現在価値は、命題 1.2 より

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{d}{(1+r)^t} = \frac{d}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{d}{r}$$

です。家計が将来の効用を割り引く**割引因子** $\beta \in (0,1)$ も同じ役割を果たし、$\sum_t \beta^t u(c_t)$ という無限の和に意味を与えます。

1.3　1階線形差分方程式

最も基本的な差分方程式は、来期の値が今期の値の1次式で決まるものです。

$$x_{t+1} = a x_t + b \qquad (t = 0, 1, 2, \dots) \tag{1.1}$$

> **定義 1.3（解と定常状態）**
> 式 (1.1) をすべての t で満たす数列 $\{x_t\}$ を、差分方程式 (1.1) の解という。$\bar{x} = a\bar{x} + b$ を満たす値 $\bar{x}$ を定常状態という。$a \neq 1$ のとき、定常状態は $\bar{x} = b/(1-a)$ のただ一つである。

定常状態とは、「一度そこに来れば、ずっとそこにとどまる」値です。解の動きは、定常状態からの乖離を見ると簡単になります。

定理 1.4（1階線形差分方程式の解と安定性）

$a \neq 1$ とし、$\bar{x} = b/(1-a)$ とする。

1. 初期値 x_0 から出発する式 (1.1) の解はただ一つで、

$$x_t = \bar{x} + a^t (x_0 - \bar{x}) \tag{1.2}$$

   である。

2. $|a| < 1$ ならば、どんな x_0 から出発しても $x_t \to \bar{x}$。

3. $|a| > 1$ ならば、$x_0 \neq \bar{x}$ であるかぎり $|x_t - \bar{x}|$ は限りなく大きくなる。

証明　x_0 が決まれば、式 (1.1) から $x_1, x_2, \dots$ が順に一通りに決まるので、解はただ一つです。式 (1.1) から $\bar{x} = a\bar{x} + b$ を引くと

$$x_{t+1} - \bar{x} = a(x_t - \bar{x})$$

です。つまり、乖離 $x_t - \bar{x}$ は毎期 a 倍になります。$t = 0$ から繰り返し使えば $x_t - \bar{x} = a^t (x_0 - \bar{x})$ で、これが式 (1.2) です（厳密には t についての数学的帰納法です）。2 と 3 は、命題 1.2 の 1 から得られます。　□

数式の読み方：a の値と解の動き

- $0 < a < 1$：乖離が毎期一定の割合で縮み、定常状態に単調に近づきます。a が 1 に近いほど調整は遅くなります。
- $-1 < a < 0$：乖離の符号が毎期入れ替わり、定常状態の上下を振動しながら近づきます。
- $|a| > 1$：乖離が毎期拡大します。定常状態にとどまれるのは、最初からちょうど定常状態にいる場合だけです。
- $|a| < 1$ のとき定常状態は**安定**、$|a| > 1$ のとき**不安定**であるといいます。

1.4 後ろ向きの解と前向きの解

定理 1.4 は、「不安定な差分方程式は役に立たない」と言っているように見えるかもしれません。しかし実際には、$|a| > 1$ の場合こそ、マクロ経済学と金融で中心的な役割を果たします。鍵になるのは、変数の初期値が「与えられているかどうか」です。

用語の説明：先決変数とジャンプ変数

- **先決変数**：今期の値が、過去の出来事によってすでに決まっている変数。資本ストックや、家計が期首にもっている資産がその例です。初期値 x_0 は与えられています。
- **ジャンプ変数**：今期の値が、将来の見通しに応じて今期のうちに自由に決まる変数。資産価格や消費がその例です。初期値 x_0 は与えられておらず、モデルの中で決まります。

先決変数については、定理 1.4 のように、与えられた x_0 から未来に向かって解を作ります。これを**後ろ向きの解**といいます（今期の値が過去の値の積み重ねで決まるためです）。ジャンプ変数については、初期値が与えられないかわりに、「値が際限なく発散することはない」という条件を課します。すると、今期の値は将来の値から逆算されます。これが**前向きの解**です。式 (1.1) の定数 b が時間とともに変わる場合に、この考え方を定理の形にまとめます。

定理 1.5（前向きの解）

$|a| > 1$ とし、$\{b_t\}$ を有界な数列とする。このとき、差分方程式

$$x_{t+1} = a x_t + b_t \tag{1.3}$$

の有界な解はただ一つ存在し、

$$x_t = -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_{t+s}}{a^{s+1}} \tag{1.4}$$

で与えられる。

証明のアイデア

式 (1.3) を x_t について解くと $x_t = (x_{t+1} - b_t)/a$ です。$|a| > 1$ なので、今度は「来期の値を $1/a$ 倍に縮めて今期の値を作る」安定な関係になります。これを未来に向かって繰り返し代入すると、遠い将来の x の影響は $1/a^s$ で消えていき、b の割引和だけが残ります。

証明　すべての t について $|b_t| \le B$ とします。

ステップ1　式 (1.4) の和が収束し、有界であること

各項の絶対値は $B/|a|^{s+1}$ 以下で、その和は命題 1.2 より

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{B}{|a|^{s+1}} = \frac{B}{|a|} \cdot \frac{1}{1 - 1/|a|} = \frac{B}{|a| - 1}$$

です。各項の絶対値の和が有限な級数は収束する（実数の完備性による性質です）ので、式 (1.4) は意味をもち、$|x_t| \le B/(|a| - 1)$ です。

ステップ2　式 (1.4) が解であること

式 (1.4) の x_t を使って、$a x_t + b_t$ を計算します。

$$\begin{aligned}
a x_t + b_t &= -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_{t+s}}{a^{s}} + b_t && \text{（式 (1.4) を } a \text{ 倍）} \\
&= -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_{t+s}}{a^{s}} && \text{（}s = 0 \text{ の項が } b_t \text{ と打ち消し合う）} \\
&= -\sum_{s'=0}^{\infty} \frac{b_{t+1+s'}}{a^{s'+1}} && \text{（}s = s' + 1 \text{ とおく）} \\
&= x_{t+1} && \text{（式 (1.4) の } t \text{ を } t+1 \text{ に変えたもの）}
\end{aligned}$$

ステップ3　有界な解はこれだけであること

$\{y_t\}$ も有界な解だとし、$d_t = y_t - x_t$ とおきます。2つの解の式を引き算すると $d_{t+1} = a d_t$ なので、$d_t = a^t d_0$ です。$d_0 \neq 0$ なら、命題 1.2 より $|d_t|$ は限りなく大きくなり、$\{y_t\}$ と $\{x_t\}$ がともに有界であることに反します。したがって $d_0 = 0$ で、すべての t で $y_t = x_t$ です。 □

計算例：資産価格とバブル

毎期 d_t の配当を支払う資産の価格を p_t とします（p_t は t 期の配当を支払ったあとの価格）。この資産を1期間もつ収益率が、安全な利子率 $r > 0$ に等しいという条件は

$$(1+r)\,p_t = p_{t+1} + d_{t+1}, \qquad \text{つまり} \qquad p_{t+1} = (1+r)\,p_t - d_{t+1}$$

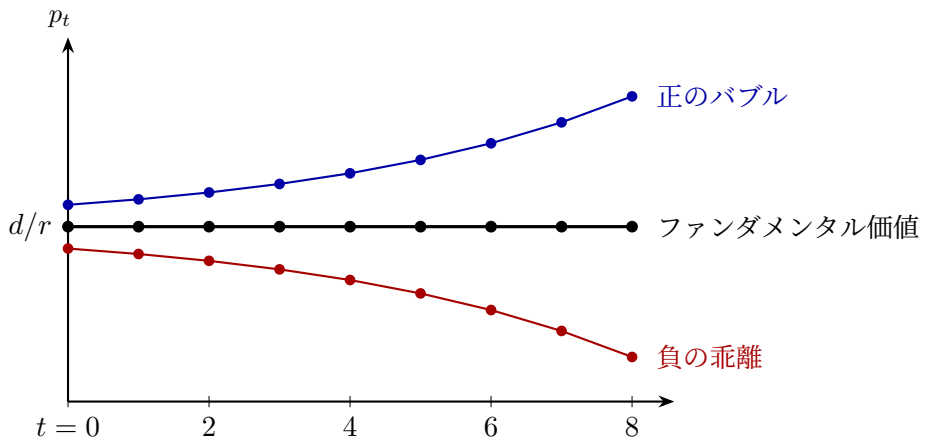
です。これは式 (1.3) で $a = 1 + r > 1$、$b_t = -d_{t+1}$ とした形です。価格 p_t はジャンプ変数なので、定理 1.5 より、有界な解は

$$p_t^* = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{d_{t+1+s}}{(1+r)^{s+1}}$$

のただ一つです。これは将来の配当の割引現在価値で、**ファンダメンタル価値**と呼ばれます。配当が一定（$d_t = d$）なら $p_t^* = d/r$ です。

有界という条件を外すと、定理の証明のステップ3から、解は $p_t = p_t^* + (1+r)^t c$（c は任意の定数）の形をすべて含みます。第2項は、「来期もっと高く売れる」という予想だけに支えられて利子率と同じ速さで膨らむ部分で、**バブル**と呼ばれます。

図 1.1　前向きの解とバブル



$d = 1$、$r = 0.25$（$d/r = 4$）。黒は $p_t = 4$、青は $p_t = 4 + 0.3 \times 1.25^t$、赤は $p_t = 4 - 0.3 \times 1.25^t$。

図の読み方

1. どの線も、毎期の収益率が利子率に等しいという条件 $p_{t+1} = (1+r)p_t - d$ を満たしています。この条件だけでは、価格は一つに決まりません。
2. 黒の線だけが有界で、これが定理 1.5 の前向きの解（ファンダメンタル価値）です。
3. 青と赤の線は、最初のわずかなずれが毎期 $1+r$ 倍に拡大し、発散します。赤の線はやがて価格が負になってしまうので、起こりえません。青の線を排除するには、「価格は際限なく上がり続けない」という追加の条件が必要です。最適化を行う家計のモデルでは、1.7節の横断性条件がこの役割を果たします。

補足：経済学での使いどころ　安定な根は後ろ向きに、不安定な根は前向きに

この節の結論は、「$|a| < 1$ の式は過去から未来へ解き、$|a| > 1$ の式は未来から現在へ解く」という原則にまとめられます。変数が複数あるモデルでは、a の役割を行列の固有値が担います（第2章）。絶対値が 1 より小さい固有値の数と先決変数の数、1 より大きい固有値の数とジャンプ変数の数がそれぞれ一致するとき、モデルの解がただ一つに決まります。これが、DSGEモデルの解法の中心にある考え方です。

1.5　非線形の差分方程式と定常状態の安定性

経済モデルの差分方程式は、ふつうは1次式ではありません。一般の関数 g を使って

$$x_{t+1} = g(x_t) \tag{1.5}$$

と書きます。$g(\bar{x}) = \bar{x}$ を満たす $\bar{x}$ が定常状態です。非線形の場合、解を式で書くことはふつうできませんが、定常状態の近くでの動きは、g の傾きだけで判定できます。

定理 1.6（定常状態の局所的な安定性）

g は $\bar{x}$ を含む区間で連続微分可能で、$g(\bar{x}) = \bar{x}$ とする。

1. $|g'(\bar{x})| < 1$ ならば、ある $\delta > 0$ があって、$|x_0 - \bar{x}| \le \delta$ であるかぎり、式 (1.5) の解は $x_t \to \bar{x}$ を満たす。
2. $|g'(\bar{x})| > 1$ ならば、ある $\delta > 0$ があって、$x_0 \neq \bar{x}$ から出発した解は、いつかは区間 $[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ の外に出る。

証明のアイデア

定常状態の近くでは、$g(x) \approx \bar{x} + g'(\bar{x})(x - \bar{x})$ と1次式で近似できます。すると乖離は毎期およそ $g'(\bar{x})$ 倍になるので、線形の場合（定理 1.4）の a を $g'(\bar{x})$ に読みかえた結論が成り立つはずです。証明では、「およそ」の部分を平均値の定理で厳密にします。

証明

ステップ1　1 の証明

$|g'(\bar{x})| < \kappa < 1$ となる数 κ を一つとります。g' は連続なので、ある $\delta > 0$ があって、$|x - \bar{x}| \leq \delta$ ならば $|g'(x)| \leq \kappa$ です。このような x について、平均値の定理より、x と $\bar{x}$ の間のある点 ξ で

$$\begin{aligned} |g(x) - \bar{x}| &= |g(x) - g(\bar{x})| && (g(\bar{x}) = \bar{x}) \\ &= |g'(\xi)|\,|x - \bar{x}| && (\text{平均値の定理}) \\ &\leq \kappa\,|x - \bar{x}| && (|\xi - \bar{x}| \leq \delta) \end{aligned}$$

が成り立ちます。したがって、$|x_t - \bar{x}| \leq \delta$ ならば $|x_{t+1} - \bar{x}| \leq \kappa |x_t - \bar{x}| \leq \delta$ で、解は区間の中にとどまり続けます。繰り返し使うと $|x_t - \bar{x}| \leq \kappa^t |x_0 - \bar{x}|$ で、$\kappa^t \to 0$ なので $x_t \to \bar{x}$ です。

ステップ2　2 の証明

$|g'(\bar{x})| > \kappa > 1$ となる κ をとり、$|x - \bar{x}| \leq \delta$ ならば $|g'(x)| \geq \kappa$ となるように $\delta > 0$ を選びます。ステップ1と同じ計算で、$|x_t - \bar{x}| \leq \delta$ であるかぎり $|x_{t+1} - \bar{x}| \geq \kappa |x_t - \bar{x}|$ です。もし解がずっと区間の中にとどまるなら、$|x_t - \bar{x}| \geq \kappa^t |x_0 - \bar{x}|$ となります。$x_0 \neq \bar{x}$ なら右辺は限りなく大きくなり、δ 以下であることに矛盾します。　□

計算例：ソローモデルの定常状態は安定

1人あたり資本 k_t が、貯蓄率 s、資本減耗率 δ、生産関数 $f(k) = k^\alpha$（$0 < \alpha < 1$）のもとで

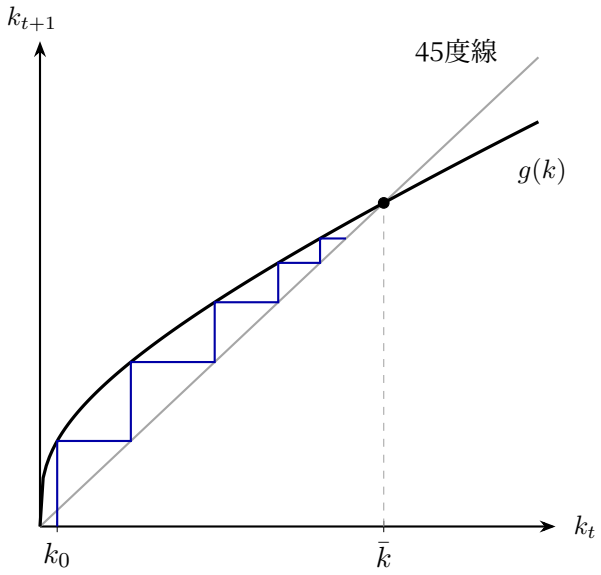
$$k_{t+1} = g(k_t), \qquad g(k) = sk^\alpha + (1-\delta)k$$

に従うとします。正の定常状態は $s\bar{k}^\alpha = \delta\bar{k}$ より $\bar{k} = (s/\delta)^{1/(1-\alpha)}$ です。傾きは

$$\begin{aligned} g'(\bar{k}) &= \alpha s\bar{k}^{\alpha-1} + 1 - \delta && (g \text{ を微分}) \\ &= \alpha\delta + 1 - \delta && (s\bar{k}^{\alpha-1} = \delta \text{ を代入}) \\ &= 1 - (1-\alpha)\delta && (\text{整理}) \end{aligned}$$

で、$0 < g'(\bar{k}) < 1$ です。定理 1.6 より、定常状態は安定で、近くから出発した経路は振動せずに近づきます。乖離は毎期およそ $1-(1-\alpha)\delta$ 倍になるので、$(1-\alpha)\delta$ が**収束の速さ**を表します。

図 1.2　非線形の差分方程式と45度線



$g(k) = 0.6k^{0.3} + 0.4k$（$s = 0.6$、$\delta = 0.6$、$\alpha = 0.3$）、$\bar{k} = 1$、$g'(\bar{k}) = 0.58$。青の折れ線は $k_0 = 0.05$ から出発した経路。

図の読み方

1. 横軸に今期の値、縦軸に来期の値をとります。黒の曲線が g、灰色の直線が45度線（来期の値＝今期の値）で、交点が定常状態です。
2. 青の折れ線は、「曲線まで上がって来期の値を読み、45度線まで横に進んでそれを横軸に移す」ことを繰り返したものです。階段を上るように定常状態に近づきます。
3. 交点で曲線の傾きが45度線の傾き 1 より小さい（曲線が45度線を上から下へ横切る）ことが、安定であることの図の上での意味です。

1.6 有限期間の最適化とオイラー方程式

ここからは、差分方程式を「解く」側から「選ぶ」側に移ります。家計が、0 期から T 期までの消費 $c_0, \dots, c_T$ を選ぶ問題を考えます。

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad a_{t+1} = R a_t + y - c_t \ \ (t = 0, \dots, T), \quad a_{T+1} \geq 0 \tag{1.6}$$

ここで a_t は t 期の初めにもっている資産、$R = 1 + r > 0$ は粗利子率、$y \geq 0$ は毎期の所得、$\beta \in (0, 1)$ は割引因子で、a_0 は与えられています。効用関数 u は、$c > 0$ で連続微分可能、$u'(c) > 0$ で、凹関数であるとします。以下では、制約を満たす経路を**実行可能**な経路と呼びます。

数式の読み方：問題の読み方

- 制約 $a_{t+1} = R a_t + y - c_t$ は、「利子のついた資産と所得の合計から、消費した残りが来期の資産になる」という、各期の予算制約です。a_t は先決変数で、c_t が家計の選ぶ変数です。
- 最後の条件 $a_{T+1} \geq 0$ は、「借金を残して終わることはできない」という制約です。これがなければ、いくらでも借りて消費できてしまいます。
- 今期の消費を増やすと来期以降の資産が減るので、各期の選択は互いに結びついています。これが動学的な最適化の特徴です。

この問題は、変数が有限個の制約付き最大化問題なので、ラグランジュ乗数法（KKT条件）で解くことができます。t 期の予算制約の乗数を λ_t、最後の制約 $a_{T+1} \geq 0$ の乗数を $\mu \geq 0$ として、ラグランジュ関数を

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \big(R a_t + y - c_t - a_{t+1} \big) + \mu \, a_{T+1}$$

とおきます。各変数で微分して 0 とおくと、次の条件が得られます。

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t \qquad (t = 0, \dots, T) \qquad (c_t \text{ で微分}) \tag{1.7}$$

$$\lambda_t = R\lambda_{t+1} \qquad (t = 0, \dots, T-1) \qquad (a_{t+1} \text{ で微分}) \tag{1.8}$$

$$\lambda_T = \mu, \quad \mu\, a_{T+1} = 0 \qquad (a_{T+1} \text{ で微分、相補スラック条件}) \tag{1.9}$$

数式の読み方：3つの条件の意味

- 式 (1.7) より、λ_t は「t 期の資産が1単位増えたときの、0 期から見た効用の増加」です。
- 式 (1.8) に式 (1.7) を代入して β^t で割ると、

$$u'(c_t) = \beta R\, u'(c_{t+1}) \tag{1.10}$$

  が得られます。これが**オイラー方程式**です。左辺は今期の消費を1単位減らしたときに失う効用、右辺はそれを貯蓄して来期に R 単位多く消費したときに得る効用（を今期から見たもの）です。最適な計画では、この2つが等しく、消費の時点を動かしても得をしません。
- 式 (1.9) では、$\lambda_T = \beta^T u'(c_T) > 0$ なので $\mu > 0$ で、したがって $a_{T+1} = 0$ です。最後の期に資産を残しても使い道がないので、すべて使い切ります。

オイラー方程式と「使い切る」条件を満たす経路が、本当に最適であることを証明します。そのために、次の不等式を準備します。この不等式は、無限期間の場合にもそのまま使います。

補題 1.7（基本不等式）

$\{c_t^*, a_{t+1}^*\}$ と $\{c_t, a_{t+1}\}$ を、同じ a_0 から出発して各期の予算制約 $a_{t+1} = Ra_t + y - c_t$ を満たす2つの経路とし、$c_t^* > 0$、$c_t > 0$ とする。$\{c_t^*\}$ がオイラー方程式 (1.10) を $t = 0, \dots, T-1$ で満たすならば、

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \big[u(c_t) - u(c_t^*)\big] \le \beta^T u'(c_T^*)\big(a_{T+1}^* - a_{T+1}\big). \tag{1.11}$$

証明のアイデア

凹関数は接線より下にあるので、効用の差は「限界効用 × 消費の差」で上から抑えられます。消費の差は、予算制約を使うと資産の差で書けます。和をとると、オイラー方程式のおかげで途中の期の資産の差がすべて打ち消し合い、最後の期の資産の差だけが残ります。

証明　$\lambda_t = \beta^t u'(c_t^*)$、$\Delta_t = a_t - a_t^*$ とおきます。$\Delta_0 = 0$ で、オイラー方程式は $\lambda_{t-1} = R\lambda_t$（$t = 1, \dots, T$）と書けます。

ステップ1　効用の差を消費の差で抑える

u は凹関数なので、接線の不等式 $u(c) \le u(c^*) + u'(c^*)(c - c^*)$ が成り立ちます。これを各期に使い、β^t をかけて足すと

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \big[u(c_t) - u(c_t^*)\big] \le \sum_{t=0}^{T} \lambda_t (c_t - c_t^*)$$

です。

ステップ2　消費の差を資産の差で書く

2つの経路の予算制約を引き算すると、$\Delta_{t+1} = R\Delta_t - (c_t - c_t^*)$、つまり $c_t - c_t^* = R\Delta_t - \Delta_{t+1}$ です。これを代入すると

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{T} \lambda_t (c_t - c_t^*) &= \sum_{t=0}^{T} \lambda_t R\Delta_t - \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \Delta_{t+1} && \text{（予算制約の差を代入）} \\
&= \sum_{t=1}^{T} \lambda_t R\Delta_t - \sum_{t=1}^{T+1} \lambda_{t-1} \Delta_t && \text{（}\Delta_0 = 0\text{、2つ目の和の番号をずらす）} \\
&= \sum_{t=1}^{T} \big(R\lambda_t - \lambda_{t-1}\big)\Delta_t - \lambda_T \Delta_{T+1} && \text{（同じ } \Delta_t \text{ の項をまとめる）} \\
&= -\lambda_T \Delta_{T+1} && \text{（オイラー方程式 } \lambda_{t-1} = R\lambda_t\text{）}
\end{aligned}$$

となります。$-\lambda_T \Delta_{T+1} = \beta^T u'(c_T^*)(a_{T+1}^* - a_{T+1})$ なので、ステップ1と合わせて式 (1.11) が得られます。　□

定理 1.8（有限期間の問題の十分条件）

問題 (1.6) の実行可能な経路 $\{c_t^*, a_{t+1}^*\}$ が、$c_t^* > 0$ で、オイラー方程式 (1.10)（$t = 0, \dots, T-1$）と $a_{T+1}^* = 0$ を満たすならば、この経路は最適である。

証明　$\{c_t, a_{t+1}\}$ を任意の実行可能な経路とします。補題 1.7 で $a_{T+1}^* = 0$、$a_{T+1} \ge 0$ とす

ると、式 (1.11) の右辺は $-\beta^T u'(c_T^*) a_{T+1} \leq 0$ です。したがって $\sum_t \beta^t u(c_t) \leq \sum_t \beta^t u(c_t^*)$ です。 □

1.7 無限期間の最適化と横断性条件

マクロ経済学では、終わりの時点を決めずに、無限の将来まで続く問題を考えるのがふつうです。家計が子孫の効用も考える場合や、いつ終わるかを特定したくない場合を表せるうえ、すべての期が同じ形になって扱いやすいからです。

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad a_{t+1} = R a_t + y - c_t, \quad a_{t+1} \geq 0 \quad (t = 0, 1, 2, \dots) \tag{1.12}$$

ここでは、毎期の資産が負にならない（借り入れができない）という制約を置いています。有限期間の問題と違うのは、「最後の期」がないことです。有限期間では、最後に資産を使い切るという条件 $a_{T+1} = 0$ が解を一つに決めていました。無限期間では、これに代わる条件が必要になります。

定義 1.9（無限期間の問題の最適性）

問題 (1.12) の実行可能な経路 $\{c_t^*, a_{t+1}^*\}$ が最適であるとは、任意の実行可能な経路 $\{c_t, a_{t+1}\}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある N があって、$T \geq N$ ならば

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) \leq \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t^*) + \varepsilon$$

となることをいう。

無限の和が収束するなら、この定義は「$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^*)$」と同じです。上のように定義しておくと、和が発散する場合も含めて、「十分長い期間で比べれば、他のどの経路にも負けない」という意味で最適性を述べることができます。

定理 1.10（無限期間の問題の十分条件）

問題 (1.12) の実行可能な経路 $\{c_t^*, a_{t+1}^*\}$ が、$c_t^* > 0$ で、次の2つを満たすならば、この経路は最適である。

1. （オイラー方程式）すべての $t \geq 0$ について $u'(c_t^*) = \beta R\, u'(c_{t+1}^*)$。
2. （横断性条件）$\lim_{T \to \infty} \beta^T u'(c_T^*)\, a_{T+1}^* = 0$。

証明 $\{c_t, a_{t+1}\}$ を任意の実行可能な経路とします（$c_t > 0$ とします）。どの T について

も、補題 1.7 が使えます。$a_{T+1} \geq 0$ と $u' > 0$ より

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{T} \beta^t \big[u(c_t) - u(c_t^*)\big] &\leq \beta^T u'(c_T^*)\big(a_{T+1}^* - a_{T+1}\big) && \text{（補題 1.7）}\\ &\leq \beta^T u'(c_T^*)\, a_{T+1}^* && (a_{T+1} \geq 0)\end{aligned}$$

です。横断性条件より、右辺は $T \to \infty$ で 0 に収束します。したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、T が十分大きければ右辺は ε より小さくなり、最適性の定義が満たされます。 □

数式の読み方：横断性条件の意味

- $\beta^T u'(c_T^*)$ は、T 期の資産1単位の価値を 0 期の効用で測ったものです（式 (1.7) の λ_T）。したがって $\beta^T u'(c_T^*) a_{T+1}^*$ は、「T 期の終わりに残している資産の、現在から見た価値」です。
- 横断性条件は、この価値が遠い将来には 0 になること、つまり「価値のある資産を、使わないまま永久にもち越さない」ことを要求します。有限期間の「最後に使い切る」条件 $a_{T+1} = 0$ の、無限期間での代わりです。
- 資産そのものが 0 に近づく必要はありません。資産が増え続けても、その価値が割引によって消えていけば、条件は満たされます。

計算例：対数効用の場合

$u(c) = \ln c$、$y = 0$、$a_0 > 0$ とします。このとき、毎期「利子のついた資産の $1-\beta$ の割合」を消費する経路

$$c_t^* = (1-\beta) R a_t^*, \qquad a_{t+1}^* = R a_t^* - c_t^* = \beta R a_t^*$$

が最適であることを、定理 1.10 で確かめます。資産も消費も毎期 βR 倍になるので、$u'(c) = 1/c$ より

$$\begin{aligned}\beta R\, u'(c_{t+1}^*) &= \frac{\beta R}{\beta R\, c_t^*} = u'(c_t^*) && \text{（オイラー方程式が成り立つ）}\\ \beta^T u'(c_T^*)\, a_{T+1}^* &= \beta^T \cdot \frac{\beta R a_T^*}{(1-\beta) R a_T^*} = \frac{\beta^{T+1}}{1-\beta} \to 0 && \text{（横断性条件が成り立つ）}\end{aligned}$$

です。

計算例：オイラー方程式を満たすが、最適でない経路

上の計算例で、消費を一律に θ 倍（$0<\theta<1$）に減らした経路 $c_t=\theta c_t^*$ を考えます。消費の伸び率は変わらないので、この経路もオイラー方程式を満たします。予算制約から資産を計算すると $a_t=R^t a_0\big[\theta\beta^t+(1-\theta)\big]$ となり（代入して確かめられます）、

$$\beta^T u'(c_T)\,a_{T+1}=\frac{\theta\beta^{T+1}+(1-\theta)}{\theta(1-\beta)}\to\frac{1-\theta}{\theta(1-\beta)}>0$$

です。横断性条件は満たされません。この経路では、$R^t a_0(1-\theta)$ という資産が利子で増え続けるだけで、永久に消費されません。オイラー方程式だけでは、このような「貯めすぎ」の経路を排除できないのです。

補足：必要条件としての横断性条件

定理 1.10 は、「オイラー方程式と横断性条件を満たせば最適である」という十分条件です。逆に、効用関数についての標準的な仮定のもとでは、最適な経路は横断性条件を必ず満たすことも知られています。そのため実際には、「オイラー方程式を満たす経路のうち、横断性条件を満たすものを探す」という手順で最適な経路を求めます。この逆向きの主張は、第6章で価値関数を使って証明します。

補足：借り入れができる場合

借り入れを認める場合は、制約 $a_{t+1}\geq 0$ の代わりに、「資産の現在価値が、遠い将来に負にならない（借金の現在価値が 0 に近づく）」という条件 $\lim_{T\to\infty}a_{T+1}/R^T\geq 0$ を置きます。これを**ポンジ・ゲームの禁止**（非ポンジ・ゲーム条件）といいます。借金を新しい借金で返し続けることを禁じる条件で、家計に課される制約です。これに対して横断性条件は、家計が自分で選ぶ最適な行動の性質です。2つは似た形をしていますが、役割が異なります。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 等比級数：現在価値、割引効用、乗数効果。
- 安定性の条件 $|a|<1$、$|g'(\bar{x})|<1$：ソローモデルなど、先決変数だけで動くモデルの収束。
- 前向きの解：資産価格、合理的期待のもとでの物価や為替レート。「有界な解を選ぶ」ことが、ジャンプ変数の初期値を決めます。
- オイラー方程式と横断性条件：消費・貯蓄、最適成長（ラムゼイモデル）、資産価格など、動学的な最適化を含むすべてのモデル。

要点

- 1階線形差分方程式 $x_{t+1} = ax_t + b$ では、定常状態からの乖離が毎期 a 倍になります。$|a| < 1$ なら安定、$|a| > 1$ なら不安定です。
- 先決変数は初期値から後ろ向きに、ジャンプ変数は「有界である」という条件から前向きに解きます。$|a| > 1$ のとき、有界な解は将来の値の割引和としてただ一つに決まります。
- 非線形の差分方程式の定常状態は、$|g'(\bar{x})| < 1$ なら（局所的に）安定です。
- 凹な効用関数のもとでは、オイラー方程式と横断性条件を満たす実行可能な経路は最適です。

次の章へ　この章では、変数が1つの差分方程式を扱いました。実際のモデルでは、資本と消費のように、複数の変数が互いに影響し合いながら動きます。次の章では、係数 a の役割を行列の固有値が引き継ぐことを学びます。

大学院とのつながり　オイラー方程式（ジャンプ変数である消費の式）と予算制約や資本蓄積の式（先決変数の式）を連立させた差分方程式システムを解くことが、動学マクロモデルの分析の基本形です。

第2章

固有値と線形動学システム

ここまでの流れ　前の章で、変数が1つの差分方程式 $x_{t+1} = ax_t + b$ では、係数 a の絶対値が 1 より小さいかどうかで、安定か不安定かが決まることを学びました。

前提知識　第1章の定理 1.4（1階線形差分方程式）と前向きの解。行列の積、逆行列、行列式、一次独立（ミクロ版の「線形代数の基礎と二次形式」の章）。必要な事実は2.2節にまとめます。

この章の問い　資本と消費のように、複数の変数が互いに影響し合いながら動くとき、経済が定常状態に向かうかどうかは、どう判定すればよいでしょうか。

この章で分かること　一般の行列の固有値と対角化、線形差分方程式システムの一般解、固有値の絶対値による安定性の判定（証明）、2×2 の場合のトレースと行列式による判定、鞍点と鞍点経路。

2.1　この章の見取り図

変数が n 個あるとき、それらを並べたベクトル $z_t \in \mathbb{R}^n$ の動きを

$$z_{t+1} = Az_t \tag{2.1}$$

という式で表します。A は $n \times n$ 行列です。非線形のモデルも、定常状態のまわりで1次近似すれば、定常状態からの乖離 z_t についてこの形になります。したがって、式 (2.1) を調べることは、動学モデルの定常状態の近くでのふるまいを調べることです。

式 (2.1) が難しいのは、A の非対角成分を通じて変数どうしが絡み合っているからです。この章の考え方は単純で、「座標をとり直して、絡み合いをほどく」ことです。うまい座標（固有ベクトルの方向）で見ると、n 個の変数は互いに無関係な n 本の1変数の差分方程式に分かれ、それぞれに前の章の結果が使えます。そのとき、1変数の場合の係数 a の役割を果たすのが、行列 A の**固有値**です。

2.2 準備：線形代数の復習と複素数

補足：この章で使う線形代数の事実

A を $n \times n$ 行列とします。証明はミクロ版の「線形代数の基礎と二次形式」の章にあります。

- A が正則である（逆行列 A^{-1} をもつ）ことは、「A の列が一次独立」「$Ax = 0$ の解が $x = 0$ だけ」「$\det A \neq 0$」のそれぞれと同値です。
- n 個の一次独立なベクトルは基底になり、どのベクトルもそれらの一次結合としてただ一通りに書けます。
- 2×2 では $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ で、$ad - bc \neq 0$ のとき逆行列は $\dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ です。
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$。対角成分の和をトレースといい、$\operatorname{tr} A$ と書きます。
- 対称行列は、固有値がすべて実数で、固有ベクトルを互いに直交するようにとれます（スペクトル定理）。

動学モデルに現れる行列 A は、ふつう対称ではありません。そのため、最後の事実は使えず、固有値が実数にならないことがあります。そこで、複素数について必要なことだけをまとめておきます。

用語の説明：複素数

- 2乗すると -1 になる数を i と書き、実数 a, b を使って $z = a + b\mathrm{i}$ と表される数を**複素数**といいます。複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書きます。足し算とかけ算は、$\mathrm{i}^2 = -1$ とするほかは、ふつうの文字式と同じです。
- $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ を z の**共役複素数**、$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ を z の**絶対値**といいます。$z\bar{z} = |z|^2$ で、$|z|$ は複素数を平面上の点 (a, b) とみなしたときの、原点からの距離です。
- 絶対値は積と相性がよく、$|zw| = |z|\,|w|$ が成り立ちます。したがって $|z^t| = |z|^t$ です。また $|z + w| \leq |z| + |w|$ です。
- $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$（$r = |z|$）と表すと、$z^t = r^t(\cos t\theta + \mathrm{i}\sin t\theta)$ です（ド・モアブルの定理）。z を繰り返しかけることは、「長さを r 倍し、角度 θ だけ回転する」ことの繰り返しです。

成分が複素数のベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ についても、一次独立や行列との積は実数の場合と同じように定義でき、上にまとめた線形代数の事実は（スペクトル定理を除いて）そのまま成

り立ちます。v の長さは $\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}$ と定めます。

2.3 一般の行列の固有値

定義 2.1（固有値・固有ベクトル）

$n \times n$ の実行列 A について、複素数 λ と、0 でないベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ が

$$Av = \lambda v$$

を満たすとき、λ を A の固有値、v を λ に対する固有ベクトルという。λ についての n 次方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ を、A の特性方程式という。

数式の読み方：固有値と動学の関係

- $Av = \lambda v$ は $(A - \lambda I)v = 0$ と書けます。これが 0 でない解 v をもつのは $A - \lambda I$ が正則でないときなので、固有値は特性方程式の解です。n 次方程式は、複素数の範囲で（重なりも数えて）ちょうど n 個の解をもちます。
- 初期値が固有ベクトル（$z_0 = v$）なら、式 (2.1) の解は $z_1 = \lambda v$、$z_2 = \lambda^2 v$、…、$z_t = \lambda^t v$ です。固有ベクトルの方向に限れば、システムは1変数の式 $x_{t+1} = \lambda x_t$ と同じ動きをします。
- A の成分が実数のとき、$Av = \lambda v$ の両辺の共役をとると $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ です。つまり、実数でない固有値は、必ず共役の組 $\lambda, \bar{\lambda}$ で現れます。

2×2 の場合は、固有値をトレースと行列式だけで表せます。

命題 2.2（2×2 行列の固有値）

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし、$T = \operatorname{tr} A = a + d$、$D = \det A = ad - bc$ とおく。

1. 特性方程式は $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$ で、固有値 λ_1, λ_2 は $\lambda_1 + \lambda_2 = T$、$\lambda_1 \lambda_2 = D$ を満たす。
2. $T^2 > 4D$ ならば固有値は異なる2つの実数、$T^2 = 4D$ ならば重解 $T/2$、$T^2 < 4D$ ならば互いに共役な実数でない複素数である。
3. $T^2 < 4D$ のとき、$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{D}$。

証明　$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ なので、特性方程式は $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$ です。左辺は $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2$ と因数分解できるので、係数を比べて 1 が得られます。2 は、解の公式 $\lambda = \left(T \pm \sqrt{T^2 - 4D}\right)/2$ から分かりま

す。3 では $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ なので、$D = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2$ です。 □

補足：$n \times n$ の場合

一般の $n \times n$ 行列でも、固有値を重なりも数えて $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすると、$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$、$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ が成り立ちます（本書では証明しません。特性方程式の係数を比べることで示せます）。

2.4 対角化

固有ベクトルが「うまい座標」になるためには、n 個の固有ベクトルが一次独立で、基底になっている必要があります。固有値がすべて異なれば、それは自動的に成り立ちます。

定理 2.3（異なる固有値の固有ベクトルは一次独立）

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を A の互いに異なる固有値とし、$v_1, \ldots, v_k$ をそれぞれに対する固有ベクトルとする。このとき $v_1, \ldots, v_k$ は一次独立である。

証明

方針　k についての数学的帰納法で示します。

$k = 1$ のときは、$v_1 \neq 0$ なので成り立ちます。$k-1$ 個のときは成り立つと仮定し、

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0 \tag{2.2}$$

とします。この式の両辺に A をかけたものから、この式の両辺を λ_k 倍したものを引くと、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i v_i - \lambda_k \sum_{i=1}^{k} c_i v_i && (Av_i = \lambda_i v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} c_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i && (i = k \text{ の項は消える}) \end{aligned}$$

です。仮定より $v_1, \ldots, v_{k-1}$ は一次独立なので、$c_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$（$i = 1, \ldots, k-1$）です。固有値は互いに異なるので $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ で、$c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ です。これを式 (2.2) に戻すと $c_k v_k = 0$ で、$v_k \neq 0$ より $c_k = 0$ です。 □

定理 2.4（対角化）

$n \times n$ 行列 A が、一次独立な n 個の固有ベクトル $v_1, \dots, v_n$（固有値は $\lambda_1, \dots, \lambda_n$）をもつとする。$v_1, \dots, v_n$ を列とする行列を P、$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を対角成分とする対角行列を Λ とすると、P は正則で、

$$P^{-1}AP = \Lambda, \qquad A = P\Lambda P^{-1}, \qquad A^t = P\Lambda^t P^{-1} \quad (t = 1, 2, \dots) \tag{2.3}$$

が成り立つ。特に、A の固有値がすべて異なれば、この仮定は満たされる。

証明　P の列は一次独立なので、P は正則です。AP の第 i 列は $Av_i = \lambda_i v_i$ で、これは $P\Lambda$ の第 i 列と同じです。したがって $AP = P\Lambda$ で、左から P^{-1} をかければ1つ目の式、右から P^{-1} をかければ2つ目の式が得られます。3つ目の式は、

$$A^2 = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$$

のように、間の $P^{-1}P$ が消えることを繰り返せば得られます。最後の主張は定理 2.3 によります。 □

数式の読み方：対角化の意味

- $w = P^{-1}z$ は、ベクトル z を固有ベクトルの基底で表したときの係数です（$z = Pw = w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n$）。
- この座標では、A をかけることは「第 i 成分を λ_i 倍する」ことになります。変数の絡み合いが消えています。
- Λ^t は、対角成分が λ_i^t の対角行列です。行列の t 乗という難しい計算が、数の t 乗に置きかわります。
- 対称行列の場合は P を直交行列にとれましたが、一般の行列では固有ベクトルは直交するとは限りません。

計算例：この章を通して使う例

$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ とします。$T = \frac{5}{2}$、$D = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ なので、特性方程式は $\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0$、つまり $(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 2) = 0$ で、固有値は $\lambda_1 = \frac{1}{2}$、$\lambda_2 = 2$ です。

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ のとき、$(A - \frac{1}{2}I)v = 0$ の第1行は $\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = 0$ なので、$v_1 = (1, 1)^\top$ です。$\lambda_2 = 2$ のとき、$(A - 2I)v = 0$ の第1行は $-v_1 - \frac{1}{2}v_2 = 0$ なので、$v_2 = (1, -2)^\top$ です。したがって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

です。この行列は対称ではなく、2つの固有ベクトルは直交していません。

2.5 線形差分方程式システムの解と安定性

対角化を使って、式 (2.1) を解きます。

定理 2.5（線形差分方程式システムの一般解）

A が定理 2.4 の仮定を満たすとする。初期値 z_0 から出発する $z_{t+1} = Az_t$ の解は

$$z_t = c_1\lambda_1^t v_1 + c_2\lambda_2^t v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^t v_n \tag{2.4}$$

である。ここで $c = (c_1, \ldots, c_n)^\top = P^{-1}z_0$ は、z_0 を固有ベクトルの一次結合 $z_0 = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ で表したときの係数である。

証明　$z_t = A^t z_0$ に式 (2.3) を代入します。

$$\begin{aligned} z_t &= P\Lambda^t P^{-1} z_0 && (A^t = P\Lambda^t P^{-1}) \\ &= P\Lambda^t c && (c = P^{-1}z_0) \\ &= c_1\lambda_1^t v_1 + \cdots + c_n\lambda_n^t v_n && (\Lambda^t c \text{ の第 } i \text{ 成分は } \lambda_i^t c_i、P \text{ の第 } i \text{ 列は } v_i) \end{aligned}$$

□

数式の読み方：一般解の読み方

- 解は、固有ベクトルの方向ごとの動きの重ね合わせです。v_i の方向の成分は、毎期 λ_i 倍になります。
- $|\lambda_i| < 1$ の方向の成分は時間とともに消え、$|\lambda_i| > 1$ の方向の成分は拡大します。
- 固有値が実数でないときは、共役の組 $\lambda, \bar{\lambda}$ の項が合わさって実数のベクトルになり、$|\lambda|^t$ の速さで拡大または縮小しながら回転する動き（循環）を表します。
- 定数項のあるシステム $x_{t+1} = Ax_t + b$ は、1 が A の固有値でなければ定常状態 $\bar{x} = (I - A)^{-1}b$ がただ一つあり、乖離 $z_t = x_t - \bar{x}$ が式 (2.1) を満たします。

定理 2.6（安定性の判定）

A が定理 2.4 の仮定を満たすとする。次の2つは同値である。

1. どんな初期値 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ から出発しても、$z_{t+1} = Az_t$ の解は $z_t \to 0$ を満たす。
2. A のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい。

証明

ステップ1　$2 \Rightarrow 1$

式 (2.4) の長さを、項ごとに上から抑えます。

$$\|z_t\| \le |c_1|\,|\lambda_1|^t \|v_1\| + \cdots + |c_n|\,|\lambda_n|^t \|v_n\|$$

です。すべての i で $|\lambda_i| < 1$ なら、$|\lambda_i|^t \to 0$ なので、右辺は 0 に収束します。

ステップ2　$1 \Rightarrow 2$

対偶を示します。ある固有値が $|\lambda_j| \ge 1$ を満たすとし、固有ベクトル v_j を実部と虚部に分けて $v_j = x + \mathrm{i}y$（$x, y \in \mathbb{R}^n$）と書きます。もし x から出発した解 $A^t x$ と、y から出発した解 $A^t y$ がともに 0 に収束するなら、$A^t v_j = A^t x + \mathrm{i}A^t y$ も 0 に収束するはずです。ところが $A^t v_j = \lambda_j^t v_j$ なので、

$$\|A^t v_j\| = |\lambda_j|^t \|v_j\| \ge \|v_j\| > 0$$

で、0 に収束しません。したがって、初期値 x または y から出発した解の少なくとも一方は 0 に収束せず、1 は成り立ちません。　□

補足：対角化できない場合

固有値に重なりがあると、一次独立な固有ベクトルが n 個とれず、対角化できないことがあります。その場合も、定理 2.6 の結論（すべての固有値の絶対値が 1 より小さいことと、すべての解が 0 に収束することは同値）はそのまま成り立ちます。この章の最後の発展枠で、その理由を説明します。

固有値を実際に計算しなくても、2×2 の場合は、トレースと行列式だけで安定性を判定できます。

命題 2.7（2×2 の場合の判定）

2×2 の実行列 A について、$T=\operatorname{tr}A$、$D=\det A$、$p(\lambda)=\lambda^2-T\lambda+D$ とおく。$p(1)=1-T+D$、$p(-1)=1+T+D$ である。

1. 2つの固有値の絶対値がともに 1 より小さい $\iff$ $p(1)>0$、$p(-1)>0$、$D<1$。
2. 一方の固有値の絶対値が 1 より小さく、もう一方が 1 より大きい $\iff$ $p(1)\,p(-1)<0$。

証明

ステップ1　固有値が実数でない場合（$T^2<4D$）

命題 2.2 より $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{D}$ です。また、p は実数の解をもたず、λ^2 の係数が正なので、すべての実数 λ で $p(\lambda)>0$ です。特に $p(1)>0$、$p(-1)>0$ はつねに成り立ちます。したがって、1 の両辺はどちらも「$D<1$」と同値です。2 については、絶対値が等しいので左辺は成り立たず、$p(1)p(-1)>0$ なので右辺も成り立ちません。

ステップ2　固有値が実数の場合（$T^2\geq 4D$）

固有値を $\lambda_1\leq\lambda_2$ とすると、$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$ なので、

$$p(1)=(1-\lambda_1)(1-\lambda_2),\qquad p(-1)=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2),\qquad D=\lambda_1\lambda_2 \tag{2.5}$$

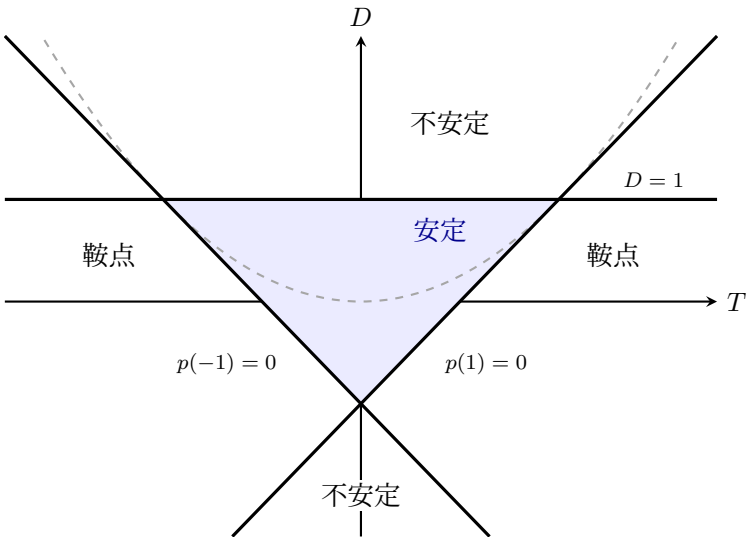
です。

1 の「$\Rightarrow$」を示します。$-1<\lambda_1\leq\lambda_2<1$ なら、式 (2.5) の4つのかっこの中はすべて正なので $p(1)>0$、$p(-1)>0$ です。また $|D|=|\lambda_1|\,|\lambda_2|<1$ です。

1 の「$\Leftarrow$」を示します。$p(1)>0$ より、$1-\lambda_1$ と $1-\lambda_2$ は同じ符号なので、2つの固有値は「ともに 1 より小さい」か「ともに 1 より大きい」かのどちらかです。後者なら $D=\lambda_1\lambda_2>1$ となり、$D<1$ に反します。同じように、$p(-1)>0$ より、2つの固有値は「ともに -1 より大きい」か「ともに -1 より小さい」かのどちらかで、後者なら $D>1$ となって矛盾します。したがって $-1<\lambda_1\leq\lambda_2<1$ です。

2 を示します。式 (2.5) より $p(1)\,p(-1) = (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)$ です。これが負であることは、$1-\lambda_1^2$ と $1-\lambda_2^2$ の符号が異なること、つまり $|\lambda_1|$ と $|\lambda_2|$ の一方が 1 より小さく、もう一方が 1 より大きいことと同じです。 □

図 2.1　トレースと行列式による分類（2×2 の場合）



横軸はトレース T、縦軸は行列式 D。実線は $D=1$、$D=T-1$（$p(1)=0$）、$D=-T-1$（$p(-1)=0$）。灰色の点線は $D=T^2/4$ で、これより上では固有値が実数でない。

図の読み方

1. 色のついた三角形の内側が、命題 2.7 の 1 の条件を満たす領域です。2つの固有値の絶対値がともに 1 より小さく、すべての解が定常状態に収束します。
2. 三角形の左右にある、2本の斜めの線にはさまれた領域では $p(1)\,p(-1)<0$ で、固有値の一方だけが絶対値 1 を超えます。これが次の節で扱う鞍点です。
3. 残りの領域（$D=1$ の線より上で2本の斜めの線の上側、および2本の斜めの線の下側）では、2つの固有値の絶対値がともに 1 より大きく、定常状態以外から出発した解はすべて発散します。
4. 点線の放物線より上では固有値が実数でなく、解は循環しながら動きます。このとき安定かどうかは、$D<1$ かどうかだけで決まります。

補足：経済学での使いどころ

ソローモデルのように先決変数だけからなるモデルでは、定常状態が意味をもつために「安定」であることが求められます。これに対して、最適化を行う家計を含むモデルでは、次の節で見るように「鞍点」であることが、解がただ一つに決まるための条件になります。さらに、2つの変数がどちらもジャンプ変数であるモデル（基本的なニューケインジアン・モデルがその例です）では、「2つの固有値がともに絶対値 1 を超える」ことが求められ、命題 2.7 と同じ計算から、金融政策ルールについての条件（テイラー原理）が導かれます。どの領域が望ましいかは、先決変数とジャンプ変数の数によって変わります。

2.6 鞍点と鞍点経路

固有値の一方が絶対値 1 より小さく、もう一方が 1 より大きい定常状態を**鞍点**といいます。前の章の言葉で言えば、「安定な方向」と「不安定な方向」が1つずつある状態です。ここでは変数を $z_t = (k_t, c_t)^\top$ と書き、k_t は先決変数（初期値 k_0 が与えられている）、c_t はジャンプ変数（初期値 c_0 は自由に選べる）とします。どちらも定常状態からの乖離です。

定理 2.8（鞍点経路）

2×2 の実行列 A の固有値が実数で、$|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ を満たすとし、対応する実数の固有ベクトルを v_1, v_2 とする。$z_{t+1} = Az_t$ の解について、次が成り立つ。

1. z_0 が v_1 の定数倍であれば $z_t \to 0$。そうでなければ $\|z_t\|$ は限りなく大きくなる。
2. v_1 の第1成分が 0 でないとし、$v_1 = (1, m)^\top$ と基準化する。このとき、与えられた k_0 に対して、解が有界になる c_0 はただ一つ存在し、$c_0 = mk_0$ である。そのときの解は

$$k_t = \lambda_1^t k_0, \qquad c_t = mk_t$$

である。

証明　固有値が異なるので、定理 2.5 より、解は $z_t = c_1\lambda_1^t v_1 + c_2\lambda_2^t v_2$（$z_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$）と書けます。$v_1, v_2$ は実数のベクトルなので、係数 c_1, c_2 も実数です。

1 を示します。z_0 が v_1 の定数倍であることは、$c_2 = 0$ と同じです。このとき $z_t = c_1\lambda_1^t v_1 \to 0$ です。$c_2 \neq 0$ のときは、三角不等式より

$$\|z_t\| \geq |c_2|\,|\lambda_2|^t\|v_2\| - |c_1|\,|\lambda_1|^t\|v_1\|$$

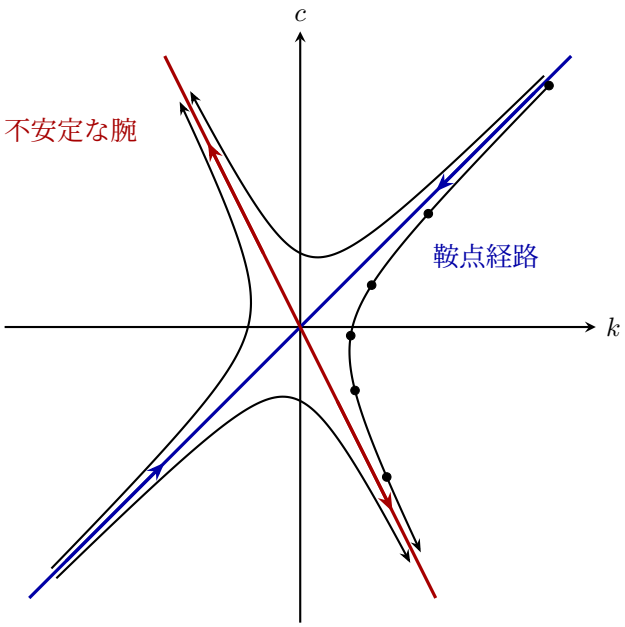
です。右辺の第1項は限りなく大きくなり、第2項は 0 に収束するので、$\|z_t\|$ は限りなく大きくなります。

2 を示します。1 より、解が有界であることは $z_0 = c_1 v_1 = (c_1, c_1 m)^\top$ と書けることと同じです。第1成分が k_0 なので $c_1 = k_0$ で、したがって $c_0 = m k_0$ とただ一つに決まります。このとき $z_t = k_0 \lambda_1^t (1, m)^\top$ なので、$k_t = \lambda_1^t k_0$、$c_t = m k_t$ です。 □

数式の読み方：鞍点経路の意味

- 定常状態に収束する初期値は、平面全体ではなく、v_1 方向の直線の上だけです。この直線を**鞍点経路**（安定な腕）といいます。v_2 方向の直線は不安定な腕です。
- 先決変数 k_0 は動かせませんが、ジャンプ変数 c_0 は動かせます。「解が発散しない」という条件が、c_0 を鞍点経路の上の値 $m k_0$ に決めます。これは、前の章の「不安定な式は前向きに解く」ことの2変数版です。
- 鞍点経路の上では、システムは1変数の安定な差分方程式 $k_{t+1} = \lambda_1 k_t$ になります。安定な固有値 λ_1 が収束の速さを、固有ベクトルの傾き m が消費と資本の関係（**政策関数** $c = mk$）を与えます。

図 2.2　鞍点と鞍点経路



計算例の行列 A（固有値 $\frac{1}{2}$、2、固有ベクトル $(1,1)^\top$、$(1,-2)^\top$）による $z_{t+1} = A z_t$。青の直線は $c = k$、赤の直線は $c = -2k$。黒の曲線は、初期値が鞍点経路からわずかに外れた解 $z_t = \pm 2 \cdot (\frac{1}{2})^t (1,1)^\top \pm 0.02 \cdot 2^t (1,-2)^\top$ をなめらかにつないだもの。黒い点は、そのうちの一つの $t = 0, 1, \ldots, 5$ での位置。

図の読み方

1. 原点が定常状態です。青の直線（固有値 $\frac{1}{2}$ の固有ベクトルの方向）の上から出発すると、毎期、原点までの距離が半分になって収束します。
2. 赤の直線（固有値 2 の固有ベクトルの方向）の上では、原点からの距離が毎期2倍になります。
3. 黒の曲線は、青の直線からほんの少しだけ外れた点から出発した解です。はじめは原点に近づきますが、不安定な方向の成分が毎期2倍に拡大するので、やがて赤の直線に沿って離れていきます。黒い点の間隔から、原点の近くではゆっくり動き、離れるにつれて速くなることが分かります。
4. 与えられた k_0（横軸の位置）に対して、収束する c_0 は青の直線上の1点だけです。

計算例：鞍点経路を式で求める

計算例の A では、$\lambda_1 = \frac{1}{2}$、$v_1 = (1,1)^\top$ なので $m = 1$ です。定理 2.8 より、k_0 が与えられたとき、有界な解は $c_0 = k_0$ から出発する $k_t = (\frac{1}{2})^t k_0$、$c_t = k_t$ のただ一つです。もし $c_0 = k_0 + \varepsilon$ と少しでもずれると、$z_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ の係数は $c = P^{-1} z_0$ より $c_2 = -\varepsilon/3$ となり、解に $-\frac{\varepsilon}{3} 2^t (1,-2)^\top$ という発散する項が加わります。

変数が3つ以上の場合も、考え方は同じです。

定義 2.9（安定部分空間）

A が定理 2.4 の仮定を満たし、固有値がすべて実数であるとする。絶対値が 1 より小さい固有値に対する固有ベクトルが張る空間を、A の安定部分空間という。

命題 2.10（有界な解と安定部分空間）

上の定義の仮定に加えて、絶対値がちょうど 1 の固有値はないとする。このとき、$z_{t+1} = A z_t$ の解が有界であることと、z_0 が安定部分空間に属することは同値である。またこのとき $z_t \to 0$ である。

証明　定理 2.5 より $w_t = P^{-1} z_t$ の第 i 成分は $c_i \lambda_i^t$ です。z_0 が安定部分空間に属するとは、$|\lambda_i| > 1$ であるすべての i について $c_i = 0$ であることです。このとき、残る項はすべて 0 に収束するので $z_t \to 0$ で、特に有界です。逆に、$|\lambda_i| > 1$ かつ $c_i \neq 0$ となる i があれば、w_t の第 i 成分が限りなく大きくなります。z_t が有界なら $w_t = P^{-1} z_t$ も有界になるはずなので、z_t は有界ではありません。 □

補足：経済学での使いどころ　固有値を数える

安定部分空間の次元は、絶対値が 1 より小さい固有値の数です。変数のうち m 個が先決変数で、残りがジャンプ変数であるとします。先決変数の初期値を決めたとき、安定部分空間の上の点がちょうど一つ決まるためには、安定な固有値の数が先決変数の数 m に等しいことが必要です（さらに、定理 2.8 の「v_1 の第1成分が 0 でない」にあたる条件も必要です）。安定な固有値が多すぎれば解は無数にあり、少なすぎれば有界な解は存在しません。この「固有値を数える」条件を一般の形で述べて証明したものが、線形合理的期待モデルの章で扱うブランシャール＝カーンの定理です。

発展：固有値が重なって対角化できない場合

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ は、固有値が λ（重解）で、固有ベクトルは $(1,0)^\top$ の定数倍しかなく、対角化できません。しかし、t 乗は直接計算でき、

$$A^t = \begin{pmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix}$$

です（数学的帰納法で確かめられます）。λ^t のほかに $t\lambda^{t-1}$ という項が現れますが、$|\lambda| < 1$ なら、t が増える速さより $|\lambda|^{t-1}$ が減る速さの方が速いので、この項も 0 に収束します。

一般に、どんな正方行列も、正則行列 P を使って、対角線上に固有値が並び、そのすぐ上に 1 または 0 が並ぶ形（ジョルダン標準形）に直せることが知られています。その t 乗の成分は「t の多項式 $\times \lambda_i^t$」の形になるので、定理 2.6 の結論は対角化できない場合にも成り立ちます。実際の数値計算では、ジョルダン標準形の代わりに、直交行列（一般にはユニタリ行列）で上三角行列に直すシューア分解を使います。これは線形合理的期待モデルの章で扱います。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 固有値の絶対値：定常状態の安定性の判定、収束の速さ。
- 対角化と一般解：線形化したモデルの解、ショックに対する反応（インパルス応答）の計算。
- トレースと行列式による判定：2×2 のモデルの安定性、金融政策ルールのもとでの均衡の一意性。
- 鞍点経路：ラムゼイモデルなど、先決変数とジャンプ変数を1つずつ含むモデルの解。政策関数の傾きと収束の速さ。

要点

- $z_{t+1} = Az_t$ の解は、固有ベクトルの方向ごとの動き $c_i\lambda_i^t v_i$ の重ね合わせです。
- すべての解が定常状態に収束するのは、すべての固有値の絶対値が 1 より小さいときです。2×2 では、$p(1) > 0$、$p(-1) > 0$、$D < 1$ で判定できます。
- 固有値の一方だけが絶対値 1 より小さい鞍点では、収束する解は鞍点経路の上だけにあり、ジャンプ変数の初期値がただ一つに決まります。
- 解が一つに決まるかどうかは、「安定な固有値の数」と「先決変数の数」を比べて判定します。

次の章へ　この章では時間を $t = 0, 1, 2, \ldots$ と区切って考えました。時間を連続的に流れるものとして扱うと、差分方程式は微分方程式に変わり、安定性の条件は「固有値の絶対値が 1 より小さい」から「固有値の実部が負」に変わります。

大学院とのつながり　定常状態のまわりで線形化し、固有値を数えて解を求めるという手順は、ラムゼイモデルからDSGEモデルまで共通です。モデルが大きくなっても、行うことはこの章と同じです。

第3章

微分方程式

ここまでの流れ　第1章で、離散時間の差分方程式 $x_{t+1} = g(x_t)$ の定常状態と安定性、後ろ向きの解と前向きの解を学びました。第2章では、固有値で線形システムの安定性を判定し、鞍点経路を求めました。

前提知識　第1章の定理 1.4・定理 1.5・定理 1.6、第2章の対角化（定理 2.4）と鞍点経路（定理 2.8）。1変数の微分と積分（積の微分、合成関数の微分、平均値の定理）。積分の基本は3.3節で復習します。

この章の問い　時間を連続的に流れるものと考えたとき、変数の動きはどう表され、どう解けるのでしょうか。離散時間で学んだ安定性・前向きの解・鞍点経路は、連続時間ではどのような形になるのでしょうか。

この章で分かること　微分方程式の解の存在と一意性、1階線形微分方程式の解の公式、位相線と局所的な安定性、積分因子による予算制約の導出、資産価格の前向きの解、線形システムの解と固有値の実部による安定性の判定、鞍点経路、非線形システムの線形化の根拠。

3.1　この章の見取り図

この章の内容は、第1章と第2章の内容を、離散時間から連続時間に移したものです。対応関係を先に表にしておきます。

	離散時間（第1・2章）	連続時間（この章）
基本の式	$x_{t+1} = ax_t$	$\dot{x} = ax$
解	$x_t = a^t x_0$	$x(t) = e^{at}x(0)$
安定の条件	$\lvert a\rvert < 1$	$a < 0$
非線形の場合	$\lvert g'(\bar{x})\rvert < 1$	$f'(\bar{x}) < 0$
前向きに解く条件	$\lvert a\rvert > 1$	$a > 0$
システムの安定性	固有値の絶対値が 1 より小さい	固有値の実部が負
鞍点	絶対値が 1 より小さい固有値と大きい固有値	負の固有値と正の固有値

連続時間には、離散時間にない利点があります。解の軌道がなめらかな曲線になるので、平面上に図（位相図）を描いて、式を解かずに解のふるまいを読み取ることができます。この利点を支えているのが、次の節で述べる「解はただ一つに決まる」という定理です。

3.2　微分方程式と解の一意性

変数 $x(t)$ の時間についての微分を $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と書きます。$\dot{x}$ と x 自身との関係を表す式

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) \tag{3.1}$$

を**微分方程式**と呼びます。「今の値 $x(t)$ が決まると、今この瞬間の変化の速さ $\dot{x}(t)$ が決まる」という関係です。差分方程式の「1期間の変化」を、「瞬間的な変化の速さ」に置きかえたものです。x がベクトルで f がベクトルの値をとる場合も、同じ形に書きます。

用語の説明

- **常微分方程式**：未知の関数が時間 t だけの関数である微分方程式。マクロ経済学の動学のほとんどがこれです。
- **1階**：1回微分（$\dot{x}$）までしか含まない。
- **自律的**：右辺が t を直接含まず、x だけで決まる（式(3.1)の形）。
- **解**：ある区間で微分可能で、その区間のすべての t で微分方程式を満たす関数 $x(t)$。数ではなく**関数**を求めるのが、ふつうの方程式との違いです。
- **初期値問題**：微分方程式に初期条件 $x(0) = x_0$ を加えた問題。
- **定常状態**：$f(\bar{x}) = 0$ を満たす点 $\bar{x}$。そこから出発すると、$x(t) = \bar{x}$ のまま動きません。

初期値を決めたとき、解は存在するでしょうか。また、ただ一つに決まるでしょうか。差分方程式では、x_0 から $x_1, x_2, \dots$ が順に決まるので、この問いは自明でした。微分方程式では自明ではありませんが、f がなめらかであれば、答えはどちらも「はい」です。

定義 3.1（リプシッツ条件）

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の写像 $f : U \to \mathbb{R}^n$ が局所リプシッツ連続であるとは、U の各点 x_0 に対して、x_0 のある近傍と定数 L があって、その近傍のすべての x, y について

$$\|f(x) - f(y)\| \le L\,\|x - y\|$$

が成り立つことをいう。

数式の読み方：リプシッツ条件の意味

- 「入力の差が小さければ、出力の差はその定数倍以下に収まる」という条件で、関数の変化の急さに上限があることを表します。
- f が連続微分可能であれば、平均値の定理から、局所リプシッツ連続です（傾きの絶対値の上限が L になります）。経済モデルに現れる関数は、ふつうこの条件を満たします。
- $f(x) = \sqrt{|x|}$ は、$x = 0$ で傾きが無限大になるので、0 の近くではこの条件を満たしません。

定理 3.2（解の存在と一意性）

$f : U \to \mathbb{R}^n$ が局所リプシッツ連続ならば、任意の $x_0 \in U$ に対して、初期値問題 $\dot{x} = f(x)$、$x(0) = x_0$ の解が、0 を含むある区間の上に存在する。また、2つの解は、両方が定義されている区間の上で一致する。

この定理は**ピカール＝リンデレフの定理**（またはコーシー＝リプシッツの定理）と呼ばれます。証明には、関数の列を作って極限をとる議論が必要なので、その道具を準備する第5章の発展枠で行います。ここでは、定理の意味と使い方を確認します。

補足：仮定が欠けると

$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$、$x(0) = 0$ を考えます。$x(t) = 0$（ずっと動かない）は解です。ところが、$x(t) = t^2$（$t \geq 0$）も $\dot{x} = 2t = 2\sqrt{t^2}$ を満たすので解です。同じ初期値から出発する解が2つあり、将来が一つに決まりません。右辺がリプシッツ条件を満たさないと、このようなことが起こります。

系 3.3（軌道は交わらない）

定理 3.2 の仮定のもとで、自律的な微分方程式 $\dot{x} = f(x)$ の2つの解 $x(t)$、$y(t)$ が、ある時点で同じ点を通る（$x(t_1) = y(t_2)$）ならば、一方は他方の時間をずらしたものである（$x(t) = y(t + t_2 - t_1)$）。特に、定常状態でない点から出発した解が、有限の時間で定常状態に到達することはない。

証明　$\tilde{y}(t) = y(t + t_2 - t_1)$ とおきます。右辺が t を直接含まないので、$\tilde{y}$ も $\dot{x} = f(x)$ の解です。x と $\tilde{y}$ は時点 t_1 で同じ値をとるので、t_1 を初期時点とみなして定理 3.2 を使うと、$x = \tilde{y}$ です。後半を示します。定常状態 $\bar{x}$ にとどまる関数 $y(t) = \bar{x}$ は解です。ある解がある時点で $\bar{x}$ に到達したとすると、前半より、その解は y の時間をずらしたもの、つまり最初からずっと $\bar{x}$ にいる解です。　□

補足：経済学での使いどころ

系 3.3 は、位相図を読むときの基本的な規則です。平面上の各点を通る軌道は1本だけで、軌道どうしは交わりません。したがって、鞍点経路は平面を2つの領域に分け、一方の領域から出発した軌道がもう一方の領域に入ることはありません。また、定常状態への収束は必ず「限りなく近づく」形になり、有限の時間で到達することはありません。

3.3 積分の基本

微分方程式を解くには、微分の逆の操作である積分を使います。

用語の説明：不定積分と定積分

- **不定積分**：微分すると $f(x)$ になる関数 $F(x)$（**原始関数**）を求めること。$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ と書きます。C は任意の定数（**積分定数**）で、定数は微分すると消えるので、何を足しても原始関数になることを表します。
- **定積分**：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。区間 $[a, b]$ で曲線 f の下の面積（細かい短冊 $f(x)\,\mathrm{d}x$ の和の極限）です。
- **微分積分学の基本定理**：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。面積は原始関数の差で計算できます。

数式の読み方：よく使う積分の公式

微分の公式を逆に読むと得られます。

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C\ (a \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \qquad \int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

例：$\int_0^T e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-rt}/r\right]_0^T = (1 - e^{-rT})/r$。$T \to \infty$ で $1/r$ となります。これは、利子率 r のもとで、毎瞬間 1 の割合で永久に支払いを受ける資産の現在価値です。離散時間の $\sum_{t \geq 1} 1/(1+r)^t = 1/r$（第1章）に対応します。

3.4　1階線形微分方程式

最も基本的な形 $\dot{x} = ax$ から始めます。$x(t) > 0$ として、次のように解くことができます。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &= a && \text{（両辺を } x \text{ で割る）} \\ \frac{\mathrm{d}\ln x(t)}{\mathrm{d}t} &= a && \text{（合成関数の微分：} \mathrm{d}\ln x/\mathrm{d}t = \dot{x}/x\text{）} \\ \ln x(t) - \ln x(0) &= at && \text{（両辺を } 0 \text{ から } t \text{ まで積分）} \\ x(t) &= x(0)\, e^{at} && \text{（両辺を指数関数に）} \end{aligned}$$

「成長率 $\dot{x}/x$ が一定の値 a ならば、指数関数的に成長する」という結果です。この解き方は x で割っているので、x が 0 や負になる場合には使えません。次の定理は、定数項が時間とともに変わる場合も含めて、すべての場合を一度に扱います。

定理 3.4（1階線形微分方程式の解）

a を実数、$b(t)$ を $t \geq 0$ で連続な関数とする。初期値問題

$$\dot{x} = ax + b(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{3.2}$$

の解はただ一つ存在し、

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}b(s)\,\mathrm{d}s \tag{3.3}$$

で与えられる。

証明のアイデア

両辺に e^{-at} をかけると、左辺が「$e^{-at}x(t)$ の微分」というひとまとまりの形になり、そのまま積分できます。この e^{-at} を**積分因子**といいます。

証明

ステップ1　解であれば式(3.3)の形であること

$x(t)$ を解とします。積の微分の公式より

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-at}x(t)\right) &= e^{-at}\dot{x}(t) - ae^{-at}x(t) && \text{（積の微分）} \\ &= e^{-at}b(t) && \text{（}\dot{x} - ax = b(t) \text{ を代入）} \end{aligned}$$

です。両辺を 0 から t まで積分すると、$e^{-at}x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-as}b(s)\,\mathrm{d}s$ となります。両辺に e^{at} をかければ式(3.3)です。これで、解があるとすれば式(3.3)だけであることが分かりま

した。

ステップ2　式(3.3)が解であること

式(3.3)を $x(t) = e^{at}\bigl[x_0 + \int_0^t e^{-as}b(s)\,\mathrm{d}s\bigr]$ と書き直します。b は連続なので、かっこの中は微分可能で、その微分は $e^{-at}b(t)$ です（微分積分学の基本定理）。積の微分より $\dot{x} = ax + e^{at}\cdot e^{-at}b(t) = ax + b(t)$ で、$x(0) = x_0$ も成り立ちます。 □

系 3.5（定数項が一定の場合と安定性）

$a \neq 0$ で $b(t) = b$ が一定のとき、定常状態を $\bar{x} = -b/a$ とすると、式(3.2)の解は

$$x(t) = \bar{x} + e^{at}\bigl(x_0 - \bar{x}\bigr) \tag{3.4}$$

である。したがって、$a < 0$ ならばどんな x_0 から出発しても $x(t) \to \bar{x}$ であり、$a > 0$ ならば $x_0 \neq \bar{x}$ であるかぎり $|x(t) - \bar{x}|$ は限りなく大きくなる。

証明　式(3.3)の積分を計算します。

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{a(t-s)}b\,\mathrm{d}s &= b\Bigl[-\frac{e^{a(t-s)}}{a}\Bigr]_{s=0}^{s=t} && (s\text{ について積分})\\ &= \frac{b}{a}\bigl(e^{at} - 1\bigr) = \bar{x} - e^{at}\bar{x} && (b/a = -\bar{x})\end{aligned}$$

これを式(3.3)に代入すると、式(3.4)になります。 □

数式の読み方：離散時間との対応

- 式(3.4)は、第1章の式(1.2)の a^t が e^{at} に変わった形です。「定常状態からの乖離が指数的に変化する」という構造は同じです。
- 連続時間の解を、$t = 0, 1, 2, \ldots$ の時点だけで見ると、乖離は1期間ごとに e^a 倍になっています。$|e^a| < 1$ は $a < 0$ と同じなので、離散時間の安定の条件「係数の絶対値が 1 より小さい」が、連続時間では「係数が負」に変わります。
- $a < 0$ のとき、乖離が半分になるまでの時間（半減期）は $e^{at} = \frac{1}{2}$ より $t = \ln 2/|a|$ です。

3.5 変数分離法と、成長率が時間で変わる場合

$\dot{x} = ax$ を解いた手順は、次のように一般化できます。右辺が「x だけの式」と「t だけの式」の積 $\dot{x} = h(x)\,q(t)$ に分けられるとき、

$$\frac{1}{h(x)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q(t) \qquad (x \text{ を含む部分を左辺に集める})$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int q(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{両辺を } t \text{ で積分（左辺は置換積分）})$$

と、左右別々に積分すれば解けます。これを**変数分離法**と呼びます（$h(x) \neq 0$ である範囲で使えます）。

計算例：成長率が時間とともに変わる場合

成長率が時間の関数 $g(t)$ である量 $\dot{x}/x = g(t)$ を解くと

$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}t} = g(t) \qquad (\text{左辺は } \ln x \text{ の微分})$$

$$\ln x(t) - \ln x(0) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s \qquad (0 \text{ から } t \text{ まで積分})$$

$$x(t) = x(0)\exp\Big(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\Big) \qquad (\text{指数関数に戻す})$$

「対数の水準は、成長率の積分（累積）である」という関係です。積分の中の変数を s と書いたのは、上端の t と区別するためです（積分の中の文字は何でもよく、**積分変数**と呼びます）。利子率が時間とともに変わるとき、時点 t の1円の現在価値が $\exp\big(-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\big)$ になるのも、同じ計算です。

3.6 非線形の微分方程式と位相線

一般の $\dot{x} = f(x)$（x は1変数）は、式で解けないことがほとんどです。しかし、定常状態と安定性は、解かなくても分かります。$f(x) > 0$ の範囲では x は増え、$f(x) < 0$ の範囲では減ります。横軸の上にこの向きを矢印で描いたものを**位相線**と呼びます。定常状態の近くでのふるまいは、差分方程式のとき（定理 1.6）と同じく、傾き $f'(\bar{x})$ で決まります。

定理 3.6（定常状態の局所的な安定性）

f は $\bar{x}$ を含む区間で連続微分可能で、$f(\bar{x}) = 0$ とする。

1. $f'(\bar{x}) < 0$ ならば、ある $\delta > 0$ と $\kappa > 0$ があって、$|x_0 - \bar{x}| < \delta$ から出発した $\dot{x} = f(x)$ の解は、すべての $t \geq 0$ で

$$|x(t) - \bar{x}| \leq e^{-\kappa t}|x_0 - \bar{x}|$$

   を満たす。特に $x(t) \to \bar{x}$ である。

2. $f'(\bar{x}) > 0$ ならば、ある $\delta > 0$ があって、$x_0 \neq \bar{x}$ から出発した解は、いつかは区間 $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ の外に出る。

証明のアイデア

定常状態までの距離の2乗 $W(t) = (x(t) - \bar{x})^2$ が、時間とともにどう変わるかを調べます。$f'(\bar{x}) < 0$ なら、定常状態の近くでは「右にずれていれば左へ、左にずれていれば右へ」動くので、W は減り続けます。その減る速さを平均値の定理で評価します。

証明

ステップ1　準備

1 を示します。$f'(\bar{x}) < -\kappa < 0$ となる κ を一つとります。f' は連続なので、ある $\delta > 0$ があって、$|x - \bar{x}| \leq \delta$ ならば $f'(x) \leq -\kappa$ です。このような x について、平均値の定理より、x と $\bar{x}$ の間のある点 ξ で $f(x) = f(x) - f(\bar{x}) = f'(\xi)(x - \bar{x})$ です。$W(t) = (x(t) - \bar{x})^2$ とおくと、$|x(t) - \bar{x}| \leq \delta$ であるかぎり

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) &= 2\big(x(t) - \bar{x}\big)\dot{x}(t) && \text{（合成関数の微分）} \\
&= 2\big(x(t) - \bar{x}\big)f\big(x(t)\big) && \text{（微分方程式）} \\
&= 2f'(\xi)\big(x(t) - \bar{x}\big)^2 && \text{（平均値の定理）} \\
&\leq -2\kappa\, W(t) && \text{（}f'(\xi) \leq -\kappa\text{）}
\end{aligned}$$

が成り立ちます。

ステップ2　解が区間の外に出ないこと

$|x_0 - \bar{x}| < \delta$ とします。ステップ1より、解が区間 $[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ の中にあるあいだは $\dot{W} \leq 0$ なので、W は増えません。したがって $W(t) \leq W(0) < \delta^2$ のままで、解が区間の端に達することはありません。

ステップ3　指数的に近づくこと

ステップ1の不等式から、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{2\kappa t}W(t)\big) = e^{2\kappa t}\big(\dot{W}(t) + 2\kappa W(t)\big) \le 0$$

です。したがって $e^{2\kappa t}W(t) \le W(0)$、つまり $W(t) \le e^{-2\kappa t}W(0)$ で、両辺の平方根をとれば結論が得られます。

ステップ4　2 の証明

$f'(\bar{x}) > \kappa > 0$ となる κ と、$|x - \bar{x}| \le \delta$ ならば $f'(x) \ge \kappa$ となる δ をとります。ステップ1と同じ計算で、解が区間の中にあるかぎり $\dot{W} \ge 2\kappa W$ で、ステップ3と同じようにして $W(t) \ge e^{2\kappa t}W(0)$ です。$W(0) > 0$ なら右辺は限りなく大きくなるので、解がずっと区間の中にとどまることはできません。　□

数式の読み方：線形化

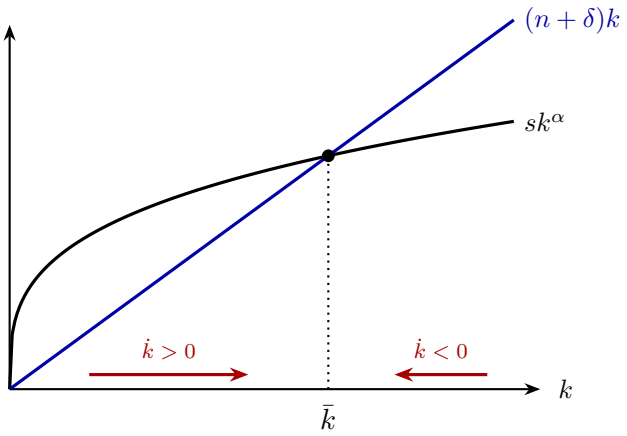
定常状態の近くでは $f(x) \approx f'(\bar{x})(x-\bar{x})$ なので、$\dot{x} = f(x)$ は線形の式 $\dot{x} = f'(\bar{x})(x-\bar{x})$ で近似できます。これを**線形化**といいます。定理 3.6 は、線形化した式の安定性（系 3.5 で $a = f'(\bar{x})$ としたもの）が、もとの非線形の式の定常状態の近くでの安定性を正しく教えてくれることを保証しています。$|f'(\bar{x})|$ が収束の速さの目安になります。

連続時間のソローモデルでは、1人あたり資本 k が

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+\delta)k \tag{3.5}$$

にしたがって動きます（s は貯蓄率、n は人口成長率、δ は資本減耗率、$0 < \alpha < 1$）。

図 3.1　連続時間のソローモデルと位相線



$s = 0.3$、$\alpha = 0.3$、$n + \delta = 0.1$。$\bar{k} = (s/(n+\delta))^{1/(1-\alpha)} = 3^{1/0.7} \approx 4.80$。

図の読み方

1. 黒の曲線は1人あたり投資 sk^{α}、青の直線は1人あたり資本を維持するのに必要な投資 $(n+\delta)k$ です。その差が $\dot{k}$ です。
2. $\bar{k}$ より左では投資が必要額を上回る（$\dot{k}>0$）ので資本が増え、右では下回るので減ります。赤の矢印が位相線です。
3. 位相線から、$k(0)>0$ であれば、どこから出発しても $\bar{k}$ に向かうことが分かります。定理 3.6 は定常状態の近くだけの結果ですが、1変数の場合は、位相線を見れば遠くから出発した場合のふるまいも分かります。

計算例：収束速度

$f(k)=sk^{\alpha}-(n+\delta)k$ を $\bar{k}$ で微分し、定常状態の条件 $s\bar{k}^{\alpha-1}=n+\delta$ を使うと

$$
\begin{aligned}
f'(\bar{k}) &= \alpha s\bar{k}^{\alpha-1}-(n+\delta) && \text{（微分）}\\
&= \alpha(n+\delta)-(n+\delta)=-(1-\alpha)(n+\delta) && \text{（定常状態の条件を代入）}
\end{aligned}
$$

したがって $k(t)-\bar{k}\approx e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\big(k(0)-\bar{k}\big)$。乖離は毎年およそ $(1-\alpha)(n+\delta)$ の割合で縮みます。これを**収束速度**と呼び、乖離が半分になるまでの年数は $\ln 2/[(1-\alpha)(n+\delta)]$ です。資本分配率 α が大きいほど、収束は遅くなります。

計算例：コブ＝ダグラス型ソローモデルの厳密な解

式(3.5)は非線形ですが、$z\equiv k^{1-\alpha}$ と変数を置き換えると線形になります（**ベルヌーイ型**の微分方程式の解き方）。

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k} && \text{（連鎖律）}\\
&= (1-\alpha)k^{-\alpha}\big[sk^{\alpha}-(n+\delta)k\big] && \text{（式(3.5)を代入）}\\
&= (1-\alpha)s-(1-\alpha)(n+\delta)\,z && (k^{-\alpha}k=k^{1-\alpha}=z)
\end{aligned}
$$

これは定数項が一定の線形の式（$a=-(1-\alpha)(n+\delta)$、$b=(1-\alpha)s$）なので、系 3.5 より、定常状態 $\bar{z}=s/(n+\delta)$ を使って

$$
k(t)^{1-\alpha}=\frac{s}{n+\delta}+e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\left(k(0)^{1-\alpha}-\frac{s}{n+\delta}\right)
$$

と厳密に解けます。$k^{1-\alpha}$（資本産出比率 k/y に比例する量）の定常状態からの乖離が、ちょうど率 $(1-\alpha)(n+\delta)$ で縮んでいきます。線形化で求めた収束速度は、この変数については近似ではなく厳密に成り立っているのです。

3.7 積分因子と連続時間の予算制約

家計の資産 $a(t)$ は、利子率 r、賃金 $w(t)$、消費 $c(t)$ のもとで

$$\dot{a} = ra + w(t) - c(t) \tag{3.6}$$

と動きます。これは式(3.2)の形なので、定理 3.4 の証明と同じく、積分因子 e^{-rt} をかけて積分します。

数式の読み方：生涯予算制約の導き方

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(e^{-rt}a(t)\bigr) &= e^{-rt}\dot{a} - re^{-rt}a && \text{（積の微分）} \\ &= e^{-rt}\bigl(w(t) - c(t)\bigr) && \text{（式(3.6)を代入）} \\ e^{-rT}a(T) - a(0) &= \int_0^T e^{-rt}\bigl(w(t) - c(t)\bigr)\,\mathrm{d}t && \text{（0 から } T \text{ まで積分）} \end{aligned}$$

左辺の $e^{-rT}a(T)$ は、時点 T に残っている資産の現在価値です。

$T \to \infty$ で $e^{-rT}a(T) \to 0$ とすると

$$\int_0^\infty e^{-rt}c(t)\,\mathrm{d}t = a(0) + \int_0^\infty e^{-rt}w(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.7}$$

という連続時間の生涯予算制約が得られます。「消費の現在価値の合計は、初めの資産と、賃金の現在価値の合計の和に等しい」という式です。離散時間の $\sum_t c_t/(1+r)^t$ が、$\int e^{-rt}c(t)\,\mathrm{d}t$ に変わっています。条件 $\lim_{T\to\infty} e^{-rT}a(T) \geq 0$ は、第1章で見たポンジ・ゲームの禁止の連続時間版です。等号で成り立つこと（資産を使い残さないこと）は、家計の最適化から導かれます（第4章の横断性条件）。

3.8 前向きの解：資産価格とジャンプ変数

これまでの例では、初期値 $x(0)$ が与えられていて、そこから将来の経路を求めました（後ろ向きの解）。第1章で見たように、ジャンプ変数については、初期値の代わりに「発散しない」という条件から今の値が決まります（前向きの解）。その連続時間版を、資産価格を例にして述べます。

配当 $d(t)$ を生む資産の価格を $p(t)$ とします。この資産をもつことの収益（配当と値上がり益の和）が、安全資産の利子に等しいという条件は

$$rp = d(t) + \dot{p} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{p} = rp - d(t) \tag{3.8}$$

です。$r > 0$ なので、これは係数が正の、不安定な微分方程式です。

定理 3.7（前向きの解（連続時間））

$r > 0$ とし、$d(t)$ を $t \geq 0$ で連続かつ有界な関数とする。このとき、式(3.8)の有界な解はただ一つ存在し、

$$p^*(t) = \int_t^\infty e^{-r(s-t)} d(s)\,\mathrm{d}s \tag{3.9}$$

で与えられる。式(3.8)の一般の解は、B を任意の定数として $p(t) = p^*(t) + Be^{rt}$ である。

証明　すべての t で $|d(t)| \leq M$ とします。定理 3.4（$a = r$、$b(t) = -d(t)$）より、初期値 $p(0)$ から出発する解は

$$p(t) = e^{rt}\Big[p(0) - \int_0^t e^{-rs} d(s)\,\mathrm{d}s\Big]$$

のただ一つです。$|e^{-rs}d(s)| \leq Me^{-rs}$ で、$\int_0^\infty Me^{-rs}\,\mathrm{d}s = M/r$ は有限なので、$I = \int_0^\infty e^{-rs}d(s)\,\mathrm{d}s$ は収束します。$\int_0^t = \int_0^\infty - \int_t^\infty$ と分けると

$$\begin{aligned} p(t) &= e^{rt}\big(p(0) - I\big) + e^{rt}\int_t^\infty e^{-rs} d(s)\,\mathrm{d}s && \text{（積分を分ける）} \\ &= \big(p(0) - I\big)e^{rt} + p^*(t) && \text{（}e^{rt}\text{ を積分の中に入れる）} \end{aligned}$$

です。これが一般の解の形で、$B = p(0) - I$ です。$|p^*(t)| \leq \int_t^\infty e^{-r(s-t)} M\,\mathrm{d}s = M/r$ なので、p^* は有界です。一方、e^{rt} は限りなく大きくなるので、$p(t)$ が有界であるのは $B = 0$ のとき、つまり $p = p^*$ のときに限ります。　□

数式の読み方：前向きの解が教えてくれること

- 式(3.9)は、**資産価格が、将来の配当の現在価値の合計である**ことを表します（ファンダメンタル価値）。配当が一定 d なら $p^* = d/r$ です。
- Be^{rt} は、配当と無関係に、利子率と同じ速さで膨らむ部分、つまり**バブル**です。「有界である」という条件は、バブルを排除する条件です。
- 将来の配当の増加が**今日発表された**とすると、配当はまだ変わっていないのに、価格はその瞬間に**ジャンプ**して上がります（式(3.9)の積分の値が変わるためです）。その後、価格は配当が増える時点に向けてなめらかに動きます。予想が変わった瞬間にだけ飛ぶ、というのがジャンプ変数の性質です。
- 離散時間の定理 1.5 と比べると、割引の $1/a^{s+1}$ が $e^{-r(s-t)}$ に、和が積分に変わっています。「安定な式は後ろ向きに、不安定な式は前向きに解く」という原則は同じです。

3.9　線形システムと固有値

複数の変数が同時に動く線形システム

$$\dot{z} = Az \tag{3.10}$$

を考えます。$z(t) \in \mathbb{R}^n$ は定常状態からの乖離、A は $n \times n$ の実行列です。第2章と同じく、固有ベクトルの方向に座標をとり直して、1変数の式に分解します。固有値は実数とは限らないので、まず複素数の指数関数を定めておきます。

用語の説明：複素数の指数関数

複素数 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ に対して、$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t)$ と定めます。このとき、実数の場合と同じく $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ が成り立ち、定理 3.4 は a が複素数でもそのまま成り立ちます。また $|e^{\lambda t}| = e^{\alpha t}$ です。つまり、大きさが増えるか減るかは λ の**実部** α の符号で決まり、虚部 β は回転（振動）の速さを表します。

定理 3.8（線形システムの解）

A が一次独立な n 個の固有ベクトル $v_1, \dots, v_n$（固有値は $\lambda_1, \dots, \lambda_n$）をもつとする。このとき、$\dot{z} = Az$、$z(0) = z_0$ の解はただ一つ存在し、

$$z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \tag{3.11}$$

である。ここで $c = (c_1, \dots, c_n)^\top = P^{-1} z_0$ で、P は $v_1, \dots, v_n$ を列とする行列である。

証明　$w(t) = P^{-1} z(t)$ とおきます。$z = Pw$ を式(3.10)に代入すると $P\dot{w} = APw$ で、定理 2.4 より $P^{-1}AP = \Lambda$ なので、

$$\dot{w} = \Lambda w, \qquad \text{つまり} \qquad \dot{w}_i = \lambda_i w_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

です。変数どうしの絡み合いが消えて、n 本の1変数の式になりました。定理 3.4 より、それぞれの解は $w_i(t) = e^{\lambda_i t} w_i(0) = c_i e^{\lambda_i t}$ のただ一つです。$z(t) = Pw(t) = \sum_i w_i(t) v_i$ なので、式(3.11)が得られます。　□

数式の読み方：解の形の意味

- z_0 が固有ベクトル v_i であれば、解は $e^{\lambda_i t}v_i$ です。固有ベクトルの方向では、システムは1変数の $\dot{x} = \lambda_i x$ と同じように動きます。
- 一般の解は、固有ベクトルの方向ごとの動きの重ね合わせです。離散時間の式(2.4)の λ_i^t が、$e^{\lambda_i t}$ に変わっています。
- 固有値が実数でないとき、共役の組の項を合わせると、$e^{\alpha t}$ の速さで拡大または縮小しながら回転する、渦を巻く動きになります。

定理 3.9（連続時間の安定性の判定）

A が定理 3.8 の仮定を満たすとする。次の2つは同値である。

1. どんな初期値 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ から出発しても、$\dot{z} = Az$ の解は $z(t) \to 0$ を満たす。
2. A のすべての固有値の実部が負である。

証明　第2章の定理 2.6 の証明と同じです。$2 \Rightarrow 1$ は、式(3.11)から

$$\|z(t)\| \le |c_1|\, e^{\alpha_1 t}\|v_1\| + \cdots + |c_n|\, e^{\alpha_n t}\|v_n\|$$

（α_i は λ_i の実部）で、すべての α_i が負なら右辺が 0 に収束することから分かります。$1 \Rightarrow 2$ は対偶を示します。ある固有値の実部が $\alpha_j \ge 0$ であるとし、$v_j = x + \mathrm{i}y$ と実部と虚部に分けます。x と y から出発した解がともに 0 に収束するなら、v_j から出発した解 $e^{\lambda_j t}v_j$ も 0 に収束するはずですが、$\|e^{\lambda_j t}v_j\| = e^{\alpha_j t}\|v_j\| \ge \|v_j\| > 0$ なので、そうなりません。　□

2×2 の場合は、離散時間のとき（命題 2.7）と同じく、トレースと行列式だけで判定できます。条件は離散時間よりも簡単になります。

命題 3.10（2×2 の場合の分類）

2×2 の実行列 A について、$T = \operatorname{tr} A$、$D = \det A$ とおき、$D \ne 0$ とする。

1. $D < 0 \iff$ 固有値は実数で、一方が正、もう一方が負（**鞍点**）。
2. $D > 0$ かつ $T < 0 \iff$ 2つの固有値の実部がともに負（安定）。
3. $D > 0$ かつ $T > 0 \iff$ 2つの固有値の実部がともに正（不安定）。

また、$T^2 < 4D$ のとき固有値は実数でなく、解は渦を巻く。

証明　命題 2.2 より、$\lambda_1 + \lambda_2 = T$、$\lambda_1\lambda_2 = D$ です。

固有値が実数でない場合（$T^2 < 4D$）は、$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ なので $D = |\lambda_1|^2 > 0$ で、実部はどちらも $T/2$ です。したがって、$D > 0$ であり、実部の符号は T の符号に一致します。

固有値が実数の場合は、積 D が負であることと、2つの固有値の符号が異なることは同じです。$D > 0$ なら2つは同じ符号で、その符号は和 T の符号に一致します。

以上で、3つの場合のそれぞれについて「$\Rightarrow$」が示せました。$D \neq 0$ かつ（$D > 0$ のとき）$T \neq 0$ であれば、左辺の3つの条件のどれか一つだけが成り立ち、右辺の3つの状態も同時には起こらないので、「$\Leftarrow$」も成り立ちます。 □

補足：離散時間の条件との関係

連続時間のシステム $\dot{z} = Az$ の解を $t = 0, 1, 2, \ldots$ の時点だけで見ると、固有ベクトルの方向の成分は1期間ごとに e^{λ_i} 倍になります。$|e^{\lambda_i}| = e^{\alpha_i}$ が 1 より小さいことは $\alpha_i < 0$ と同じなので、離散時間の「絶対値が 1 より小さい」が、連続時間では「実部が負」に対応します。複素数の平面でいえば、安定な領域が「半径 1 の円の内側」から「左半分」に変わります。

3.10 鞍点と位相図

固有値が実数で、一方が負、もう一方が正である定常状態が**鞍点**です。負の固有値を λ_s、正の固有値を λ_u と書き（s は安定、u は不安定を表します）、対応する固有ベクトルを v_s, v_u とします。離散時間の定理 2.8 と同じ結論が成り立ちます。

定理 3.11（鞍点経路（連続時間））

2×2 の実行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の固有値が $\lambda_s < 0 < \lambda_u$ を満たすとする。$\dot{z} = Az$ の解について、次が成り立つ。

1. $z(0)$ が v_s の定数倍であれば $z(t) \to 0$。そうでなければ $\|z(t)\|$ は限りなく大きくなる。
2. v_s の第1成分が 0 でないとし、$v_s = (1, m)^\top$ と基準化する。このとき、与えられた $z_1(0)$ に対して、解が有界になる $z_2(0)$ はただ一つ存在し、$z_2(0) = m z_1(0)$ である。そのときの解は $z(t) = e^{\lambda_s t} z(0)$ である。
3. $a_{12} \neq 0$ ならば v_s の第1成分は 0 でなく、$m = (\lambda_s - a_{11})/a_{12}$ である。

証明　1 と 2 は、定理 3.8 の解 $z(t) = c_s e^{\lambda_s t} v_s + c_u e^{\lambda_u t} v_u$ を使えば、定理 2.8 の証明の λ_1^t、λ_2^t を $e^{\lambda_s t}$、$e^{\lambda_u t}$ に置きかえるだけで、同じように示せます。$c_u = 0$ なら $z(t) \to 0$ で、$c_u \neq 0$ なら $\|z(t)\| \geq |c_u| e^{\lambda_u t} \|v_u\| - |c_s| e^{\lambda_s t} \|v_s\|$ が限りなく大きくなります。有界な解は $c_u = 0$ のものだけで、そのとき $z(0) = c_s v_s = (c_s, c_s m)^\top$ なので、$c_s = z_1(0)$、$z_2(0) = m z_1(0)$ と決まります。

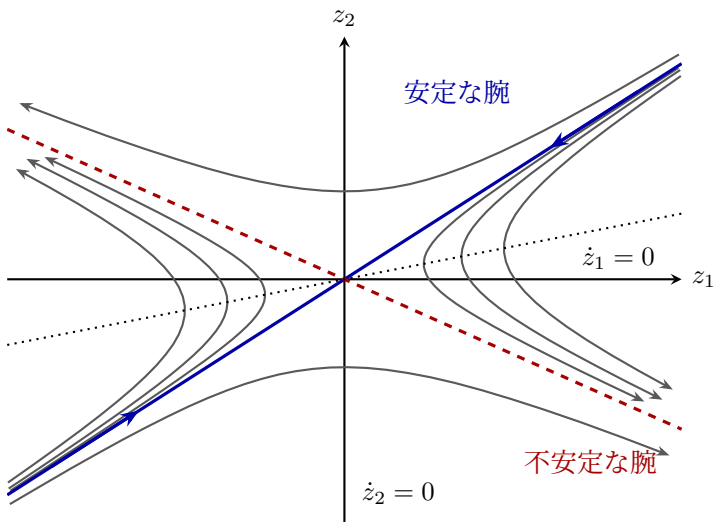
3 を示します。$(A - \lambda_s I) v_s = 0$ の第1行は $(a_{11} - \lambda_s) v_{s1} + a_{12} v_{s2} = 0$ です。もし $v_{s1} = 0$ な

ら、$a_{12} \neq 0$ より $v_{s2} = 0$ となって $v_s \neq 0$ に反します。したがって $v_{s1} \neq 0$ で、$v_{s1} = 1$ とすると $m = v_{s2} = (\lambda_s - a_{11})/a_{12}$ です。 □

数式の読み方：鞍点経路の意味

- 原点に収束する軌道は、v_s の方向の直線の上にしかありません。この直線を**安定な腕**（鞍点経路）、v_u の方向の直線を**不安定な腕**と呼びます。
- z_1 が先決変数（初期値が与えられる）、z_2 がジャンプ変数（初期値を選べる）であれば、「発散しない」という条件が $z_2(0)$ をただ一つに決めます。**ジャンプ変数は、先決変数の値に安定な腕の傾き m をかけた値にジャンプします。**
- 鞍点経路の上では、乖離は率 $|\lambda_s|$ で指数的に縮みます。負の固有値の絶対値が、収束の速さです。

図 3.2　鞍点の位相図



$A = \begin{pmatrix} 0.2 & -1 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix}$（$\det A = -0.3 < 0$）。固有値は約 0.657 と -0.457。安定な腕は $z_2 \approx 0.657 z_1$、不安定な腕は $z_2 \approx -0.457 z_1$。灰色の曲線は式(3.11)で計算した軌道。$\dot{z}_1 = 0$ の線は $z_2 = 0.2 z_1$、$\dot{z}_2 = 0$ の線は $z_1 = 0$（縦軸）。

図の読み方

1. 黒の点線（$\dot{z}_1 = 0$）と縦軸（$\dot{z}_2 = 0$）は、それぞれの変数が動かなくなる点の集まりで、**ゼロ変化線**（ヌルクライン）と呼びます。2本の交点（原点）が定常状態です。
2. 青の直線が安定な腕です。この上から出発すると、矢印の向きに原点へ収束します。
3. 赤の点線が不安定な腕です。この上では原点から離れていきます。
4. それ以外の点から出発した灰色の軌道は、はじめは原点に近づくように見えても、やがて不安定な腕に沿って遠ざかっていきます。軌道どうしが交わっていないこと（系 3.3）にも注目してください。

計算例：図の例で鞍点経路を求める

図 3.2 の行列は $a_{11} = 0.2$、$a_{12} = -1$、$a_{21} = -0.3$、$a_{22} = 0$ で、$D = -0.3 < 0$ なので鞍点です（命題 3.10）。特性方程式 $\lambda^2 - 0.2\lambda - 0.3 = 0$ を解くと、$\lambda_s \approx -0.457$、$\lambda_u \approx 0.657$ です。定理 3.11 の 3 より、安定な腕の傾きは

$$m = \frac{\lambda_s - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-0.457 - 0.2}{-1} \approx 0.657$$

です。$z_1(0)$ が与えられたとき、ジャンプ変数は $z_2(0) = 0.657\, z_1(0)$ に決まり、その後は $z(t) = e^{-0.457t} z(0)$ にしたがって原点に近づきます。

要点：位相図の描き方（手順）

1. $\dot{z}_1 = 0$ と $\dot{z}_2 = 0$ になる線（ゼロ変化線）を描く。交点が定常状態。
2. それぞれの線の両側で、z_1 と z_2 が増えるか減るかを調べ、矢印を描く（例：$\dot{z}_2 = -0.3 z_1$ なら、縦軸より右で z_2 が減る）。
3. 4つの領域の矢印の組み合わせから、定常状態に向かう経路（鞍点経路）の位置を見当づける。

3.11 非線形システムの線形化

経済モデルから出てくるシステムは、ふつう非線形です。

$$\dot{x} = F(x), \qquad F(\bar{x}) = 0 \tag{3.12}$$

ここで $x(t) \in \mathbb{R}^n$、F は連続微分可能とします。定常状態 $\bar{x}$ のまわりで F を1次近似すると、乖離 $z = x - \bar{x}$ について

$$\dot{z} = Az, \qquad A = DF(\bar{x}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x})\right)_{i,j}$$

という線形システムが得られます。A は、F の偏微分を並べた行列（**ヤコビ行列**）を定常状態で評価したものです。1変数の場合の定理 3.6 と同じように、この線形システムが、もとの非線形システムの定常状態の近くでのふるまいを正しく教えてくれます。

定理 3.12（線形化の原理）

式(3.12)で、$A = DF(\bar{x})$ とする。

1. A のすべての固有値の実部が負ならば、$\bar{x}$ の十分近くから出発した解は $x(t) \to \bar{x}$ を満たす。
2. A の固有値の中に実部が正のものがあれば、$\bar{x}$ は安定でない（$\bar{x}$ にいくらでも近い点から出発して、$\bar{x}$ のある近傍の外に出る解がある）。
3. $n = 2$ で、A の固有値が $\lambda_s < 0 < \lambda_u$ を満たすとする。このとき、$\bar{x}$ を通り、$\bar{x}$ で v_s に接するなめらかな曲線があって、$\bar{x}$ の近くでは、その曲線の上から出発した解だけが $\bar{x}$ に収束する。それ以外の点から出発した解は、$\bar{x}$ のある近傍の外に出る。

この定理の証明は、本書では行いません。1 と 2 は、定理 3.6 の証明の「距離の2乗」を、行列 A に合わせて作った二次形式に置きかえることで示せます。3 は**安定多様体定理**と呼ばれる結果の特別な場合です。

数式の読み方：定理の読み方

- 3 の曲線が、非線形システムの**鞍点経路**です。線形システムでは直線でしたが、非線形システムでは曲線になり、定常状態での接線の傾きが、線形化したシステムの安定な腕の傾き m に一致します。
- したがって、「定常状態を求め、ヤコビ行列の固有値を調べ、安定な固有ベクトルの傾きを求める」という計算によって、定常状態の近くでの最適な経路（政策関数の傾き）と収束の速さが分かります。
- 固有値の実部がちょうど 0 の場合は、線形化だけでは判定できません。

補足：経済学での使いどころ

ラムゼイモデルでは、資本 k（先決変数）と消費 c（ジャンプ変数）が2本の非線形の微分方程式にしたがいます。その定常状態でヤコビ行列を計算すると行列式が負になり、命題 3.10 より鞍点です。定理 3.12 の 3 が、与えられた $k(0)$ に対して定常状態に収束する $c(0)$ がただ一つあること、つまり鞍点経路が存在することを保証します（第4章）。離散時間のモデルについても、ヤコビ行列の固有値の絶対値と 1 の大小を比べることで、同じ形の結果が成り立ちます。

発展：差分で近似して数値的に解く

解析的に解けない微分方程式は、短い時間 Δ ごとに $x(t+\Delta) \approx x(t) + \Delta \cdot f(x(t))$ と1次近似で進めて、コンピュータで解を計算します（**オイラー法**）。Δ を小さくするほど正確になります。鞍点経路を求めるときは、定常状態のすぐ近くの安定な腕上から出発し、時間を**逆向き**（$\Delta < 0$）に進めると、不安定な方向の誤差が縮んでいくので安定に計算できます（**シューティング法**の一種）。第4章の図はこの方法で描いています。

発展：行列の指数関数

A が対角化できない場合も含めて、$\dot{z} = Az$、$z(0) = z_0$ の解は、行列の指数関数

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

を使って $z(t) = e^{At} z_0$ と書けます。右辺の級数はどんな A でも収束し、項ごとに微分すると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = Ae^{At}$ となるからです。$A = P\Lambda P^{-1}$ と対角化できるときは $e^{At} = Pe^{\Lambda t}P^{-1}$ で、$e^{\Lambda t}$ は $e^{\lambda_i t}$ を対角成分とする行列なので、式(3.11)と一致します。定理 3.9 の結論（すべての固有値の実部が負であることと、すべての解が 0 に収束することは同値）は、対角化できない場合にも成り立ちます。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 1階線形微分方程式と積分因子：連続時間の予算制約、割引現在価値、成長率が変化する変数の水準。
- 位相線と局所的な安定性：ソローモデルの収束と収束の速さ。
- 前向きの解：資産価格、地価、為替レートなどのジャンプ変数。発表された政策の効果。
- 線形システムと鞍点経路：ラムゼイモデル、投資の q 理論、為替レートのオーバーシューティングなど、先決変数とジャンプ変数からなる連続時間モデル。

要点

- 右辺がなめらかな微分方程式は、初期値を決めると解がただ一つに決まります。したがって、軌道は交わりません。
- $\dot{x} = ax + b$ の解は $x(t) = \bar{x} + e^{at}(x(0) - \bar{x})$ で、連続時間では $a < 0$ が安定の条件です。非線形の場合は $f'(\bar{x}) < 0$ が条件になります。
- 係数が正の式は前向きに解きます。有界な解は、将来の値の割引現在価値としてただ一つに決まります。
- 線形システムは、すべての固有値の実部が負なら安定です。2×2 で $\det A < 0$ なら鞍点で、安定な腕の上の解だけが定常状態に収束します。
- 非線形システムの定常状態の近くでのふるまいは、ヤコビ行列の固有値で判定できます。

次の章へ　次の章では、家計が連続時間で生涯の効用を最大にする問題を、ハミルトニアンを使って解きます。その最適条件は2変数の微分方程式になり、この章の位相図と鞍点の分析がそのまま使えます。

大学院とのつながり　連続時間のマクロモデルと金融のモデルは、「最適化の条件を微分方程式として書き、定常状態のまわりで線形化し、固有値の符号を調べる」という手順で分析します。

第4章

連続時間の動的最適化：ハミルトニアン

ここまでの流れ　第1章で、離散時間の動的最適化を「各期の制約に乗数を付けるラグランジュ法」で解き、オイラー方程式と横断性条件が最適性を保証することを証明しました。第3章では、連続時間の微分方程式と位相図を学びました。

前提知識　第1章のオイラー方程式・横断性条件と基本不等式（補題 1.7）。第3章の1階線形微分方程式（定理 3.4）、前向きの解、鞍点経路（定理 3.11）、線形化の原理（定理 3.12）。凹関数と接平面の不等式（ミクロ版の「凸性と分離超平面定理」の章）。

この章の問い　時間が連続的に流れるとき、生涯の効用を最大にする消費の経路は、どう求めればよいでしょうか。ハミルトニアンとは何で、なぜその手順で正しい答えが出るのでしょうか。

この章で分かること　連続時間の最適制御問題の書き方、ハミルトニアンの条件（最大値原理）の導き方と手順、当期価値ハミルトニアン、共役変数の意味、横断性条件、最大値原理の必要条件と十分条件（証明）、ケーキ食べ問題・家計の問題・ラムゼイモデルへの応用と位相図の分析。

4.1　連続時間の動的最適化問題

家計が時点0から無限の将来まで生き、各瞬間に消費 $c(t)$ を選ぶとします。

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u\big(c(t)\big)\,\mathrm{d}t \qquad \text{s.t.} \quad \dot{a}(t) = r a(t) + w - c(t), \quad a(0) = a_0 \text{ は所与.} \tag{4.1}$$

第1章の $\sum_t \beta^t u(c_t)$ が積分 $\int e^{-\rho t} u(c)\,\mathrm{d}t$ に、フローの予算制約 $a_{t+1} = R a_t + \dots$ が微分方程式 $\dot{a} = \dots$ に変わっています。$e^{-\rho t}$ は連続時間の割引因子で、ρ が時間選好率です。

用語の説明：最適制御の用語

- **状態変数**：過去から引き継がれ、各瞬間には動かせない変数（資産 a、資本 k）。その動きを表す式 $\dot{a} = g(a, c, t)$ を**遷移式**（状態方程式）と呼びます。
- **制御変数**：各瞬間に自由に選べる変数（消費 c）。状態変数を直接は動かせませんが、制御変数を通じて状態の変化の速さを操作します。
- **共役変数**（costate variable）：遷移式に付ける「時間に依存するラグランジュ乗数」$\lambda(t)$。状態変数1単位の価値（シャドー・プライス）を表します。
- この種の問題を**最適制御問題**と呼びます。選ぶのが数ではなく**関数**（経路）$c(t)$ である点が、静学的な最適化との違いです。

一般形で書くと、次のようになります（v は瞬間ごとの目的関数）。

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} v\big(a(t), c(t), t\big)\,\mathrm{d}t \qquad \text{s.t.} \quad \dot{a}(t) = g\big(a(t), c(t), t\big), \quad a(0) = a_0. \tag{4.2}$$

4.2 ハミルトニアンの導き方

離散時間のときと同じく、遷移式（各瞬間の制約）に乗数 $\lambda(t)$ を付けてラグランジュ関数を作ります。制約が各瞬間に1本ずつあるので、乗数を掛けたものを和の代わりに積分で足し合わせます。

$$\mathcal{L} = \int_0^{\infty} \Big\{ v(a, c, t) + \lambda(t)\big[g(a, c, t) - \dot{a}\big] \Big\}\,\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

ここで、**ハミルトニアン**を

$$H(a, c, \lambda, t) \equiv v(a, c, t) + \lambda\, g(a, c, t) \tag{4.4}$$

と定義します。「その瞬間の効用」＋「状態変数を増やすことの価値（増える速さ g × 1単位の価値 λ）」です。

数式の読み方：部分積分で $\dot{a}$ を消す

$\mathcal{L}$ には $\dot{a}$ が含まれていて扱いにくいので、**部分積分**（積の微分 $(\lambda a)' = \dot{\lambda} a + \lambda \dot{a}$ を積分した公式）で書き換えます。

$$\int_0^T \lambda \dot{a}\,\mathrm{d}t = \big[\lambda a\big]_0^T - \int_0^T \dot{\lambda} a\,\mathrm{d}t \qquad \text{（部分積分）}$$

$$\mathcal{L} = \int_0^{\infty} \big\{ H(a, c, \lambda, t) + \dot{\lambda}\, a \big\}\,\mathrm{d}t - \lim_{T\to\infty} \lambda(T) a(T) + \lambda(0) a_0 \qquad \text{（代入して整理）}$$

最適な経路から、ある時点の $c(t)$ や $a(t)$ を少しだけずらしても $\mathcal{L}$ が増えないためには、

積分の中身をそれぞれで偏微分したものが0でなければなりません（静学のラグランジュ法の一階条件を、各瞬間について課すのと同じ考え方です）。

- $c(t)$ をずらす：$\partial H/\partial c = 0$。
- $a(t)$ をずらす：$\partial H/\partial a + \dot{\lambda} = 0$。
- 遠い将来の $a(T)$ をずらす：$\lim_{T\to\infty} \lambda(T)a(T) = 0$。

要点：最大値原理の条件（現在価値ハミルトニアン）

問題(4.2)の最適経路を求めるには、次の条件を使う（正確な主張と証明は4.7節）。

1. ハミルトニアンを作る：$H = v(a, c, t) + \lambda g(a, c, t)$。
2. 制御変数についての最適条件：$\dfrac{\partial H}{\partial c} = 0$。
3. 共役変数の動き（**共役方程式**）：$\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial a}$。
4. 状態変数の動き：$\dot{a} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = g(a, c, t)$。
5. **横断性条件**：$\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t)a(t) = 0$。

補足：「最大値原理」という名前

条件2は、厳密には「各瞬間に、c はハミルトニアンを最大にするように選ばれる」という条件です（ポントリャーギンの**最大値原理**）。H が c について凹で内点解なら、それは $\partial H/\partial c = 0$ と同じです。消費量に上限・下限がある問題では、端点で H が最大になることもあります。

数式の読み方：各条件の経済学的な意味

- **条件2** $\partial H/\partial c = v_c + \lambda g_c = 0$：その瞬間に消費を少し増やすと、効用が v_c だけ増える一方、状態変数の増え方が g_c だけ変わり（家計の問題では $g_c = -1$、資産の蓄積が減る）、その価値が λg_c です。両者が釣り合うところまで消費します。「今使うか、蓄えるか」の限界的な比較です。
- **条件3** $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial a$：状態変数の価値 λ は、時間が進むにつれて「その瞬間に状態変数がもたらした貢献 $\partial H/\partial a$」の分だけ減っていきます。今日の資本1単位の価値は、今日の生産への貢献と、明日まで持ち越したときの価値の和だからです。
- **条件4**：ハミルトニアンを λ で微分すると遷移式そのものが出てきます。静学のラグランジュ法で $\partial \mathcal{L}/\partial \lambda = 0$ が制約式になったのと同じです。
- **条件5**：遠い将来まで価値ある状態変数を使い残さない（第3章のバブルがない条件と同じ形）。

補足：状態変数・制御変数が複数ある場合

状態変数が $a_1, \dots, a_m$、制御変数が $c_1, \dots, c_n$ のときは、遷移式ごとに共役変数 λ_i を付けて $H = v + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$ とし、すべての制御変数について $\partial H/\partial c_j = 0$、すべての状態変数について $\dot{\lambda}_i = -\partial H/\partial a_i$、横断性条件 $\lim \lambda_i(t) a_i(t) = 0$ を課します。例えば物的資本と人的資本の2つを蓄積する内生的成長モデル（ルーカス＝宇沢型）では、状態変数が2つ、共役変数も2つになります。

4.3 離散時間の極限としての導出

部分積分による導出を、離散時間から確かめておきましょう。1期間の長さを Δ とし、時点 $t, t+\Delta, t+2\Delta, \dots$ で考えます。

$$\max \sum_{t} \Delta\, v(a_t, c_t, t) \qquad \text{s.t.} \quad a_{t+\Delta} = a_t + \Delta\, g(a_t, c_t, t).$$

「$a_{t+\Delta}$ を決める制約」に乗数 $\lambda_{t+\Delta}$ を付けたラグランジュ関数

$$\mathcal{L} = \sum_{t} \Big\{ \Delta\, v(a_t, c_t, t) + \lambda_{t+\Delta} \big[a_t + \Delta\, g(a_t, c_t, t) - a_{t+\Delta} \big] \Big\}$$

を考えます。a_t は、自分の期の制約（$a_t + \Delta g$ の中）と、1期前の制約（$-a_t$、乗数 λ_t）の2か所に現れます。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \Delta\, v_c + \lambda_{t+\Delta} \Delta\, g_c = 0 \qquad (c_t \text{ で微分})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_t} = \Delta\, v_a + \lambda_{t+\Delta}(1 + \Delta\, g_a) - \lambda_t = 0 \qquad (a_t \text{ で微分（2か所）})$$

$$\frac{\lambda_{t+\Delta} - \lambda_t}{\Delta} = -\big(v_a + \lambda_{t+\Delta}\, g_a\big) \qquad (\text{2本目を } \Delta \text{ で割って整理})$$

$\Delta \to 0$ とすると、1本目は $v_c + \lambda g_c = \partial H/\partial c = 0$、3本目の左辺は $\dot{\lambda}$ に、右辺は $-\partial H/\partial a$ になります。最大値原理の条件2・3は、**離散時間の一階条件の極限**にほかなりません。

4.4 離散時間との対応

第1章の離散時間の一階条件（式(1.7)〜(1.9)）と並べると、ハミルトニアンの条件が何をしているかが分かります。

	離散時間	連続時間
目的関数	$\sum_t \beta^t u(c_t)$	$\int e^{-\rho t} u(c)\,\mathrm{d}t$
制約	$a_{t+1} - a_t = r a_t + w - c_t$	$\dot{a} = r a + w - c$
消費の条件	$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$	$e^{-\rho t} u'(c) = \lambda$
乗数の動き	$\lambda_{t+1} - \lambda_t = -r\lambda_{t+1}$	$\dot{\lambda} = -r\lambda$
横断性条件	$\lim \lambda_T a_{T+1} = 0$	$\lim \lambda(t) a(t) = 0$

離散時間の条件 $\lambda_t = (1+r)\lambda_{t+1}$ を差の形 $\lambda_{t+1} - \lambda_t = -r\lambda_{t+1}$ に直し、1期間の長さを0に近づけたものが $\dot{\lambda} = -r\lambda$ です。ハミルトニアンは新しい理論というより、**離散時間のラグランジュ法の連続時間版**です。

4.5 当期価値ハミルトニアン

割引 $e^{-\rho t}$ があると、$\lambda(t)$ は時間とともに0に近づき、式が扱いにくくなります。そこで割引を外した乗数

$$\mu(t) \equiv e^{\rho t} \lambda(t) \tag{4.5}$$

を使います。$v = e^{-\rho t} u(a, c)$ のとき、**当期価値ハミルトニアン**を

$$H^c \equiv e^{\rho t} H = u(a, c) + \mu\, g(a, c) \tag{4.6}$$

と定義します。

数式の読み方：当期価値の条件の導き方

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t}\frac{\partial H^c}{\partial c} = 0 \iff \frac{\partial H^c}{\partial c} = 0 \qquad (e^{-\rho t} > 0)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\rho t}\mu\right) = e^{-\rho t}(\dot{\mu} - \rho\mu) \qquad (\text{積の微分})$$

$$e^{-\rho t}(\dot{\mu} - \rho\mu) = -e^{-\rho t}\frac{\partial H^c}{\partial a} \qquad (\text{共役方程式 } \dot{\lambda} = -\partial H/\partial a)$$

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H^c}{\partial a} \qquad (\text{両辺を } e^{-\rho t} \text{ で割る})$$

要点：最大値原理の条件（当期価値ハミルトニアン）

1. $H^c = u(a,c) + \mu\, g(a,c)$。
2. $\dfrac{\partial H^c}{\partial c} = 0$。
3. $\dot{\mu} = \rho\mu - \dfrac{\partial H^c}{\partial a}$。
4. $\dot{a} = g(a,c)$。
5. 横断性条件：$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu(t)a(t) = 0$。

マクロ経済学の教科書では、こちらの形が標準的に使われます。

4.6 共役変数の意味

共役変数 $\mu(t)$ は、「時点 t に状態変数を1単位多く持っていたら、そこから先の最大化された効用（当期価値）がどれだけ増えるか」を表します（第6章の価値関数の微分 $V'(a)$ に対応します）。この見方をすると、条件3は資産価格の式として読めます。

数式の読み方：共役方程式は「資産の収益率の条件」

条件3を書き直すと

$$\rho\,\mu = \underbrace{\frac{\partial H^c}{\partial a}}_{\text{配当}} + \underbrace{\dot{\mu}}_{\text{値上がり益}}.$$

- 状態変数1単位を「資産」とみなし、その価格を μ とします。
- 左辺は、この資産を持つことに要求される収益（価格 × 時間選好率）。
- 右辺は、実際に得られる収益で、「今この瞬間に状態変数がもたらす価値（配当）」と「価格の変化（値上がり益）」の和です。
- 最適な計画では、両者が等しくなっています。第3章の資産価格の式(3.8)（$rp = d + \dot{p}$）と同じ形です。

数式の読み方：横断性条件の意味

$e^{-\rho t}\mu(t)a(t)$ は、「遠い将来に残っている資産の価値を、今の時点で評価したもの」です。これが0に近づかないなら、最後まで使わずに残る価値ある資産があることになり、それをもっと早く消費すれば効用を増やせます。第1章の離散時間の横断性条件と同じ意味です。

4.7 最大値原理：定理と証明

ここまで、ハミルトニアンの条件を、ラグランジュ法からの類推で導いてきました。この節では、それらを定理として正確に述べ、証明します。主張は2つあります。「最適な経路はハミルトニアンの条件を満たす」（必要条件）と、「凹性のもとでは、ハミルトニアンの条件と横断性条件を満たす経路は最適である」（十分条件）です。実際にモデルを解くときに頼りになるのは、後者です。

必要条件

まず、期間が有限で、最後の時点の状態変数に制約がない問題を考えます。

$$\max_{c(t)} \int_0^T v\big(a(t),c(t),t\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{s.t.} \quad \dot{a}(t)=g\big(a(t),c(t),t\big), \quad a(0)=a_0 \tag{4.7}$$

v と g は連続微分可能とし、制御変数 $c(t)$ は $[0,T]$ 上の連続関数の中から自由に選べるとします。

定理 4.1（最大値原理：必要条件）

$\big(a^*(t),c^*(t)\big)$ を問題(4.7)の最適な経路とする。$\lambda(t)$ を、

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial a}\big(a^*(t),c^*(t),\lambda(t),t\big), \qquad \lambda(T)=0 \tag{4.8}$$

の解とする（$H=v+\lambda g$）。このとき、すべての $t\in[0,T]$ について

$$\frac{\partial H}{\partial c}\big(a^*(t),c^*(t),\lambda(t),t\big)=0$$

が成り立つ。

証明のアイデア

最適な制御 c^* を、任意の関数 h の方向に少しだけずらして $c^* + \varepsilon h$ とします。c^* が最適なら、目的関数の値は $\varepsilon = 0$ で最大なので、ε についての微分は 0 です。難しいのは、制御をずらすと、その後の状態変数の経路もすべてずれることです。共役変数 λ は、この「状態変数のずれを通じた間接的な効果」をちょうど打ち消して、h だけの式にまとめるように作られています。

証明　式(4.8)は、λ についての1階線形の微分方程式 $\dot{\lambda} = -v_a^* - g_a^* \lambda$ です（v_a^* などは、偏微分を最適な経路の上で評価した t の関数を表します）。係数が時間に依存しますが、定理 3.4 と同じく積分因子を使って、$\lambda(T) = 0$ を満たす解がただ一つ求まります。

ステップ1　制御をずらす

連続関数 $h(t)$ を任意にとり、制御を $c^* + \varepsilon h$ としたときの状態変数の経路を $a_\varepsilon(t)$、目的関数の値を $J(\varepsilon)$ と書きます。次の事実を、証明なしで使います。微分方程式の解は、右辺に含まれるパラメータについて微分可能で、$y(t) = \partial a_\varepsilon(t)/\partial \varepsilon$（$\varepsilon = 0$ での値）は、遷移式を ε で微分して得られる式

$$\dot{y} = g_a^* \, y + g_c^* \, h, \qquad y(0) = 0 \tag{4.9}$$

を満たす。$y(t)$ は、「制御を h の方向にずらしたとき、時点 t の状態変数がどれだけずれるか」を表します。c^* は最適なので、$J(\varepsilon)$ は $\varepsilon = 0$ で最大で、

$$0 = J'(0) = \int_0^T \left(v_a^* \, y + v_c^* \, h \right) \mathrm{d}t \tag{4.10}$$

です。

ステップ2　共役変数を使って y を消す

$\lambda(t) y(t)$ を時間で微分します。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda y) &= \dot{\lambda} \, y + \lambda \, \dot{y} && \text{（積の微分）} \\ &= -\left(v_a^* + \lambda g_a^* \right) y + \lambda \left(g_a^* \, y + g_c^* \, h \right) && \text{（式(4.8)と式(4.9)）} \\ &= -v_a^* \, y + \lambda g_c^* \, h && \text{（}\lambda g_a^* y \text{ が打ち消し合う）} \end{aligned}$$

両辺を 0 から T まで積分します。左辺は $\lambda(T) y(T) - \lambda(0) y(0)$ で、$\lambda(T) = 0$、$y(0) = 0$ より 0 です。したがって

$$\int_0^T v_a^* \, y \, \mathrm{d}t = \int_0^T \lambda g_c^* \, h \, \mathrm{d}t$$

が得られます。これを式(4.10)に代入すると、y が消えて

$$0 = \int_0^T \bigl(v_c^* + \lambda g_c^*\bigr) h \,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial c}\bigl(a^*, c^*, \lambda, t\bigr)\, h(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.11}$$

となります。

ステップ3　すべての時点で 0 であること

式(4.11)は、どんな連続関数 h についても成り立ちます。そこで、$h(t)$ として $\partial H/\partial c$ を最適な経路の上で評価した関数そのものを選ぶと、$\int_0^T (\partial H/\partial c)^2\,\mathrm{d}t = 0$ です。0 以上の連続関数の積分が 0 になるのは、その関数がつねに 0 のときだけなので、すべての t で $\partial H/\partial c = 0$ です。 □

数式の読み方：定理の読み方

- 式(4.8)の条件 $\lambda(T) = 0$ が、有限期間の**横断性条件**です。最後の時点の状態変数には使い道がないので、その価値は 0 です。
- 最後の時点に制約 $a(T) \geq 0$ がある場合は、$\lambda(T) = 0$ の代わりに「$\lambda(T) \geq 0$ かつ $\lambda(T)a^*(T) = 0$」という相補スラック条件になります。離散時間の式(1.9)と同じ形です。
- 制御変数に上限や下限がある場合は、条件 $\partial H/\partial c = 0$ が「各時点で、$c^*(t)$ は $H\bigl(a^*(t), c, \lambda(t), t\bigr)$ を c について最大にする」に変わります。これがポントリャーギンの最大値原理のもとの形で、証明にはより進んだ議論が必要です（本書では証明しません）。

補足：無限期間の場合の必要条件

期間が無限の問題でも、最適な経路に対して、$\partial H/\partial c = 0$ と共役方程式 $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial a$ を満たす $\lambda(t)$ が存在します。一方、横断性条件 $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)a(t) = 0$ は、一般の問題では必要条件にならないことがあり、反例も知られています。ただし、割引があり、効用関数と遷移式が標準的な仮定を満たすマクロモデルでは、横断性条件は必要条件でもあります（離散時間の場合の証明は第6章で行います）。本書では、横断性条件を、次の十分条件の一部として使います。

十分条件

無限期間の問題(4.2)に戻ります。実行可能な経路 (a^*, c^*) が最適であるとは、第1章と同じく、任意の実行可能な経路 (a, c) と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、T が十分大きければ

$$\int_0^T v(a, c, t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^T v(a^*, c^*, t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon$$

となることとします。

定理 4.2（マンガサリアン（Mangasarian）の十分条件）

問題(4.2)の実行可能な経路 $\big(a^*(t), c^*(t)\big)$ と関数 $\lambda(t)$ が、次の条件を満たすとする。

1. すべての t で $\dfrac{\partial H}{\partial c}(a^*, c^*, \lambda, t) = 0$、$\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial a}(a^*, c^*, \lambda, t)$。
2. 各 t について、$H\big(a, c, \lambda(t), t\big)$ は (a, c) の凹関数である。
3. （横断性条件）$\lim\limits_{T\to\infty} \lambda(T)\, a^*(T) = 0$。
4. どの実行可能な経路 (a, c) についても、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、T が十分大きければ $\lambda(T)a(T) \geq -\varepsilon$。

このとき、(a^*, c^*) は最適である。

数式の読み方：条件の確かめ方

- 条件2は、v が (a, c) の凹関数で、g が (a, c) の凹関数かつ $\lambda(t) \geq 0$ であれば成り立ちます（凹関数の、0 以上の係数による和は凹関数です）。g が (a, c) の1次式であれば、λ の符号は問いません。
- 条件4は、状態変数が負になれない（$a(t) \geq 0$）問題で $\lambda(t) \geq 0$ であれば、$\lambda(T)a(T) \geq 0$ なので成り立ちます。資本を状態変数とする問題がこれにあたります。借り入れのできる家計の問題では、ポンジ・ゲームの禁止がこの条件を保証します。
- 当期価値で書くと、$\lambda = e^{-\rho t}\mu$、$H = e^{-\rho t}H^c$ なので、条件2は「H^c が (a, c) の凹関数」、条件3は $\lim_{T\to\infty} e^{-\rho T}\mu(T)a^*(T) = 0$ となります。

証明のアイデア

離散時間の基本不等式（補題 1.7）と同じ筋道です。凹関数は接平面より下にあるので、目的関数の差は、ハミルトニアンの1次の項で上から抑えられます。条件1を使うと、その1次の項がちょうど $-\lambda(a - a^*)$ の時間微分にまとまり、積分すると最後の時点の項だけが残ります。それを横断性条件が消します。

証明　(a, c) を任意の実行可能な経路とします。以下、H は $H\big(a(t), c(t), \lambda(t), t\big)$ を、H^* は $H\big(a^*(t), c^*(t), \lambda(t), t\big)$ を表し、v、v^* も同じように書きます。

ステップ1　目的関数の差をハミルトニアンで書く

$H = v + \lambda g$ で、実行可能な経路の上では $g = \dot{a}$ なので、$v = H - \lambda\dot{a}$ です。したがって

$$v - v^* = (H - H^*) - \lambda(\dot{a} - \dot{a}^*)$$

です。

ステップ2　凹性を使う

条件2より、H は (a, c) の凹関数なので、接平面の不等式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} H - H^* &\leq \frac{\partial H^*}{\partial a}(a - a^*) + \frac{\partial H^*}{\partial c}(c - c^*) && \text{（凹関数は接平面より下にある）} \\ &= -\dot{\lambda}\,(a - a^*) && \text{（条件1）} \end{aligned}$$

ステップ1と合わせると、

$$\begin{aligned} v - v^* &\leq -\dot{\lambda}\,(a - a^*) - \lambda(\dot{a} - \dot{a}^*) && \text{（ステップ1に代入）} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\lambda\,(a - a^*)\Big] && \text{（積の微分を逆に使う）} \end{aligned}$$

となります。

ステップ3　積分して横断性条件を使う

両辺を 0 から T まで積分します。$a(0) = a^*(0) = a_0$ なので

$$\begin{aligned} \int_0^T (v - v^*)\,\mathrm{d}t &\leq -\lambda(T)\big(a(T) - a^*(T)\big) && \text{（$t = 0$ の項は 0）} \\ &= \lambda(T)a^*(T) - \lambda(T)a(T) \end{aligned}$$

です。$\varepsilon > 0$ を任意にとります。条件3より、T が十分大きければ $\lambda(T)a^*(T) \leq \varepsilon/2$ で、条件4より $-\lambda(T)a(T) \leq \varepsilon/2$ です。したがって、T が十分大きければ $\int_0^T v\,\mathrm{d}t \leq \int_0^T v^*\,\mathrm{d}t + \varepsilon$ となり、(a^*, c^*) は最適です。　□

補足：経済学での使いどころ　「解いた経路が本当に最適か」を確かめる

標準的なマクロモデルでは、効用関数も生産関数も凹関数なので、定理 4.2 の条件2と4は、ほとんどの場合に満たされます。したがって、モデルを解く手順は、「(1) ハミルトニアンの条件から微分方程式を導く。(2) その解のうち、横断性条件を満たすものを探す。(3) 見つかれば、定理 4.2 により、それが最適な経路である」となります。以下の3つの例では、この手順をたどります。

発展：アローの十分条件と変分法

定理 4.2 の条件2は、次のように弱めることができます。各時点で H を c について最大化した値 $\hat{H}(a,\lambda,t)=\max_c H(a,c,\lambda,t)$ が、a の凹関数であれば十分です（**アローの十分条件**）。H が (a,c) について凹でない問題でも、使えることがあります。

また、遷移式が $\dot{a}=c$ という最も簡単な形のとき、問題は「$\int v(a,\dot{a},t)\,\mathrm{d}t$ を最大にする関数 $a(t)$ を選ぶ」ことになります。これが古典的な**変分法**の問題です。ハミルトニアンの条件は $v_c+\lambda=0$、$\dot{\lambda}=-v_a$ なので、λ を消去すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial v}{\partial \dot{a}}\right)=\frac{\partial v}{\partial a}$$

が得られます。これを**オイラー＝ラグランジュ方程式**（オイラー方程式）といいます。離散時間のオイラー方程式という名前は、ここから来ています。

4.8 例1：ケーキ食べ問題

最も簡単な例で、手順を確かめましょう。大きさ X_0 のケーキを、時点0から T までに食べ尽くす問題です。

$$\max_{c(t)}\int_0^T e^{-\rho t}\ln c(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{s.t.}\quad \dot{X}=-c,\quad X(0)=X_0,\quad X(T)\geq 0.$$

$$\begin{aligned}
H^c &= \ln c+\mu(-c) && \text{（ハミルトニアン）}\\
\frac{\partial H^c}{\partial c} &= \frac{1}{c}-\mu=0 \;\Rightarrow\; c=\frac{1}{\mu} && \text{（条件2）}\\
\dot{\mu} &= \rho\mu-\frac{\partial H^c}{\partial X}=\rho\mu && \text{（条件3：}H^c\text{ は }X\text{ を含まない）}\\
\mu(t) &= \mu(0)e^{\rho t} \;\Rightarrow\; c(t)=c(0)e^{-\rho t} && \text{（}\dot{\mu}=\rho\mu\text{ を解く（第3章））}
\end{aligned}$$

消費は時間選好率 ρ の割合で減っていきます。せっかちなほど、早く多く食べます。最後に、ケーキを残すと損なので $X(T)=0$（有限期間の横断性条件）とし、ケーキの総量の条件から $c(0)$ を決めます。

$$\begin{aligned}
\int_0^T c(0)e^{-\rho t}\,\mathrm{d}t &= X_0 && \text{（食べた総量 = ケーキの大きさ）}\\
c(0)\,\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} &= X_0 && \text{（第3章の積分の計算）}\\
c(0) &= \frac{\rho X_0}{1-e^{-\rho T}} && \text{（}c(0)\text{ について解く）}
\end{aligned}$$

この問題では $H^c=\ln c-\mu c$ が (X,c) の凹関数なので、こうして求めた経路は最適です（有限期間でも、定理 4.2 の証明と同じ計算で確かめられます）。$T\to\infty$ なら $c(0)=\rho X_0$：毎

瞬間、残っているケーキの ρ の割合を食べる、という結果です。第1章の対数効用の計算例（毎期、資産の $1-\beta$ の割合を消費する）の連続時間版になっています。

4.9 例2：家計の問題とケインズ＝ラムゼイ則

問題(4.1)を解きます。効用関数は CRRA 型 $u(c)=\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ とします。

$$
\begin{aligned}
H^c &= u(c)+\mu(ra+w-c) && \text{（当期価値ハミルトニアン）}\\
u'(c) &= \mu && \text{（条件2：消費の限界効用 = 資産の価値）}\\
\dot{\mu} &= \rho\mu - r\mu = (\rho-r)\mu && \text{（条件3：}\partial H^c/\partial a = r\mu\text{）}\\
u''(c)\,\dot{c} &= \dot{\mu} && \text{（条件2を時間で微分（連鎖律））}\\
\frac{u''(c)\,c}{u'(c)}\cdot\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - r && \text{（両辺を } u'(c)=\mu \text{ で割り、} c \text{ を掛けて割る）}\\
-\sigma\,\frac{\dot{c}}{c} &= \rho - r && \text{（CRRA型では } cu''/u' = -\sigma\text{）}
\end{aligned}
$$

要点：ケインズ＝ラムゼイ則（連続時間のオイラー方程式）

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r-\rho}{\sigma}.$$

数式の読み方

- 利子率が時間選好率より高い（$r>\rho$）なら、消費を先送りする価値があるので、消費は時間とともに増えます。
- $1/\sigma$（異時点間の代替の弾力性）が大きいほど、利子率に反応して消費の成長率が大きく変わります。
- 離散時間のオイラー方程式 $u'(c_t)=\beta(1+r)u'(c_{t+1})$（第1章）に CRRA 型の効用関数を代入した $\ln(c_{t+1}/c_t)=\frac{1}{\sigma}\ln[\beta(1+r)]\approx\frac{r-\rho}{\sigma}$ と同じ内容です（$\ln(1+r)\approx r$、$\ln\beta\approx-\rho$）。連続時間では近似なしにきれいな形になるのが利点です。

計算例：消費関数を求める（横断性条件の使い方）

ケインズ＝ラムゼイ則だけでは消費の**成長率**しか決まりません。水準を決めるのが予算制約と横断性条件です。r と w が一定とし、$\gamma \equiv (r-\rho)/\sigma$ と書きます。

$$
\begin{aligned}
c(t) &= c(0)\, e^{\gamma t} && \text{（成長率一定（第3章））}\\
\int_0^{\infty} e^{-rt} c(t)\,\mathrm{d}t &= a_0 + \frac{w}{r} \equiv W && \text{（生涯予算制約（第3章））}\\
\frac{c(0)}{r-\gamma} &= W && \left(\int_0^{\infty} e^{-(r-\gamma)t}\mathrm{d}t\text{、}r>\gamma\text{が必要}\right)\\
c(0) &= (r-\gamma)\,W = \frac{\rho-(1-\sigma)r}{\sigma}\,W && \left(r-\gamma = \frac{\sigma r - r + \rho}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

- 生涯予算制約が等号で成り立つのは、横断性条件 $\lim e^{-\rho t}\mu(t)a(t) = 0$ が成り立つからです（$\dot{\mu} = (\rho - r)\mu$ より $e^{-\rho t}\mu(t) = \mu(0)e^{-rt}$ なので、横断性条件は $\lim e^{-rt}a(t) = 0$ と同じです）。
- $H^c = u(c) + \mu(ra + w - c)$ は、u が凹関数で遷移式が1次式なので、(a, c) の凹関数です。また、ポンジ・ゲームの禁止 $\lim e^{-rt}a(t) \geq 0$ から、定理 4.2 の条件4も成り立ちます。したがって、ここで求めた経路は最適です。
- $\sigma = 1$（対数効用）なら $c(0) = \rho W$：ケーキ食べ問題と同じく、富の ρ の割合を消費します。r には依存しません（利子率の上昇による所得効果と代替効果が、ちょうど打ち消し合うためです）。
- $r > \gamma$、つまり $\rho > (1-\sigma)r$ は、効用の割引和が有限になるための条件です。これが満たされないと、消費を先送りし続けるほど効用が増え、最適解が存在しません。

4.10 例3：ラムゼイモデル

社会計画者が、人口一定の経済で、1人あたり資本 k の蓄積を考えながら消費を選ぶ問題です。

$$
\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u\big(c(t)\big)\,\mathrm{d}t \qquad \text{s.t.} \quad \dot{k} = f(k) - c - \delta k, \quad k(0) = k_0.
$$

$$
\begin{aligned}
H^c &= u(c) + \mu\big(f(k) - c - \delta k\big) && \text{（当期価値ハミルトニアン）}\\
u'(c) &= \mu && \text{（条件2）}\\
\dot{\mu} &= \rho\mu - \mu\big(f'(k) - \delta\big) && \text{（条件3）}\\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{f'(k) - \delta - \rho}{\sigma} && \text{（例2と同じ変形）}
\end{aligned}
$$

家計の問題の r が、資本の純限界生産物 $f'(k)-\delta$ に置き換わっています。結局、経済の動きは次の2本の微分方程式で表されます。

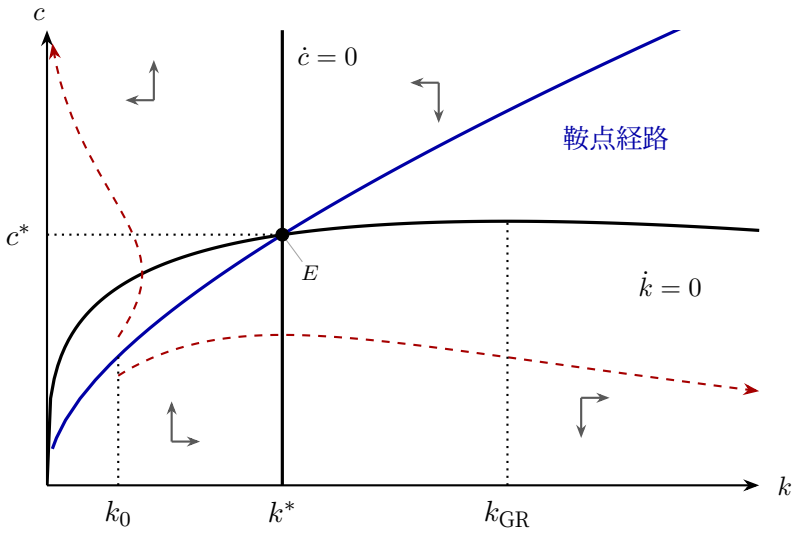
$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k \tag{4.12}$$

$$\dot{c} = \frac{c}{\sigma}\bigl(f'(k) - \delta - \rho\bigr) \tag{4.13}$$

計算例：定常状態とゼロ変化線

- $\dot{c}=0$：$f'(k^*)=\rho+\delta$。k だけで決まるので、位相図では**垂直線**です。この条件を**修正黄金律**といいます。
- $\dot{k}=0$：$c=f(k)-\delta k$。山の形の曲線で、頂点は $f'(k)=\delta$ の**黄金律**資本 k_{GR}（定常状態の消費を最大にする資本）です。
- $\rho>0$ なので $f'(k^*)=\rho+\delta>\delta=f'(k_{\mathrm{GR}})$、限界生産物の逓減から $k^*<k_{\mathrm{GR}}$。将来を割り引く経済は、黄金律より少ない資本で落ち着きます。

図 4.1　ラムゼイモデルの位相図



$f(k)=k^{0.3}$、$\delta=0.05$、$\rho=0.03$、$u=\ln c$（$\sigma=1$）。$k^*=(0.3/0.08)^{1/0.7}\approx 6.61$、$c^*\approx 1.43$、黄金律 $k_{\mathrm{GR}}=(0.3/0.05)^{1/0.7}\approx 12.93$。鞍点経路と赤の経路は、式(4.12)・(4.13)を数値的に解いて描いた（鞍点経路は定常状態の近くから時間を逆向きに解いた）。赤の経路の初期消費は、鞍点経路上の値の1.15倍と0.85倍。

図の読み方

1. 黒の山形の曲線が $\dot{k}=0$、黒の垂直線が $\dot{c}=0$ です。交点 E が定常状態です。
2. 2本の線は平面を4つの領域に分けます。灰色の矢印は各領域での (k,c) の動く向きです。例えば、山形の曲線より下では消費が少ないので資本が増え（右向き）、k^* より左では資本の限界生産物が高いので消費が増えます（上向き）。
3. 青の曲線が**鞍点経路**です。k_0 が与えられたとき、消費をちょうど鞍点経路上の値に選ぶと、経済は E に向かって収束します。
4. 消費を多すぎる値から始めると（上の赤の点線）、資本が食いつぶされ、有限の時間で資本が0になってしまいます。実行できない計画です。
5. 消費を少なすぎる値から始めると（下の赤の点線）、資本は黄金律を超えて貯まり続け、消費は減っていきます。資本を使い残すので、横断性条件を満たさず、最適ではありません。
6. こうして、横断性条件と実行可能性から、鞍点経路だけが最適経路の候補として残ります。第3章の線形システムの鞍点と同じ構造です。

数式の読み方：なぜ下の経路は横断性条件を満たさないのか

消費が少なすぎる経路では、資本が黄金律 k_{GR} を超えて増え、$f'(k)-\delta<0$ の領域に入ります。条件3を書き直すと $\dot{\mu}/\mu=\rho-(f'(k)-\delta)$ なので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\bigl(e^{-\rho t}\mu(t)\bigr)=-\rho+\frac{\dot{\mu}}{\mu}=-(f'(k)-\delta)>0.$$

つまり割引後の資本の価値 $e^{-\rho t}\mu(t)$ は増え続け、資本 $k(t)$ も正の値にとどまるので、$e^{-\rho t}\mu(t)k(t)\to 0$ となりません。資本を過剰に貯め込む（**動学的に非効率な**）経路は、消費を増やせば全期間で改善できるので、最適ではないのです。

鞍点経路が最適であることは、図からの推論だけでなく、定理 4.2 によって証明できます。

命題 4.3（ラムゼイモデルの鞍点経路は最適）

u と f は凹関数で、$u'>0$ とする。$k(0)=k_0$ から出発し、式(4.12)・(4.13)を満たして定常状態 (k^*,c^*) に収束する経路 $\bigl(k(t),c(t)\bigr)$ は、最適である。

証明　$\mu(t)=u'\bigl(c(t)\bigr)>0$ とおき、定理 4.2 の条件を当期価値の形で確かめます。条件1は、式(4.13)が $u'(c)=\mu$ と共役方程式から導かれた式であることから成り立ちます。条件2について、$H^c=u(c)+\mu\bigl(f(k)-c-\delta k\bigr)$ は、凹関数 $u(c)$ と、凹関数 $f(k)$ の正の定数

倍と、1次式の和なので、(k, c) の凹関数です。条件3について、$k(t) \to k^*$、$\mu(t) \to u'(c^*)$ なので $\mu(t)k(t)$ は有界で、$e^{-\rho T}\mu(T)k(T) \to 0$ です。条件4は、資本が負にならないこと（$k(t) \geq 0$）と $\mu(t) > 0$ から成り立ちます。 □

計算例：定常状態のまわりの線形化

式(4.12)・(4.13)を (k^*, c^*) で線形化します（$\tilde{k} = k - k^*$、$\tilde{c} = c - c^*$）。

$$\dot{\tilde{k}} \approx \big(f'(k^*) - \delta\big)\tilde{k} - \tilde{c} = \rho\tilde{k} - \tilde{c} \qquad (f'(k^*) = \rho + \delta)$$

$$\dot{\tilde{c}} \approx \frac{c^* f''(k^*)}{\sigma}\,\tilde{k} \qquad (\text{定常状態で } f' - \delta - \rho = 0 \text{ なので } \tilde{c} \text{ の項は消える})$$

係数行列（ヤコビ行列）$A = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ c^* f''(k^*)/\sigma & 0 \end{pmatrix}$ の行列式は $c^* f''(k^*)/\sigma < 0$ なので、命題 3.10 より定常状態は鞍点です。したがって、線形化の原理（定理 3.12）より、定常状態の近くに鞍点経路が存在します。定理 3.11 より、定常状態での鞍点経路の傾きは $m = (\lambda_s - \rho)/(-1) = \rho - \lambda_s > 0$ で、負の固有値 λ_s の絶対値が、経済が定常状態に近づく速さ（収束速度）を表します。図の例では、固有値は約 0.126 と -0.096 です。

4.11 比較動学：パラメータが変わったときの経路

位相図の大きな利点は、**パラメータが変わったとき、経済がどう動くか**（比較動学）を、方程式を解かずに描けることです。定常状態にあった経済で、時点0に時間選好率 ρ が予想外に、恒久的に下がったとします（人々が辛抱強くなった）。

1. **何が動くか**：$\dot{c} = 0$ の線 $f'(k) = \rho + \delta$ は、ρ が下がると右に移ります（f' は減少関数）。$\dot{k} = 0$ の曲線は ρ を含まないので動きません。新しい定常状態 E_1 は、資本も消費も多い点です。
2. **時点0で何が起こるか**：資本 k は先決変数なので、時点0では k_0^* のままです。消費 c はジャンプ変数なので、新しい鞍点経路の上に**瞬時に移ります**。図では、E_0 の真下の点 J に下がります。
3. **その後**：経済は新しい鞍点経路に沿って E_1 に向かい、資本と消費が少しずつ増えます。

図 4.2　時間選好率の低下：位相図と消費の経路

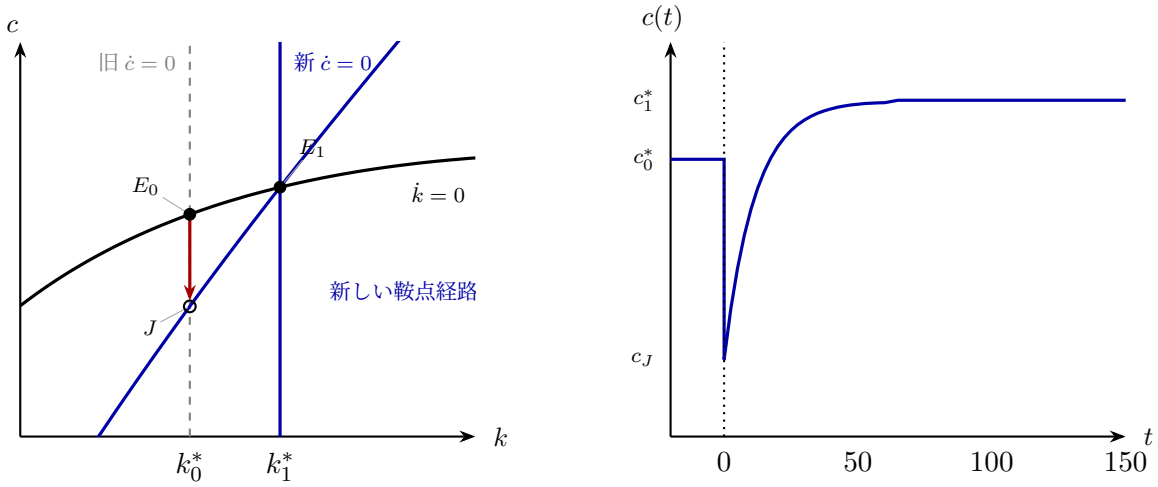


図4.1と同じ設定（$f(k)=k^{0.3}$、$\delta=0.05$、$u=\ln c$）で、時点0に ρ が 0.03 から 0.02 に予想外に恒久的に下がる。$k_0^*\approx 6.61$、$k_1^*=(0.3/0.07)^{1/0.7}\approx 8.00$。新しい鞍点経路は数値計算で求め、時点0の消費は鞍点経路上の値 $c_J\approx 1.315$ にジャンプする。

図の読み方

1. 左図の灰色の点線が元の $\dot{c}=0$、青の垂直線が新しい $\dot{c}=0$ です。山形の曲線（$\dot{k}=0$）は動きません。
2. 時点0に消費は E_0 から J に下がります（赤の矢印）。辛抱強くなった家計が、今の消費を減らして貯蓄を増やすためです。
3. 右図はその消費の時間経路です。時点0で下にジャンプした後、資本の蓄積とともに上がり、やがて元の水準 c_0^* を超えて新しい定常状態 c_1^* に近づきます。「今は我慢し、後でより多く消費する」経路です。
4. 時点0以外では消費は滑らかに動きます。予想外の変化が起きた瞬間にだけジャンプする、というのが第3章で見たジャンプ変数の性質です。

発展：予想された変化の場合

変化が時点0に**発表**され、時点 $T>0$ に**実施**される場合は、次のようになります。(1) 発表の瞬間に消費がジャンプする。(2) 時点 0 から T までは、**古い**パラメータのもとでの運動方程式にしたがって動く（この間の経路は鞍点経路ではない）。(3) ちょうど時点 T に新しい鞍点経路に到達し、以後はそれに沿って新しい定常状態に向かう。時点 T に消費がジャンプすると、予想された確実な利益の機会（オイラー方程式の違反）が生じてしまうので、ジャンプは発表時の1回だけです。財政政策や税制変更の発表効果の分析は、この考え方を使います。

補足：分権的な市場経済との関係

家計が例2の問題を、企業が利潤最大化（$r+\delta=f'(k)$、$w=f(k)-kf'(k)$）を解く競争的な市場経済では、家計のケインズ＝ラムゼイ則に $r=f'(k)-\delta$ を代入すると、計画者の式(4.13)とまったく同じになります。外部性などの市場の失敗がなければ、競争均衡は計画者の最適解と一致します（厚生経済学の第一基本定理の動学版）。そのため、まず計画者の問題を解く、という手順がよく使われます。

発展：人口成長と技術進歩がある場合

人口が率 n、労働増大的な技術が率 g で成長し、効用を $\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{C(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}\frac{L(t)}{H}\mathrm{d}t$（$C$ は1人あたり消費、H は世帯数）とすると、効率労働1単位あたりの資本 $\hat{k}$ と消費 $\hat{c}$ について

$$\dot{\hat{k}}=f(\hat{k})-\hat{c}-(n+g+\delta)\hat{k},\qquad \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}=\frac{f'(\hat{k})-\delta-\rho-\sigma g}{\sigma}$$

となり、本章と同じ位相図で分析できます。定常状態では1人あたりの変数が率 g で成長し（**均斉成長経路**）、修正黄金律は $f'(\hat{k}^*)=\rho+\delta+\sigma g$ に変わります。効用の割引和が有限になる条件は $\rho-n>(1-\sigma)g$ です。

発展：動的計画法との関係（ハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式）

時点 t に状態変数が a であるとき、そこから先の割引効用の最大値（当期価値）を $V(a)$ と書き、**価値関数**と呼びます。短い時間 Δ のあいだ制御 c を選ぶと、その間に $u(a,c)\Delta$ の効用が得られ、状態はおよそ $a+g(a,c)\Delta$ に移ります。その先は最適に行動するとすれば、

$$V(a)\approx\max_{c}\Big\{u(a,c)\Delta+(1-\rho\Delta)\,V\big(a+g(a,c)\Delta\big)\Big\}$$

です。$V(a+g\Delta)\approx V(a)+V'(a)g\Delta$ を代入し、Δ の1次の項だけを残して整理すると、

$$\rho V(a)=\max_{c}\Big\{u(a,c)+V'(a)\,g(a,c)\Big\}$$

が得られます。これが**ハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式**（HJB方程式）です。右辺のかっこの中は、$\mu=V'(a)$ とおいた当期価値ハミルトニアン H^c そのものです。つまり、共役変数 $\mu(t)$ は価値関数の傾き $V'\big(a(t)\big)$ であり、「状態変数1単位の価値」という解釈が、ここから正確に導かれます。離散時間での同じ考え方（ベルマン方程式）は、第6章で詳しく扱います。HJB方程式は、不確実性のある連続時間のモデルで特に重要になります。

要点

- ハミルトニアン $H^c = u + \mu g$ は、離散時間のラグランジュ法の連続時間版。条件は $\partial H^c/\partial c = 0$、$\dot{\mu} = \rho\mu - \partial H^c/\partial a$、遷移式、横断性条件。
- 共役変数 μ は状態変数のシャドー・プライスで、共役方程式は「要求収益 = 配当 + 値上がり益」。
- CRRA 型効用では $\dot{c}/c = (r - \rho)/\sigma$（ケインズ＝ラムゼイ則）。
- ラムゼイモデルは (k, c) の2変数システムで、定常状態は鞍点。横断性条件により鞍点経路だけが最適。
- H^c が状態変数と制御変数について凹関数であれば、ハミルトニアンの条件と横断性条件を満たす経路は最適（十分条件）。

次の章へ　次の2つの章では、同じ問題を離散時間で、価値関数を使って「再帰的に」解くベルマン方程式を学びます。まず次の章で、関数を未知数とする方程式を解くための道具（縮小写像の原理）を準備し、その次の章でベルマン方程式に進みます。不確実性のあるモデルでは、こちらの方法が主役になります。

第5章

関数空間と縮小写像の原理

ここまでの流れ　第3章では、微分方程式の解が「ただ一つに決まる」こと（定理3.2）を、証明せずに使いました。第4章の最後では、価値関数 V という「関数を未知数とする方程式」（HJB方程式）が登場しました。どちらも、答えが数ではなく**関数**である問題です。

前提知識　$\mathbb{R}^n$ のノルム・収束・閉集合・コンパクト集合と、「$\mathbb{R}^n$ のコーシー列は収束する」という事実、最大値定理（ミクロ版の「$\mathbb{R}^n$ の位相」「連続性・最大値定理・対応」の章）。第3章のリプシッツ条件（発展枠だけで使います）。

この章の問い　「関数の列が関数に収束する」とは何を意味するのでしょうか。そして、未知の関数についての方程式に「解がただ一つ存在する」ことは、どうすれば証明できるのでしょうか。

この章で分かること　関数の集まりを一つの空間とみなす考え方（ノルム空間）、関数の距離（上限ノルム）、完備性、有界連続関数の空間が完備であること（証明）、縮小写像の原理（証明）と誤差の評価、ブラックウェルの十分条件（証明）、応用として微分方程式の解の存在と一意性の証明。

5.1　この章の見取り図

次の章で扱うベルマン方程式

$$V(k) = \max_{k'} \Big\{ u\big(f(k) + (1-\delta)k - k'\big) + \beta V(k') \Big\}$$

は、未知の関数 V が左辺と右辺の両方に現れる方程式です。これを解くとは、「この等式をすべての k で満たす関数 V を見つける」ことです。ふつうの方程式 $x = g(x)$ なら、x は数直線上の点ですが、ここでは「点」の役割をするのが関数 V です。

そこで、**関数の集まりを一つの空間とみなし、その空間の点として関数を扱う**という考え方を導入します。この見方をすると、ベルマン方程式は「関数の空間の上の写像 T の不動点 $V = TV$ を求める問題」になり、微分方程式の初期値問題も、同じ形の不動点問題として書き直せます。そのうえで、この章の主定理である**縮小写像の原理**を使うと、不動点がただ一つ存在することと、適当な出発点から T を繰り返し施せばその不動点に収束することが、同時に分かります。

関数の空間で「不動点に収束する」と言うためには、まず「関数と関数の距離」と「関数の列の収束」を定めなければなりません。それが最初の節の仕事です。

5.2 ノルム空間と完備性

定義 5.1（ノルム空間）

実数を係数とするベクトル空間 S の各元 x に実数 $\|x\|$ を対応させる写像が、すべての $x, y \in S$ と実数 a について

1. $\|x\| \geq 0$ で、$\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限る、
2. $\|ax\| = |a|\,\|x\|$、
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$（三角不等式）

を満たすとき、$\|\cdot\|$ を S の**ノルム**といい、S を**ノルム空間**という。$d(x, y) = \|x - y\|$ を x と y の**距離**という。

数式の読み方：定義の読み方

- ノルムは「大きさ」を測る物差しです。$\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルム $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ はその一例で、3つの条件は、$\mathbb{R}^n$ で「長さ」がもつ性質のうち、収束や連続性の議論に必要なものだけを取り出したものです。
- ベクトル空間であることを仮定しているので、2つの元の和 $x + y$ と、定数倍 ax が定義されています。関数の集まりでは、$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$、$(af)(x) = af(x)$ と定めると、ベクトル空間になります。
- 距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ は、$d(x, y) = d(y, x)$ と $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ を満たします。以下の議論で実際に使うのは、ノルムそのものより、この距離の性質です。

距離が定まると、$\mathbb{R}^n$ とまったく同じ言葉で収束を定義できます。

定義 5.2（収束・コーシー列・完備性）

ノルム空間 S の点列 $\{x_n\}$ について、

1. $\{x_n\}$ が $x \in S$ に**収束する**とは、$\|x_n - x\| \to 0$（$n \to \infty$）となることをいう。
2. $\{x_n\}$ が**コーシー列**であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 N があって、$m, n \geq N$ ならば $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ となることをいう。
3. S のすべてのコーシー列が S の点に収束するとき、S は**完備**であるという。完備なノルム空間を**バナッハ空間**という。

用語の説明：コーシー列と完備性

- コーシー列は、「十分先まで進むと、列の点どうしが互いに近づく」列です。収束する列は必ずコーシー列です（$\|x_m - x_n\| \le \|x_m - x\| + \|x - x_n\|$）。
- 逆が成り立つかどうか、つまり「互いに近づく列には、必ず行き先があるか」が完備性の問題です。有理数の全体は完備ではありません。$\sqrt{2}$ に近づく有理数の列はコーシー列ですが、行き先の $\sqrt{2}$ が有理数の中にないからです。
- $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ は完備です。これは実数の基本的な性質（有界な単調列は収束する）から導かれ、ミクロ版の「$\mathbb{R}^n$ の位相」の章で扱う内容なので、本書では証明しません。
- 完備性が大切なのは、**行き先を知らなくても「収束する」と言える**からです。これから作る関数の列は、極限の関数の形が分からないまま「コーシー列である」ことだけを示します。完備性が、その極限の存在を保証してくれます。

収束の定義から、ただちに次が分かります。$\{x_n\}$ が x に収束するとき、$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \le \|x_n - x\| \to 0$ なので、ノルムは連続です。また、収束先はただ一つです（x と y の両方に収束するなら $\|x - y\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \to 0$）。

> **定義 5.3（閉集合）**
> ノルム空間 S の部分集合 S' が**閉集合**であるとは、S' の点列が S の点 x に収束するならば、つねに $x \in S'$ となることをいう。

完備な空間の閉集合は、それ自身が完備です。S' のコーシー列は S のコーシー列なので S の点に収束し、S' が閉集合なのでその点は S' に入るからです。この簡単な事実を、あとで繰り返し使います。

5.3 関数の空間と上限ノルム

集合 X（$\mathbb{R}^n$ の部分集合）の上で定義された、有界な実数値関数の全体を $B(X)$ と書きます。すなわち

$$B(X) = \big\{ f : X \to \mathbb{R} \;\big|\; \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \big\}$$

です。$B(X)$ は、関数の和と定数倍についてベクトル空間になります（有界な関数の和は有界です）。

用語の説明：上限（sup）

数の集合 A の**上限** $\sup A$ とは、A のすべての要素以上である数（上界）のうち最小のものです。A に最大の要素があれば $\sup A$ はそれに一致しますが、最大の要素がなくても上限は定まります。たとえば区間 $(0,1)$ に最大の要素はありませんが、$\sup(0,1) = 1$ です。関数の値の集合は最大値をもつとは限らないので、max ではなく sup を使います。上に有界な集合には必ず上限が存在する、というのが実数の基本的な性質です。

定義 5.4（上限ノルム）

$f \in B(X)$ に対して

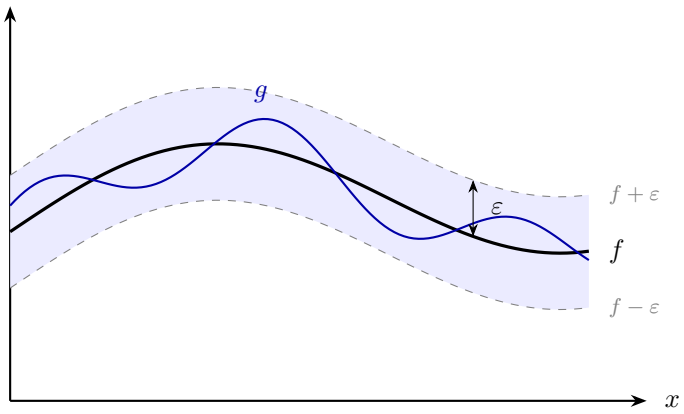
$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

と定める。これを**上限ノルム**（sup ノルム）という。

数式の読み方：上限ノルムの意味

- $\|f - g\|$ は、「f と g の値の差が最も開いている場所での差」です。$\|f - g\| < \varepsilon$ とは、すべての x で $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$、つまり g のグラフが f のグラフの上下 ε の帯の中にすっぽり収まることです（図 5.1）。
- 定義 5.1 の3条件は、各点で $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|$ となることなどから確かめられます。
- 上限ノルムで $f_n \to f$ となることを、f_n は f に**一様収束**するといいます。各点 x で $f_n(x) \to f(x)$ となること（**各点収束**）より強い条件です。

図 5.1　上限ノルムと一様収束



黒の曲線が f、薄い青の帯が f の上下 ε の範囲。青の曲線 g は帯の中に収まっているので、$\|f - g\| < \varepsilon$。

図の読み方

1. 上限ノルムによる距離 $\|f-g\|$ は、2本のグラフの縦方向の開きの最大値です。$\|f-g\|<\varepsilon$ は、「g のグラフ全体が、f のまわりの幅 ε の帯の中にある」ことと同じです。
2. 関数の列 f_n が f に一様収束するとは、どんなに細い帯をとっても、n が十分大きければ f_n がその帯に収まることです。一部の x でだけ差が残る、ということは許されません。
3. 一様収束のもとでは、f_n の性質（連続性、単調性、凹性など）の多くが極限 f に受け継がれます。これが、関数の空間で上限ノルムを使う理由です。

補足：各点収束では足りない例

区間 $[0,1]$ 上の関数 $f_n(x)=x^n$ は、各点で $f(x)=0$（$0\le x<1$）、$f(1)=1$ に収束します。各 f_n は連続ですが、極限 f は $x=1$ で不連続です。一様収束はしていません。$\|f_n-f\|=\sup_{x<1}x^n=1$ で、いくら n を大きくしても距離が縮まらないからです。各点収束では、極限で連続性が壊れることがあるのです。

定理 5.5（有界関数の空間の完備性）

$B(X)$ は、上限ノルムについて完備である。

証明のアイデア

コーシー列 $\{f_n\}$ をとると、各点 x で数列 $\{f_n(x)\}$ が $\mathbb{R}$ のコーシー列になるので、$\mathbb{R}$ の完備性から各点での極限 $f(x)$ が定まります。山場は、この各点ごとの極限 f に対して、$\|f_n-f\|\to 0$（一様収束）と $f\in B(X)$（有界性）を示すところです。どちらも「$m\to\infty$ の極限を、不等式の中でとる」ことで得られます。

証明　$\{f_n\}$ を $B(X)$ のコーシー列とします。

ステップ1　各点での極限を作る

任意の $x\in X$ について、$|f_m(x)-f_n(x)|\le\|f_m-f_n\|$ なので、$\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列です。$\mathbb{R}$ は完備なので、極限が存在します。それを $f(x)$ と書きます。これで、関数 $f:X\to\mathbb{R}$ が定まりました。

ステップ2　一様収束を示す

$\varepsilon>0$ をとります。コーシー列なので、番号 N があって、$m,n\ge N$ ならば、すべての x で $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ です。ここで $n\ge N$ と x を固定したまま $m\to\infty$ とする

と、$f_m(x) \to f(x)$ より

$$|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon \qquad (\text{すべての } x \in X,\ n \ge N)$$

です。x について上限をとると $\|f - f_n\| \le \varepsilon$ で、ε は任意なので $\|f_n - f\| \to 0$ です。

ステップ3　極限が有界であること

ステップ2の N について、$|f(x)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \le \varepsilon + \|f_N\|$ がすべての x で成り立つので、f は有界で、$f \in B(X)$ です。 □

次に、有界な**連続**関数の全体 $C(X)$ を考えます。$C(X) \subset B(X)$ で、$C(X)$ もベクトル空間です（連続関数の和と定数倍は連続です）。X がコンパクトなら、最大値定理によって連続関数は自動的に有界なので、$C(X)$ は X 上のすべての連続関数の集合と一致します。

定理 5.6（有界連続関数の空間の完備性）

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。$C(X)$ は $B(X)$ の閉集合であり、したがって上限ノルムについて完備である。

証明のアイデア

示すべきことは「連続関数の一様極限は連続」です。f の2点での値の差を、$|f(x) - f_n(x)|$、$|f_n(x) - f_n(y)|$、$|f_n(y) - f(y)|$ の3つに分けて抑えます。両端の2つは一様収束で、中央の1つは f_n の連続性で小さくなります（$\varepsilon/3$ 論法）。

証明　$\{f_n\}$ を $C(X)$ の列とし、$B(X)$ の中で f に収束するとします。f が連続であることを示します。$x_0 \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとります。一様収束より、$\|f_n - f\| < \varepsilon/3$ となる n があります。この f_n は x_0 で連続なので、$\delta > 0$ があって、$\|x - x_0\| < \delta$ ならば $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ です。したがって、$\|x - x_0\| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \\
&\quad + |f_n(x_0) - f(x_0)| && (\text{三角不等式}) \\
&\le \|f - f_n\| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \|f_n - f\| && (\text{上限ノルムで抑える}) \\
&< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon && (\text{一様収束と } f_n \text{ の連続性})
\end{aligned}$$

です。これは f が x_0 で連続であることを意味します。よって $C(X)$ は閉集合で、完備な空間 $B(X)$ の閉集合なので完備です。 □

補足：経済学での使いどころ

動的計画法では、価値関数を $C(X)$ の元として探します。価値関数反復で作る関数の列が「上限ノルムでコーシー列になる」ことさえ示せば、定理 5.6 によって、極限の関数が存在し、しかも連続であることまで分かります。同じ理由で、単調な関数、凹な関数の集合も $C(X)$ の閉集合であることが、価値関数の性質を調べるときの鍵になります（次の章）。

5.4 縮小写像の原理

定義 5.7（縮小写像）

ノルム空間 S の部分集合 S' から S' 自身への写像 $T : S' \to S'$ が**縮小写像**であるとは、ある定数 $\beta \in [0, 1)$ があって、すべての $x, y \in S'$ について

$$\|Tx - Ty\| \leq \beta \, \|x - y\|$$

が成り立つことをいう。β を縮小写像の**係数**という。

数式の読み方：定義の読み方

- 「どの2点をとっても、T で写すと距離が β 倍以下に縮む」という条件です。$\beta < 1$ であること、つまり縮み方の比率が 1 より真に小さい定数で一様に抑えられることが本質です。$\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$（縮むが比率は決まっていない）だけでは、不動点が存在しないことがあります。
- 縮小写像は連続です。$x_n \to x$ なら $\|Tx_n - Tx\| \leq \beta \|x_n - x\| \to 0$ だからです。
- $S' = \mathbb{R}$ で T が微分可能なら、平均値の定理から、$|T'(x)| \leq \beta < 1$ がすべての x で成り立てば縮小写像です。第1章の差分方程式 $x_{t+1} = g(x_t)$ で $|g'| \leq \beta < 1$ であれば、g は縮小写像で、どこから出発しても定常状態に収束します。

定理 5.8（縮小写像の原理（バナッハの不動点定理））

S を完備なノルム空間、$S' \subset S$ を閉集合、$T : S' \to S'$ を係数 β の縮小写像とする。このとき、

1. T は S' にただ一つの不動点 x^*（$Tx^* = x^*$）をもつ。
2. 任意の $x_0 \in S'$ から出発して $x_{n+1} = Tx_n$ と定めた列は x^* に収束し、

$$\|x_n - x^*\| \leq \beta^n \|x_0 - x^*\| \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。

3. さらに、次の誤差の評価が成り立つ。

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\beta^n}{1-\beta} \|x_1 - x_0\|, \qquad \|x_n - x^*\| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

証明のアイデア

T を繰り返すと、連続する2点の距離 $\|x_{n+1} - x_n\|$ は毎回 β 倍以下に縮むので、等比級数のように足し合わせて有限になります。これが「列はコーシー列である」ことを意味し、完備性から極限 x^* が存在します。T が連続なので、極限は不動点です。一意性は、2つの不動点の距離が自分自身の β 倍以下になることから出ます。証明の山場は、完備性を使って極限の存在を引き出すところです。縮小写像の条件だけでは、収束先がその空間の中にあるとは言えません。

証明

方針　$x_0 \in S'$ を任意にとり、$x_{n+1} = Tx_n$ とおきます。T は S' を S' に写すので、すべての x_n は S' の点です。

ステップ1　連続する2点の距離が縮む

縮小写像の条件を n 回使うと、

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| &\leq \beta \|x_n - x_{n-1}\| && \text{（縮小写像の条件）} \\ &\leq \beta^n \|x_1 - x_0\| && \text{（同じ操作を繰り返す）} \end{aligned}$$

です。

ステップ2　コーシー列であること

$m > n$ とします。三角不等式と、ステップ1と、等比級数の和（命題 1.2）から

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &\le \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| && \text{（三角不等式）} \\
&\le \left(\beta^{m-1} + \cdots + \beta^n\right)\|x_1 - x_0\| && \text{（ステップ1）} \\
&\le \frac{\beta^n}{1-\beta}\,\|x_1 - x_0\| && \text{（等比級数の和で上から抑える）}
\end{aligned}$$

です。$\beta < 1$ なので右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束します。したがって $\{x_n\}$ はコーシー列です。

ステップ3　極限が不動点であること

S は完備で、S' はその閉集合なので、$\{x_n\}$ はある $x^* \in S'$ に収束します。T は連続なので、$x_{n+1} = Tx_n$ の両辺で $n \to \infty$ とすると $x^* = Tx^*$ です。

ステップ4　一意性

x^* と y^* がともに不動点なら、$\|x^* - y^*\| = \|Tx^* - Ty^*\| \le \beta\|x^* - y^*\|$ です。$\beta < 1$ なので、これは $\|x^* - y^*\| = 0$、すなわち $x^* = y^*$ のときにしか成り立ちません。

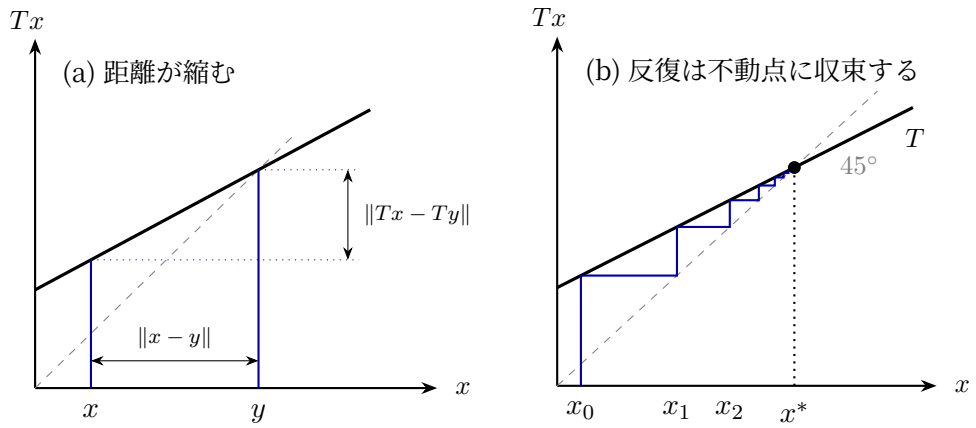
ステップ5　誤差の評価

$\|x_n - x^*\| = \|Tx_{n-1} - Tx^*\| \le \beta\|x_{n-1} - x^*\|$ を繰り返すと主張2が得られます。主張3の1つ目は、ステップ2の不等式で $m \to \infty$ とすれば得られます。2つ目は、x_{n-1} を出発点とみなして1つ目を $n = 1$ で使えば得られます。　□

数式の読み方：3つの評価の使い分け

- 主張2の評価 $\beta^n\|x_0 - x^*\|$ は、収束の速さが幾何級数的（毎回 β 倍）であることを示しますが、右辺に未知の x^* を含みます。
- 主張3の1つ目は、最初の1歩の長さ $\|x_1 - x_0\|$ だけから、n 回目の誤差の上限が分かります（**事前評価**）。あらかじめ必要な反復回数を見積もるのに使います。
- 主張3の2つ目は、直前の2回の差 $\|x_n - x_{n-1}\|$ から現在の誤差が分かります（**事後評価**）。数値計算で「新旧の差が 10^{-6} 以下になったら止める」という停止規則を使うとき、真の解との誤差が $\frac{\beta}{1-\beta} \times 10^{-6}$ 以下であることを保証します。

図 5.2　縮小写像と不動点への収束



$T(x) = 0.55x + 0.9$（係数 $\beta = 0.55$、不動点 $x^* = 2$）。(b) は $x_0 = 0.2$ から出発した反復 $x_{n+1} = Tx_n$。

図の読み方

1. (a) 黒の直線が写像 T です。横軸上の2点 x, y の距離（横の両矢印）に比べて、その像 Tx, Ty の距離（縦の両矢印）は $\beta = 0.55$ 倍に縮んでいます。傾きの絶対値が 1 より小さい写像は、どの2点の距離も一様に縮めます。
2. (b) 青の折れ線は、x_0 から T を繰り返し施した列です。45度線との交点 x^*（$Tx^* = x^*$）に、毎回およそ β 倍の速さで近づきます。第1章の45度線図と同じ読み方です。
3. 関数の空間でも、図は描けませんが起きていることは同じです。「点」が関数、「距離」が上限ノルムになるだけで、反復の列は不動点である関数に一様収束します。

補足：経済学での使いどころ

ベルマン方程式の解（価値関数）の存在と一意性、価値関数反復の収束と停止規則の正当化は、すべてこの定理から出ます（次の章）。第7章（確率過程）では、マルコフ連鎖の定常分布の存在と一意性を、分布の空間の上の縮小写像として証明します（定理 7.7）。微分方程式の解の存在と一意性（定理 3.2）も、この定理で証明できます（この章の最後の発展枠）。

不動点が「どんな性質をもつか」を調べるには、次の系が便利です。

系 5.9（不動点の性質を引き継ぐ）

定理 5.8 の仮定のもとで、$S'' \subset S'$ を閉集合とし、T が S'' を S'' の中に写す（$T(S'') \subset S''$）とする。このとき、不動点 x^* は S'' に入る。さらに、$S''' \subset S''$ が、$T(S'') \subset S'''$ を満たすならば、$x^* \in S'''$ である。

証明　T を S'' に制限すると、S'' は完備な空間の閉集合で、T はそこでも縮小写像なので、定理 5.8 から S'' の中に不動点があります。S' の不動点はただ一つなので、それが x^* です。後半は、$x^* \in S''$ と $x^* = Tx^* \in T(S'') \subset S'''$ から従います。　□

数式の読み方：系の使い方

たとえば $S' = C(X)$、S'' =「単調増加な関数の全体」（閉集合）、S''' =「狭義に単調増加な関数の全体」（閉集合ではない）とします。「T は単調増加な関数を狭義に単調増加な関数に写す」ことさえ示せば、価値関数（T の不動点）が狭義に単調増加であると結論できます。S''' 自身は閉集合でなくてもよい、という点が実際の応用では重要です（閉集合でないので、S''' の中で直接縮小写像の原理を使うことはできません）。

5.5　ブラックウェルの十分条件

写像 T が縮小写像であることを、定義どおりに $\|Tf - Tg\|$ を計算して確かめるのは、T に最大化が含まれていると面倒です。次の条件を使うと、計算をほとんどせずに確かめられます。

定理 5.10（ブラックウェルの十分条件）

$X \subset \mathbb{R}^n$ とし、$T : B(X) \to B(X)$ が次の2つの条件を満たすとする。

1. （単調性）$f, g \in B(X)$ がすべての $x \in X$ で $f(x) \le g(x)$ を満たすならば、すべての x で $(Tf)(x) \le (Tg)(x)$。
2. （割引）ある $\beta \in [0, 1)$ があって、すべての $f \in B(X)$、定数 $a \ge 0$、$x \in X$ について
$$\big(T(f + a)\big)(x) \le (Tf)(x) + \beta a.$$
ここで $f + a$ は、関数 f に定数 a を足した関数を表す。

このとき、T は係数 β の縮小写像である。

証明のアイデア

f と g の距離が $\|f - g\|$ なら、$f \le g + \|f - g\|$ です。単調性で T を両辺に施し、割引で定数の部分を β 倍に縮めると、$Tf \le Tg + \beta\|f - g\|$ が出ます。f と g を入れかえて同じことをすれば、両側から抑えられます。

証明　$f, g \in B(X)$ をとります。上限ノルムの定義から、すべての x で $f(x) \le g(x) + \|f - g\|$

です。したがって

$$\begin{aligned}(Tf)(x) &\le \big(T(g+\|f-g\|)\big)(x) && \text{（単調性（}f \le g+\|f-g\|\text{））}\\ &\le (Tg)(x)+\beta\|f-g\| && \text{（割引（}a=\|f-g\|\text{））}\end{aligned}$$

です。f と g の役割を入れかえると $(Tg)(x) \le (Tf)(x)+\beta\|f-g\|$ も得られます。2つを合わせると、すべての x で $|(Tf)(x)-(Tg)(x)| \le \beta\|f-g\|$ なので、上限をとって $\|Tf-Tg\| \le \beta\|f-g\|$ です。 □

計算例：ベルマン方程式の写像が縮小写像であること

X 上の有界な関数 f に対して

$$(Tf)(x) = \sup_{y\in\Gamma(x)} \big\{F(x,y)+\beta f(y)\big\}$$

と定めます（F は有界、$\Gamma(x)$ は空でない、$0<\beta<1$）。F と f が有界なので Tf も有界で、T は $B(X)$ から $B(X)$ への写像です。 まず単調性です。$f \le g$ とすると、

$$\begin{aligned}F(x,y)+\beta f(y) &\le F(x,y)+\beta g(y) && \text{（各 } y \text{ で成り立つ）}\\ (Tf)(x) &\le (Tg)(x) && \text{（} y \text{ について上限をとる）}\end{aligned}$$

です。次に割引です。

$$\begin{aligned}\big(T(f+a)\big)(x) &= \sup_{y\in\Gamma(x)} \big\{F(x,y)+\beta f(y)+\beta a\big\}\\ &= \sup_{y\in\Gamma(x)} \big\{F(x,y)+\beta f(y)\big\}+\beta a && \text{（} a \text{ は } y \text{ によらない）}\\ &= (Tf)(x)+\beta a && \text{（} Tf \text{ の定義）}\end{aligned}$$

2つの条件が満たされるので、T は係数 β の縮小写像です。実際の計算は2行で済みました。この結果を次の章の出発点にします。

補足：経済学での使いどころ

ベルマン方程式の写像のほかにも、「来期の価値を β で割り引いて今期に足す」形の写像はすべて、同じ2行でブラックウェルの条件を確かめられます。資産価格の式 $p=\beta\,\mathrm{E}[d'+p']$ を価格関数についての写像とみなしたもの、サーチモデルの留保賃金の式、ゲーム理論の繰り返しゲームにおける継続利得の式などがその例です。

5.6 縮小写像の原理の限界と、その先

縮小写像の原理は、存在・一意性・計算方法を一度に与える強力な道具ですが、使うには「T が有界な関数の空間を自分自身に写す」ことが必要です。次の章で見るように、対数効用のように効用が下に有界でない場合には、この条件が破れます。その場合には、状態変数の範囲を区切って有界にする、重みを付けたノルムを使う、といった工夫が必要になります。本書では、有界な場合の理論を完全に述べ、有界でない場合は結果だけを紹介します。

発展：微分方程式の解の存在と一意性（定理 3.2）の証明

第3章で約束した、ピカール＝リンデレフの定理の証明です。初期値問題 $\dot{x} = f(x)$、$x(0) = x_0$ を考えます（$f : U \to \mathbb{R}^n$ は局所リプシッツ連続、U は開集合）。

ステップ1：積分方程式に直す。 $x(t)$ が $[-h, h]$ 上の解であることは、両辺を 0 から t まで積分して得られる

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(x(s)\big)\,\mathrm{d}s \qquad (t \in [-h, h])$$

を満たす連続関数であることと同値です（右辺は t について微分可能で、微分すると $f(x(t))$ になります）。したがって、連続関数の空間の上の写像

$$(Px)(t) = x_0 + \int_0^t f\big(x(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

の不動点を探せばよいことになります。これを**ピカールの写像**といいます。

ステップ2：空間を選ぶ。 x_0 を中心とする閉じた球 $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\}$ を、U に含まれ、その上で f がリプシッツ定数 L をもつように小さくとります。f は連続なので、$\bar{B}$ 上で $\|f(x)\| \le M$ となる M があります。$h > 0$ を $hM \le r$ かつ $hL \le \frac{1}{2}$ となるようにとり、

$$S' = \big\{x \in C([-h, h]) :\ \|x(t) - x_0\| \le r \text{ がすべての } t \text{ で成り立つ}\big\}$$

とおきます。S' は、完備な空間 $C([-h, h])$（$\mathbb{R}^n$ に値をとる連続関数の空間。定理 5.6 と同じ証明で完備です）の閉集合です。

ステップ3：P は S' を S' に写す。 $x \in S'$ なら、$\|(Px)(t) - x_0\| \le \int_0^{|t|} \|f(x(s))\|\,\mathrm{d}s \le hM \le r$ です。また Px は連続です。

発展：微分方程式の解の存在と一意性の証明（続き）

ステップ4：P は縮小写像である。 $x, y \in S'$ に対して

$$\begin{aligned} \|(Px)(t) - (Py)(t)\| &\leq \int_0^{|t|} \left\| f(x(s)) - f(y(s)) \right\| \mathrm{d}s && \text{（積分の三角不等式）} \\ &\leq \int_0^{|t|} L \, \|x(s) - y(s)\| \, \mathrm{d}s && \text{（リプシッツ条件）} \\ &\leq hL \, \|x - y\| \leq \tfrac{1}{2} \|x - y\| && \text{（上限ノルムで抑えて積分）} \end{aligned}$$

です。t について上限をとると $\|Px - Py\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$ で、P は係数 $\frac{1}{2}$ の縮小写像です。

ステップ5：結論。 定理 5.8 より、P は S' にただ一つの不動点をもちます。これが $[-h, h]$ 上の解の存在です。S' の中での一意性も同時に得られます。S' に入らない解がないことは、解が連続で $x(0) = x_0$ なので、0 の近くの短い区間では必ず $\bar{B}$ の中にあることから分かります（必要なら h を小さくとり直します）。

ステップ6：共通の区間での一意性。 2つの解 x, y が区間 $[0, b]$ の上で定義されているとします。$t^* = \sup\{t \in [0, b] : \ [0, t] \text{ 上で } x = y\}$ とおくと、ステップ5より $t^* > 0$ です。$t^* < b$ とすると、連続性から $x(t^*) = y(t^*)$ で、この点を初期値とみなしてステップ1〜5を適用すると、t^* の先の短い区間でも $x = y$ となり、t^* の定め方に反します。よって $t^* = b$、つまり $[0, b]$ 全体で $x = y$ です。負の方向も同じです。

この証明の筋（積分方程式に直す、適当な関数空間をとる、縮小写像の原理を使う）は、確率微分方程式の解の存在と一意性の証明でも、そのまま使われます。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 上限ノルムと完備性：価値関数反復、政策関数反復など、「関数の列を作って極限をとる」すべての数値解法の収束の根拠。
- 縮小写像の原理：ベルマン方程式の解の存在と一意性、マルコフ連鎖の定常分布の存在と一意性、微分方程式の解の存在と一意性、繰り返しゲームの継続利得の式。
- 誤差の評価：数値計算の停止規則と、近似解の精度の保証。
- ブラックウェルの十分条件：割引のある再帰的な式が出てきたら、まず「単調性」と「割引」の2つを確かめる。

要点

- 関数の集まりは、和と定数倍をもつベクトル空間とみなせる。上限ノルム $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ で距離を測ると、有界関数の空間 $B(X)$ と有界連続関数の空間 $C(X)$ は完備になる（コーシー列は必ず収束する）。
- 完備な空間の閉集合の上の縮小写像（$\|Tx - Ty\| \leq \beta\|x - y\|$、$\beta < 1$）には、ただ一つの不動点が存在し、どこから出発しても反復 $x_{n+1} = Tx_n$ はそこに収束する。誤差は β^n の速さで縮む。
- 不動点が閉集合 S'' に入ることは、「T が S'' を S'' に写す」ことから分かる（系 5.9）。
- 単調性と割引の2条件（ブラックウェルの十分条件）を満たす写像は縮小写像である。ベルマン方程式の写像はこの条件を満たす。

次の章へ　次の章では、この章の道具をベルマン方程式に当てはめます。価値関数の存在・一意性・連続性が縮小写像の原理から、単調性と凹性が系 5.9 から導かれ、そのうえで微分可能性とオイラー方程式、横断性条件の必要性までを証明します。

大学院とのつながり　「未知の関数についての方程式を、関数空間の上の不動点問題として解く」という見方は、動的計画法だけでなく、合理的期待均衡の価格関数、異質的家計モデルの定常分布、連続時間の確率的なモデルにも共通する、大学院マクロの基本的な考え方です。

第6章

動的計画法：ベルマン方程式

ここまでの流れ　第1章では、無限期間の問題を「すべての期の消費をまとめて選ぶ」ラグランジュ法で解き、オイラー方程式と横断性条件が最適性の十分条件であることを証明しました。第4章では、同じ問題を連続時間のハミルトニアンで解きました。第5章では、関数を未知数とする方程式を解く道具として、縮小写像の原理を用意しました。

前提知識　第1章のオイラー方程式・横断性条件（定理 1.10）と差分方程式の安定性（定理 1.6）。第5章の縮小写像の原理（定理 5.8）、系 5.9、ブラックウェルの十分条件（定理 5.10）。コンパクト集合、対応の連続性（上半連続・下半連続）とベルジュの最大値定理、凹関数と接線の不等式（ミクロ版の「連続性・最大値定理・対応」「凸性と分離超平面定理」の章）。

この章の問い　無限期間の問題を「今期の選択」と「来期以降の最適な価値」の2つに分けて考えると、何が見えてくるのでしょうか。その分け方が正しいこと、価値関数が存在して一つに決まること、価値関数が微分できて包絡線条件が使えることは、どう証明されるのでしょうか。

この章で分かること　価値関数と再帰的な考え方、ベルマン方程式、逐次問題と再帰問題の同値性（最適性の原理）、価値関数の存在・一意性・連続性（証明）、単調性と凹性、政策関数の一意性と連続性、価値関数の微分可能性（ベンヴェニスト＝シャインクマンの定理）と包絡線条件、オイラー方程式と横断性条件の十分性と必要性、推測と確認による解法、価値関数反復、ハミルトニアンとの関係。

6.1　再帰的な考え方

離散時間の最適成長モデルを、今度は次のように考えます。

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t, \quad k_0 \text{ は所与.} \tag{6.1}$$

この問題の最大値は、出発点の資本 k_0 だけで決まります。そこで、最大値を k_0 の関数とみなして $V(k_0)$ と書き、**価値関数**と呼びます。

ここで、大事な観察をします。時点1に立ったときに残っている問題は、「資本 k_1 から出発して、$t = 1, 2, \ldots$ の効用の割引和を最大にする問題」で、これは出発点が k_1 に変わっただけで、元の問題と**まったく同じ形**をしています。したがって、その最大値は $V(k_1)$ で

す。すると、時点0の問題は

$$V(k_0) = \max_{k_1} \Big\{ u\big(f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1\big) + \beta V(k_1) \Big\} \tag{6.2}$$

と、「今期の効用」＋「来期の資本から得られる最適な価値（を割り引いたもの）」の最大化に書き直せます。

用語の説明：再帰性・最適性の原理

- **再帰的**（recursive）：問題の中に、同じ形の小さな問題が含まれていること。無限期間の問題は、1期進んでも同じ形の問題が残るので、再帰的に書けます。
- **最適性の原理**（ベルマン）：最適な計画の「残りの部分」は、その時点から見ても最適になっている。だから、来期以降については「最適に行動する」と仮定して、その価値 $V(k_1)$ だけを考えればよいのです。この主張は、この章で定理として証明します（定理 6.6）。
- **動的計画法**：この原理を使って、多期間の問題を「2期間の問題の繰り返し」に分解する方法。

6.2 有限期間の問題と後ろ向き帰納法

再帰的な考え方は、期間が有限の問題で最もはっきり分かります。大きさ W のケーキを、残り $n+1$ 期（n 期後に世界が終わる）で食べる問題

$$\max \sum_{t=0}^{n} \beta^t \ln c_t \quad \text{s.t.} \quad W_{t+1} = W_t - c_t, \quad W_{t+1} \geq 0$$

を考え、残り期間が n のときの最大値を $V_n(W)$ と書きます。**最後の期から順に、前にさかのぼって**解いていきます（**後ろ向き帰納法**）。

数式の読み方：最後の期から順に解く

$$
\begin{aligned}
V_0(W) &= \ln W && \text{（最後の期：全部食べる（}c=W\text{））}\\
V_1(W) &= \max_{c}\bigl\{\ln c + \beta V_0(W-c)\bigr\} && \text{（残り2期）}\\
\frac{1}{c} &= \frac{\beta}{W-c} \;\Rightarrow\; c = \frac{W}{1+\beta} && \text{（}V_0=\ln\text{ を使った一階条件）}\\
V_1(W) &= (1+\beta)\ln W + (\text{定数}) && \text{（代入して }\ln W\text{ の項を集める）}
\end{aligned}
$$

同じ計算を繰り返すと、$V_n(W) = (1+\beta+\cdots+\beta^n)\ln W + (\text{定数})$、最適な消費は

$$c = \frac{W}{1+\beta+\cdots+\beta^n} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{n+1}}\,W$$

となります（命題 1.2 の等比級数の和）。残り期間が長いほど、今期食べる割合は小さくなります。

数式の読み方：無限期間への極限

$n\to\infty$ とすると $\beta^{n+1}\to 0$ なので、$c=(1-\beta)W$、$V(W)=\frac{1}{1-\beta}\ln W+(\text{定数})$。第1章の計算例（対数効用の場合）で、オイラー方程式と横断性条件から求めた答え（資産の $1-\beta$ の割合を消費する）と一致します。ここで重要なのは、無限期間では「残り期間」がいつも無限で変わらないため、V_n の添字 n が消え、どの期にも**同じ関数** V が使える、という点です。これが次の節のベルマン方程式が「添字のない」1本の関数方程式になる理由です。

6.3 ベルマン方程式

時点の添字をとり、今期の変数をそのまま、来期の変数にダッシュ（$'$）を付けて書くと

要点：ベルマン方程式

$$V(k) = \max_{k'}\Bigl\{u\bigl(f(k)+(1-\delta)k-k'\bigr)+\beta V(k')\Bigr\}.$$

最大値を与える k' を $k'=g(k)$ と書き、**政策関数**と呼ぶ。

数式の読み方：ベルマン方程式の読み方

- 左辺と右辺の両方に未知の関数 V があります。ベルマン方程式は、数ではなく**関数 V を未知数とする方程式**（関数方程式）です。第5章の言葉でいえば、右辺の操作を T と書いたときの不動点 $V = TV$ を求める問題です。
- ここでの k' の「$'$」は微分ではなく「来期の値」を表す記号です。微分を表す $V'(k)$ と混同しないよう注意してください。本章では微分は $V'(k)$、来期は k' のように、関数の後ろに付くか変数に付くかで区別します。
- k は**状態変数**（今期の初めに決まっている）、k' は今期選ぶ**制御変数**です（c を選ぶと考えても同じで、予算制約から c と k' は1対1に対応します）。
- 政策関数 $g(k)$ が分かれば、$k_1 = g(k_0)$、$k_2 = g(k_1)$、…と、最適経路全体が第1章の差分方程式として計算できます。

この章では、以下の一般的な形で理論を組み立てます。

定義 6.1（再帰的な最適化問題）

次の4つの組 (X, Γ, F, β) を考える。

1. **状態空間** $X \subset \mathbb{R}^n$。
2. **実行可能対応** $\Gamma : X \rightrightarrows X$。各 $x \in X$ に対して $\Gamma(x)$ は空でなく、来期の状態として選べる値の集合を表す。Γ のグラフを $A = \{(x, y) : x \in X,\ y \in \Gamma(x)\}$ と書く。
3. **利得関数** $F : A \to \mathbb{R}$。今期の状態が x、来期の状態を y に選んだときの今期の利得。
4. **割引因子** $\beta \in (0, 1)$。

$x_0 \in X$ から出発する列 $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ が、すべての t で $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ を満たすとき、**実行可能な計画**といい、その全体を $\Pi(x_0)$ と書く。

数式の読み方：最適成長モデルをこの形に書く

問題 (6.1) では、$X = [0, \bar{k}]$（$\bar{k}$ は $f(k)+(1-\delta)k \le k$ となる十分大きな資本）、$\Gamma(k) = [0,\, f(k) + (1-\delta)k]$、$F(k, k') = u\big(f(k) + (1-\delta)k - k'\big)$ です。消費 c は、k と k' から予算制約で決まるので、変数としては消去されています。家計の消費・貯蓄問題（第1章）では、X は資産の範囲、$\Gamma(a) = [0,\, Ra + y]$、$F(a, a') = u(Ra + y - a')$ です。新しい問題に出会ったら、まず「状態変数は何か（今期の初めに決まっていて、将来に影響する変数）」「来期の状態として何が選べるか」「今期の利得は何か」を確認すると、この形に書けます。状態変数を正しく選ぶことが、動的計画法でいちばん大切な作業です。

補足：制御変数が別にある場合

状態変数 x のほかに制御変数 y があり、来期の状態が $x' = \phi(x, y)$ で決まる問題（例：労働供給と貯蓄を別々に選ぶ家計）も、「来期の状態を選ぶ」形に直せます。y を x' の関数として解き直すか、あるいは (x, y) の組を改めて「選ぶもの」とみなせばよいからです。この章では記号を簡単にするため、来期の状態 $y \in \Gamma(x)$ を直接選ぶ形で書きます。

この章を通じて、次の仮定を置きます。

定義 6.2（有界性の仮定）

F は A の上で有界であるとする。すなわち、ある $M > 0$ があって、すべての $(x, y) \in A$ で $|F(x, y)| \leq M$。

この仮定のもとで、実行可能な計画 $\pi = \{x_t\}$ の割引利得の和

$$u(\pi) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

は、各項の絶対値が $\beta^t M$ 以下なので、必ず収束します（命題 1.2）。対数効用のように、この仮定を満たさない重要な例があることは、あとで（6.12節）扱います。

6.4 逐次問題と再帰問題の同値性

もとの問題（**逐次問題**）の価値関数と、ベルマン方程式（**再帰問題**）の解が、本当に同じものであることを証明します。

定義 6.3（逐次問題の価値関数）

$$v^*(x_0) = \sup_{\pi \in \Pi(x_0)} u(\pi) = \sup_{\pi \in \Pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

を逐次問題の**価値関数**という。$u(\pi^*) = v^*(x_0)$ となる計画 $\pi^* \in \Pi(x_0)$ を**最適な計画**という。

最大値が達成されるかどうかはまだ分からないので、max ではなく sup（上限）で定義しています。有界性の仮定から、すべての x_0 で $|v^*(x_0)| \leq M/(1-\beta)$ です。

定理 6.4（逐次問題の価値関数はベルマン方程式を満たす）

有界性の仮定のもとで、v^* は有界で、すべての $x \in X$ について

$$v^*(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta v^*(y)\} \tag{6.3}$$

を満たす。

証明のアイデア

x_0 から出発する計画は、「最初の1歩 x_1」と「x_1 から出発する計画」に分解できます。x_1 以降を最適にすれば $v^*(x_1)$ が得られるので、全体の価値は「最初の1歩の利得 $+\beta v^*(x_1)$」を x_1 について最大化したものになります。証明では、「どの計画もこれを超えない」と「これにいくらでも近づける」の両方向を示します。

証明

方針　任意の計画の価値が式 (6.3) の右辺以下であること（$\le$）と、右辺にいくらでも近い価値をもつ計画があること（$\ge$）を示します。

ステップ1　計画の分解

$x_0 \in X$ をとり、$\pi = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \Pi(x_0)$ を任意の実行可能な計画とします。$\pi' = (x_1, x_2, \dots)$ は x_1 から出発する実行可能な計画で、$\pi' \in \Pi(x_1)$ です。和を1項目とそれ以降に分けると、

$$\begin{aligned} u(\pi) &= F(x_0, x_1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) && \text{（1項目を分ける）} \\ &= F(x_0, x_1) + \beta\, u(\pi') && \text{（}\beta\text{ でくくる）} \end{aligned}$$

です。

ステップ2　$v^*(x_0) \le$ 右辺

ステップ1と $u(\pi') \le v^*(x_1)$ より、$u(\pi) \le F(x_0,x_1) + \beta v^*(x_1) \le \sup_{y \in \Gamma(x_0)}\{F(x_0,y) + \beta v^*(y)\}$ です。これがすべての $\pi \in \Pi(x_0)$ で成り立つので、左辺の上限をとって $v^*(x_0) \le$ 右辺です。

ステップ3　$v^*(x_0) \ge$ 右辺

$y \in \Gamma(x_0)$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとります。上限の定義から、$u(\pi') \ge v^*(y) - \varepsilon$ となる $\pi' \in \Pi(y)$ があります。$\pi = (x_0, \pi')$ は x_0 から出発する実行可能な計画なので、ステップ1より

$$v^*(x_0) \ge u(\pi) = F(x_0,y) + \beta u(\pi') \ge F(x_0,y) + \beta v^*(y) - \beta\varepsilon$$

です。ε は任意なので $v^*(x_0) \geq F(x_0, y) + \beta v^*(y)$ で、y について上限をとれば $v^*(x_0) \geq$ 右辺です。 □

逆に、ベルマン方程式を満たす関数は、ただ一つに決まり、それは v^* に一致します。

定理 6.5（ベルマン方程式の有界な解は逐次問題の価値関数である）

有界性の仮定のもとで、有界な関数 $v : X \to \mathbb{R}$ が式 (6.3) を満たすならば、$v = v^*$ である。

証明　有界関数の空間 $B(X)$ の上で $(Tf)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta f(y)\}$ とおくと、第5章の計算例（ブラックウェルの十分条件の直後）で確かめたように、T は $B(X)$ の上の係数 β の縮小写像です。定理 5.8 より、T の不動点は $B(X)$ の中にただ一つです。定理 6.4 より v^* はその不動点で、仮定より v も不動点なので、$v = v^*$ です。 □

数式の読み方：なぜ「有界」が必要か

ベルマン方程式には、有界でない解が存在することがあります。たとえば、$X = \mathbb{R}_+$、$F \equiv 0$、$\Gamma(x) = \{x/\beta\}$（状態が毎期 $1/\beta$ 倍になる）という問題では、価値関数は $v^* \equiv 0$ ですが、$v(x) = cx$（c は任意の定数）もベルマン方程式 $v(x) = \beta v(x/\beta)$ を満たします。第1章の資産価格の式（定理 1.5）で、有界な解だけがファンダメンタル価値になり、バブル解が除かれたのと同じ構造です。「有界」という条件が、無数の解の中から正しい価値関数を選び出しています。

最適性の原理を、定理の形で述べます。

定理 6.6（最適性の原理：最適な計画の特徴づけ）

有界性の仮定のもとで、実行可能な計画 $\pi^* = \{x_t^*\} \in \Pi(x_0)$ が最適であることは、すべての $t \geq 0$ について

$$v^*(x_t^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta v^*(x_{t+1}^*) \tag{6.4}$$

が成り立つこと、すなわち各期の選択 x_{t+1}^* がベルマン方程式の右辺の上限を達成することと同値である。

証明のアイデア

「各期で最大化を達成する」計画は、ベルマン方程式を n 回展開すると $v^*(x_0) = \sum_{t<n} \beta^t F + \beta^n v^*(x_n^*)$ となり、最後の項が割引で消えるので $v^*(x_0) = u(\pi^*)$ です。逆に、最適な計画がどこかの期で最大化を達成していなければ、その期以降を取りかえてより良い計画が作れるはずで、最適性に反します。この逆向きの議論が「残りの部分も最適である」という最適性の原理の中身です。

証明

ステップ1　式 (6.4) が成り立てば最適

式 (6.4) を $t = 0, 1, \dots, n-1$ について順に代入すると

$$v^*(x_0) = \sum_{t=0}^{n-1} \beta^t F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta^n v^*(x_n^*)$$

です。v^* は有界なので、$|\beta^n v^*(x_n^*)| \leq \beta^n M/(1-\beta) \to 0$ です。$n \to \infty$ として $v^*(x_0) = u(\pi^*)$、つまり π^* は最適です。

ステップ2　最適ならば式 (6.4) が成り立つ

π^* を最適とし、$\pi^{*\prime} = (x_1^*, x_2^*, \dots) \in \Pi(x_1^*)$ とおきます。定理 6.4 の証明のステップ1と、$u(\pi^{*\prime}) \leq v^*(x_1^*)$、式 (6.3) を順に使うと

$$\begin{aligned} v^*(x_0) = u(\pi^*) &= F(x_0, x_1^*) + \beta u(\pi^{*\prime}) && \text{（最適性と計画の分解）} \\ &\leq F(x_0, x_1^*) + \beta v^*(x_1^*) && \text{（}u(\pi^{*\prime}) \leq v^*(x_1^*)\text{）} \\ &\leq v^*(x_0) && \text{（ベルマン方程式 (6.3)）} \end{aligned}$$

です。両端が等しいので、途中の不等号はすべて等号です。1つ目の等号から $u(\pi^{*\prime}) = v^*(x_1^*)$、つまり $\pi^{*\prime}$ は x_1^* から出発する最適な計画です。2つ目の等号が、$t = 0$ での式 (6.4) です。$\pi^{*\prime}$ が最適なので、同じ議論を x_1^* から出発して繰り返せば、すべての t で式 (6.4) が成り立ちます。 □

補足：経済学での使いどころ

定理 6.6 は、「最適な計画を求めるには、ベルマン方程式を解いて政策関数を求め、それを毎期当てはめればよい」ことの正当化です。この定理のおかげで、無限個の変数をもつ逐次問題を、2期間の最大化問題の繰り返しに置きかえて解くことができます。ステップ2の「最適な計画の残りの部分は、その時点から見ても最適である」という性質が、ベルマンの最適性の原理そのものです。

6.5　価値関数の存在・一意性・連続性

定理 6.4 は、価値関数 v^* がベルマン方程式を満たすことを示しましたが、v^* がどんな関数か（連続か、最大値は達成されるか）はまだ分かりません。この節では、連続性とコンパクト性の仮定を加えて、価値関数の性質を縮小写像の原理から導きます。

定義 6.7（連続性の仮定）

1. $X \subset \mathbb{R}^n$ は閉集合である。
2. 対応 $\Gamma : X \rightrightarrows X$ は、各 x で空でないコンパクトな値をとり、連続（上半連続かつ下半連続）である。
3. $F : A \to \mathbb{R}$ は有界で連続である。

用語の説明：対応の連続性とベルジュの最大値定理

対応 Γ が**上半連続**であるとは、$x_n \to x$、$y_n \in \Gamma(x_n)$ ならば、$\{y_n\}$ が $\Gamma(x)$ の点に収束する部分列をもつことです（値がコンパクトな場合の定義）。**下半連続**であるとは、$x_n \to x$ と $y \in \Gamma(x)$ に対して、$y_n \in \Gamma(x_n)$ かつ $y_n \to y$ となる列がとれることです。両方を満たすとき**連続**といいます。**ベルジュの最大値定理**は、「Γ が空でないコンパクトな値をとる連続な対応で、$h(x,y)$ が連続ならば、最大値 $m(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} h(x,y)$ は x の連続関数で、最大化点の集合 $G(x) = \arg\max_{y \in \Gamma(x)} h(x,y)$ は空でないコンパクトな値をとる上半連続な対応である」という定理です。ミクロ版の「連続性・最大値定理・対応」の章で証明しています。

定理 6.8（価値関数の存在・一意性・連続性）

連続性の仮定のもとで、次が成り立つ。

1. $C(X)$ 上の写像
$$(Tf)(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \bigl\{ F(x,y) + \beta f(y) \bigr\}$$
は $C(X)$ から $C(X)$ への係数 β の縮小写像であり、ただ一つの不動点 $v \in C(X)$ をもつ。
2. $v = v^*$。すなわち、逐次問題の価値関数は有界連続で、ベルマン方程式の右辺の上限は最大値として達成される。
3. 任意の $v_0 \in C(X)$ から始めて $v_{n+1} = Tv_n$ と定めると、$\|v_n - v^*\| \le \beta^n \|v_0 - v^*\|$。
4. 政策対応 $G(x) = \arg\max_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta v^*(y)\}$ は、空でないコンパクトな値をとり、上半連続である。

証明のアイデア

ベルジュの最大値定理が「T は連続関数を連続関数に写す」を、ブラックウェルの十分条件が「T は縮小写像である」を、縮小写像の原理が「不動点がただ一つ存在し、反復で求まる」を、それぞれ担当します。3つの定理をつなぐだけで、証明はほぼ終わります。

証明

ステップ1　T は $C(X)$ を $C(X)$ に写す

$f \in C(X)$ とします。$h(x,y) = F(x,y) + \beta f(y)$ は A 上で連続で、Γ は空でないコンパクトな値をとる連続な対応なので、ベルジュの最大値定理より最大値は存在し、Tf は連続です。また $|(Tf)(x)| \le M + \beta\|f\|$ なので有界です。よって $Tf \in C(X)$ です。

ステップ2　縮小写像であること

第5章の計算例で確かめたとおり、T は単調性と割引の条件を満たすので、定理 5.10 より係数 β の縮小写像です。$C(X)$ は完備（定理 5.6）なので、定理 5.8 より、T は $C(X)$ にただ一つの不動点 v をもち、主張3の評価が成り立ちます。

ステップ3　$v = v^*$

v は有界で式 (6.3) を満たすので、定理 6.5 より $v = v^*$ です。

ステップ4　政策対応

ベルジュの最大値定理を $h(x,y) = F(x,y) + \beta v^*(y)$ に適用すれば、主張4が得られます。

□

補足：経済学での使いどころ

最適成長モデル、家計の消費・貯蓄問題、企業の投資問題、サーチモデルなど、「有界な利得を割り引いて足す」形のすべての問題で、価値関数が存在してただ一つに決まり、連続であることがこの定理で保証されます。主張3は、価値関数反復（6.11節）が必ず収束することと、その速さを与えます。主張4から、政策関数が（一意なら）連続であること、したがって最適経路が初期条件に連続的に依存することが分かります。

6.6　価値関数の単調性と凹性

価値関数が存在すると分かったので、次はその形を調べます。「利得が状態変数について増加なら価値関数も増加」「利得が凹なら価値関数も凹」という、直観的に当然に思える性質を証明します。証明の型はどちらも同じで、「望む性質をもつ関数の集合は $C(X)$ の閉集合で、T はその集合を自分自身に写す」ことを示し、系 5.9 を使います。以下、$\mathbb{R}^n$ の順序は成分ごとに比べるものとし、$x \le x'$ かつ $x \ne x'$ を $x < x'$ と書きます。

定理 6.9（価値関数の単調性）

連続性の仮定に加えて、次を仮定する。

1. 各 y について、$F(\cdot, y)$ は x について狭義に増加である（$x < x'$ ならば $F(x,y) < F(x',y)$）。
2. Γ は単調である：$x \le x'$ ならば $\Gamma(x) \subset \Gamma(x')$。

このとき、v^* は狭義に増加である。

証明　$C(X)$ の部分集合として、S'' =「有界連続で（弱い意味で）増加な関数の全体」、S''' =「有界連続で狭義に増加な関数の全体」をとります。S'' は閉集合です。$f_n \in S''$ が f に一様収束すれば、$x \le x'$ に対して $f_n(x) \le f_n(x')$ の極限をとって $f(x) \le f(x')$ となるからです。系 5.9 により、$T(S'') \subset S'''$ を示せば十分です。

$f \in S''$ と $x < x'$ をとり、$y^* \in \Gamma(x)$ を x での最大化点とします。仮定2より $y^* \in \Gamma(x')$ でもあるので、

$$
\begin{aligned}
(Tf)(x) &= F(x,y^*) + \beta f(y^*) && (y^* \text{ は } x \text{ での最大化点}) \\
&< F(x',y^*) + \beta f(y^*) && (\text{仮定1}) \\
&\le \max_{y \in \Gamma(x')} \{F(x',y) + \beta f(y)\} = (Tf)(x') && (y^* \in \Gamma(x') \text{ は候補の一つ})
\end{aligned}
$$

です。よって Tf は狭義に増加で、$Tf \in S'''$ です。　□

数式の読み方：仮定の確かめ方

最適成長モデルでは、$F(k,k') = u(f(k) + (1-\delta)k - k')$ は、$u' > 0$ と $f' > 0$ から k について狭義に増加です。$\Gamma(k) = [0, f(k) + (1-\delta)k]$ は、k が大きいほど区間が広がるので単調です。したがって、資本が多いほど生涯効用は高い、という当然の性質が証明されました。この性質は、あとで横断性条件の必要性を示すときに $v^{*\prime} \ge 0$ として使います。

定理 6.10（価値関数の凹性と政策関数）

連続性の仮定に加えて、次を仮定する。

1. X は凸集合である。
2. Γ のグラフ A は凸集合である。すなわち、$y \in \Gamma(x)$、$y' \in \Gamma(x')$、$\theta \in [0,1]$ ならば、$\theta y + (1-\theta)y' \in \Gamma(\theta x + (1-\theta)x')$。
3. F は A 上の凹関数で、$x \neq x'$ のときは狭義の不等式が成り立つ：$(x,y),(x',y') \in A$、$x \neq x'$、$\theta \in (0,1)$ に対して

$$F\big(\theta(x,y)+(1-\theta)(x',y')\big) > \theta F(x,y) + (1-\theta)F(x',y').$$

このとき、v^* は狭義凹関数であり、政策対応 G は1点からなる（$G(x) = \{g(x)\}$）。この政策関数 $g : X \to X$ は連続である。

証明のアイデア

凹関数の空間は閉集合で、T はそれを狭義凹関数に写します。「2つの状態 x, x' での最適な選択を混ぜたもの」が、グラフの凸性によって、混ぜた状態 x_θ で実行可能であることが鍵です。v^* が狭義凹なら、$F(x,y) + \beta v^*(y)$ は y について狭義凹なので、最大化点は1つしかありません。

証明

ステップ1　v^* の凹性

$S'' =$「有界連続な凹関数の全体」、$S''' =$「有界連続な狭義凹関数の全体」とおきます。S'' が閉集合であることは、定理 6.9 と同じく、凹性の不等式が各点での極限で保たれることから分かります。$f \in S''$ と、$x_0 \neq x_1$、$\theta \in (0,1)$ をとり、$x_\theta = \theta x_0 + (1-\theta)x_1$ とおきます。$y_i \in \Gamma(x_i)$ を x_i での最大化点（$i = 0, 1$）、$y_\theta = \theta y_0 + (1-\theta)y_1$ とすると、仮定2より $y_\theta \in \Gamma(x_\theta)$ です。したがって

$$\begin{aligned}
(Tf)(x_\theta) &\geq F(x_\theta, y_\theta) + \beta f(y_\theta) && (y_\theta \text{ は } x_\theta \text{ での候補の一つ}) \\
&> \theta F(x_0,y_0) + (1-\theta)F(x_1,y_1) + \beta f(y_\theta) && (\text{仮定3（}x_0 \neq x_1\text{）}) \\
&\geq \theta F(x_0,y_0) + (1-\theta)F(x_1,y_1) \\
&\quad + \beta\big[\theta f(y_0) + (1-\theta) f(y_1)\big] && (f \text{ の凹性}) \\
&= \theta (Tf)(x_0) + (1-\theta)(Tf)(x_1) && (y_i \text{ は } x_i \text{ での最大化点})
\end{aligned}$$

です。よって $T(S'') \subset S'''$ で、系 5.9 より $v^* \in S'''$ です。

ステップ2　政策関数の一意性と連続性

x を固定します。$y \mapsto F(x,y) + \beta v^*(y)$ は、凹関数と狭義凹関数の（正の係数による）和なので、$\Gamma(x)$ 上の狭義凹関数です。狭義凹関数の最大化点は、あっても1つです（2つあれば、その中点での値がより大きくなります）。よって $G(x)$ は1点 $\{g(x)\}$ からなります。定理 6.8 より G は上半連続で、1点の値をとる上半連続な対応は連続関数なので（$x_n \to x$ のとき、$g(x_n)$ のどの部分列も $g(x)$ に収束する部分列をもつので、$g(x_n) \to g(x)$）、g は連続です。　□

数式の読み方：仮定の確かめ方

最適成長モデルでは、u が凹で $u' > 0$、f が狭義凹なら、$F(k,k') = u(f(k) + (1-\delta)k - k')$ は凹関数で、今期の資本が異なる2点については狭義の不等式を満たします（k について狭義凹な $f(k) + (1-\delta)k - k'$ に、増加な凹関数 u を合成したもの）。Γ のグラフ $\{(k,k') : 0 \le k' \le f(k) + (1-\delta)k\}$ は、f が凹なので凸集合です。したがって価値関数は狭義凹で、政策関数 $g(k)$ は一つに決まる連続関数です。

補足：経済学での使いどころ

政策関数が一価で連続であることは、「最適な貯蓄は資本の連続関数」という、比較静学や数値計算の前提です。価値関数の凹性は、次の節の微分可能性の証明で中心的な役割を果たすほか、不確実性のある問題で「予備的貯蓄」を議論するときにも使います。

6.7　価値関数の微分可能性と包絡線条件

ベルマン方程式からオイラー方程式を導くには、$V'(k)$ を使います。しかし、価値関数が微分できることは、ここまでの定理からは出てきません（連続で凹であることまでは分かっています）。この節では、1変数の状態（$X \subset \mathbb{R}$ が区間）の場合に、価値関数の微分可能性を証明します。

定理 6.11（ベンヴェニスト＝シャインクマンの補題）

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間、$v : I \to \mathbb{R}$ を凹関数、$x_0 \in I$ とする。x_0 を含むある開区間 $N \subset I$ 上で定義された関数 w が、x_0 で微分可能で、

$$w(x) \le v(x) \ \text{（すべての } x \in N\text{）}, \qquad w(x_0) = v(x_0)$$

を満たすならば、v は x_0 で微分可能で、$v'(x_0) = w'(x_0)$ である。

証明のアイデア

w は v の「下から接する」関数です。凹関数 v は、x_0 で左右の片側微分係数をもち、左の傾きが右の傾き以上です（グラフの折れ方が上に凸なので）。一方、下から接する w の傾きは、右側では v の右の傾き以下、左側では v の左の傾き以上でなければなりません。2つを合わせると、左右の傾きがはさみ撃ちで一致します。

証明

ステップ1　凹関数の片側微分係数

v は凹なので、差分商 $q(h) = \big[v(x_0+h) - v(x_0)\big]/h$ は h について単調減少です（凹関数の割線の傾きは、右に行くほど小さくなります）。したがって、$h \downarrow 0$ の極限（右微分係数 $v'_+(x_0)$）と $h \uparrow 0$ の極限（左微分係数 $v'_-(x_0)$）がともに存在し、$v'_-(x_0) \geq v'_+(x_0)$ です。

ステップ2　はさみ撃ち

$h > 0$ が十分小さいとき、$w(x_0+h) \leq v(x_0+h)$ と $w(x_0) = v(x_0)$ より

$$\frac{w(x_0+h) - w(x_0)}{h} \leq \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}$$

です。$h \downarrow 0$ として $w'(x_0) \leq v'_+(x_0)$ です。$h < 0$ のときは、同じ不等式 $w(x_0+h) - w(x_0) \leq v(x_0+h) - v(x_0)$ を負の h で割るので向きが逆になり、$h \uparrow 0$ として $w'(x_0) \geq v'_-(x_0)$ です。ステップ1と合わせて

$$v'_+(x_0) \geq w'(x_0) \geq v'_-(x_0) \geq v'_+(x_0)$$

となり、すべて等しいので、v は x_0 で微分可能で $v'(x_0) = w'(x_0)$ です。　□

この補題を価値関数に当てはめます。下から接する関数 w として、「x_0 での最適な選択 $g(x_0)$ を、x_0 の近くの x でもそのまま選び続けたときの価値」をとります。

定理 6.12（価値関数の微分可能性）

$X \subset \mathbb{R}$ を区間とし、定理 6.10 の仮定に加えて、F は A の内部で連続微分可能であるとする。x_0 を X の内点、$g(x_0)$ を $\Gamma(x_0)$ の内点とし、x_0 を含むある開区間 N があって、すべての $x \in N$ で $g(x_0) \in \Gamma(x)$ であるとする。このとき v^* は x_0 で微分可能で、

$$v^{*\prime}(x_0) = F_x\big(x_0, g(x_0)\big) \tag{6.5}$$

である（F_x は F の第1変数についての偏微分）。

証明　N 上で $w(x) = F\big(x, g(x_0)\big) + \beta v^*\big(g(x_0)\big)$ とおきます。$g(x_0) \in \Gamma(x)$ なので、$w(x)$ はベルマン方程式の右辺の候補の一つの値であり、$w(x) \leq v^*(x)$ です。また、$g(x_0)$ は x_0 で

の最大化点なので $w(x_0) = v^*(x_0)$ です。w は x_0 で微分可能で $w'(x_0) = F_x(x_0, g(x_0))$ です（F の連続微分可能性）。v^* は凹なので（定理 6.10）、定理 6.11 より結論が従います。□

数式の読み方：定理の読み方

- 式 (6.5) が**包絡線条件**です。「状態変数が少し変わったときの価値の変化は、選択を変えない（$g(x_0)$ のまま）で測った今期の利得の変化に等しい」と読めます。選択を変えることによる効果は、最適化によって打ち消されています。ミクロ版の包絡線定理と同じ内容ですが、ここでは v^* が微分可能であることを仮定せずに結論しています。
- 仮定「x_0 の近くの x でも $g(x_0)$ が選べる」は、最適成長モデルの $\Gamma(k) = [0, f(k) + (1-\delta)k]$ のように $\Gamma(x)$ の端点が x の連続関数で、$g(x_0)$ が端点でなければ満たされます。
- $g(x_0)$ が $\Gamma(x_0)$ の端点（たとえば貯蓄がゼロ）のときは、この定理は使えません。借入制約のある家計の問題では、制約が効く点で価値関数の微分可能性が問題になることがあります。

発展：状態変数が多次元の場合

$X \subset \mathbb{R}^n$ のときも、同じ主張が成り立ちます（v^* は x_0 で微分可能で、勾配は F の第1変数についての勾配 $F_x(x_0, g(x_0))$ に等しい）。証明は、各方向について上の議論を行って方向微分係数を求めたうえで、「凹関数は、すべての偏微分係数をもつ内点で微分可能である」という事実を使います。この事実の証明は凸解析の少し進んだ内容なので、本書では証明しません。

6.8 一階条件・包絡線条件・オイラー方程式

前の節の結果を使って、ベルマン方程式から第1章と同じオイラー方程式を導きます。最適成長モデルで、$c = f(k) + (1-\delta)k - k'$ とおきます。

数式の読み方：一階条件

右辺を k' で微分してゼロとおくと

$$-u'(c)+\beta V'(k')=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u'(c)=\beta V'(k').$$

「今期の消費をあきらめる限界的な損」＝「来期の資本が1単位増えることの価値（割引後）」。この式が使えるのは、V が $k'=g(k)$ で微分可能なとき、すなわち定理 6.12 の仮定が k' で満たされる（$g(k')$ が内点である）ときです。ただし V の形は分からないので、$V'(k')$ を消去する必要があります。

数式の読み方：包絡線条件

定理 6.12 の式 (6.5) を $F(k,k')=u(f(k)+(1-\delta)k-k')$ に当てはめると

$$V'(k)=u'(c)\big[f'(k)+1-\delta\big]$$

です。微分可能性を仮定して、形式的に確かめることもできます。最適な政策 $k'=g(k)$ を代入した恒等式 $V(k)=u\big(f(k)+(1-\delta)k-g(k)\big)+\beta V(g(k))$ を k で微分すると、

$$\begin{aligned} V'(k) &= u'(c)\big[f'(k)+1-\delta-g'(k)\big]+\beta V'(k')g'(k) && \text{（連鎖律）}\\ &= u'(c)\big[f'(k)+1-\delta\big]+g'(k)\underbrace{\big[\beta V'(k')-u'(c)\big]}_{=0\ \text{（一階条件）}} && \text{（}g'(k)\text{でくくる）}\\ &= u'(c)\big[f'(k)+1-\delta\big] \end{aligned}$$

です。最適な選択 $g(k)$ が k とともに動く効果は、一階条件によって打ち消されます。定理 6.12 は、この計算を、g の微分可能性を仮定せずに正当化したものです。

包絡線条件を1期進めて $V'(k')=u'(c')[f'(k')+1-\delta]$ とし、一階条件に代入すると

要点：ベルマン方程式から導かれるオイラー方程式

$$u'(c)=\beta\,u'(c')\big[f'(k')+1-\delta\big].$$

（第1章のラグランジュ法の結果と同じ形である。）

補足：$V'(k)$ と共役変数・ラグランジュ乗数

包絡線条件 $V'(k) = u'(c)[f'(k) + 1 - \delta]$ は「資本1単位の価値」です。第1章のラグランジュ乗数（当期価値に直したもの）、第4章のハミルトニアンの共役変数 μ も同じものを表していました。3つの方法は、同じ「状態変数のシャドー・プライス」を、それぞれ別の名前で呼んでいるのです。

計算例：家計の消費・貯蓄問題でも同じ手順

資産 a、所得 y、粗利子率 R の家計のベルマン方程式は

$$V(a) = \max_{a'} \{ u\big(Ra + y - a'\big) + \beta V(a') \}.$$

$$\begin{aligned} u'(c) &= \beta V'(a') && \text{（一階条件）} \\ V'(a) &= R\,u'(c) && \text{（包絡線条件（a は c の中にだけ直接現れる））} \\ u'(c) &= \beta R\,u'(c') && \text{（包絡線条件を1期進めて代入）} \end{aligned}$$

第1章のオイラー方程式（式 (1.10)）がそのまま出てきます。包絡線条件 $V'(a) = Ru'(c)$ は「今期の資産1単位の価値は、それを R 単位の消費に変えたときの効用に等しい」と読めます。

6.9 オイラー方程式と横断性条件

オイラー方程式は、最適な計画が満たすべき条件（必要条件）として導きました。第1章の定理 1.10 では、特定の予算制約をもつ家計の問題について、「オイラー方程式と横断性条件を満たせば最適である」という十分条件を証明しました。この節では、同じ主張を一般の問題 (X, Γ, F, β) について証明し、さらに、第1章と第4章で予告した「横断性条件は必要条件でもある」ことを、価値関数を使って証明します。

この節では $X \subset \mathbb{R}_+$ を区間とし、F は A の内部で連続微分可能、定理 6.10 の仮定（凹性）と、$F(\cdot, y)$ が増加である（$F_x \geq 0$）ことを仮定します。実行可能な計画 $\{x_t\}$ が**内点解**であるとは、すべての t で x_t が X の内点で、x_{t+1} が $\Gamma(x_t)$ の内点であることをいいます。このとき、一階条件と包絡線条件（定理 6.12）から、最適な内点解は

$$F_y(x_t, x_{t+1}) + \beta F_x(x_{t+1}, x_{t+2}) = 0 \qquad (t = 0, 1, 2, \dots) \tag{6.6}$$

を満たします。これが一般の形の**オイラー方程式**です（F_y は第2変数についての偏微分）。

定理 6.13（十分条件：オイラー方程式と横断性条件）

上の仮定のもとで、x_0 から出発する実行可能な内点解 $\{x_t^*\}$ が、オイラー方程式 (6.6) と横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t F_x(x_t^*, x_{t+1}^*)\, x_t^* = 0 \tag{6.7}$$

を満たすならば、$\{x_t^*\}$ は最適である。

証明のアイデア

第1章の基本不等式（補題 1.7）の一般化です。凹関数は接平面より下にあるので、利得の差は1次の項で上から抑えられます。1次の項を並べかえると、オイラー方程式によって途中の期の項がすべて打ち消し合い、最後の期の項だけが残ります。それを横断性条件が消します。

証明　$\{x_t\} \in \Pi(x_0)$ を任意の実行可能な計画とし、$F_{x,t}^* = F_x(x_t^*, x_{t+1}^*)$、$F_{y,t}^* = F_y(x_t^*, x_{t+1}^*)$ と略記します。

ステップ1　凹性による評価

F は凹なので、接平面の不等式 $F(x_t, x_{t+1}) \le F(x_t^*, x_{t+1}^*) + F_{x,t}^*(x_t - x_t^*) + F_{y,t}^*(x_{t+1} - x_{t+1}^*)$ が成り立ちます。β^t をかけて $t = 0, \dots, T$ で足すと

$$D_T \equiv \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[F(x_t^*, x_{t+1}^*) - F(x_t, x_{t+1}) \right] \ge \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[F_{x,t}^*(x_t^* - x_t) + F_{y,t}^*(x_{t+1}^* - x_{t+1}) \right]$$

です。

ステップ2　オイラー方程式で打ち消す

オイラー方程式 (6.6) より $\beta^t F_{y,t}^* = -\beta^{t+1} F_{x,t+1}^*$ です。これを右辺の2つ目の項に代入し、和の番号をずらすと

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{T} \beta^t F_{y,t}^*(x_{t+1}^* - x_{t+1}) &= -\sum_{t=0}^{T} \beta^{t+1} F_{x,t+1}^*(x_{t+1}^* - x_{t+1}) && \text{（オイラー方程式）} \\ &= -\sum_{s=1}^{T+1} \beta^s F_{x,s}^*(x_s^* - x_s) && \text{（$s = t+1$ とおく）} \end{aligned}$$

です。1つ目の項 $\sum_{t=0}^{T} \beta^t F_{x,t}^*(x_t^* - x_t)$ と合わせると、$s = 1, \dots, T$ の項が打ち消し合い、$t = 0$ の項は $x_0^* = x_0$ なので 0 です。残るのは

$$D_T \ge -\beta^{T+1} F_{x,T+1}^* \left(x_{T+1}^* - x_{T+1} \right) \ge -\beta^{T+1} F_{x,T+1}^*\, x_{T+1}^*$$

です（最後の不等式は $F_x \ge 0$ と $x_{T+1} \ge 0$ から）。

ステップ3　横断性条件で結論

横断性条件 (6.7) より、右辺は $T \to \infty$ で 0 に収束します。有界性の仮定から D_T は $u(\pi^*) - u(\pi)$ に収束するので、$u(\pi^*) \geq u(\pi)$ です。 □

数式の読み方：第1章の定理との対応

家計の問題では $F(a, a') = u(Ra + y - a')$ なので、$F_x(a_t, a_{t+1}) = Ru'(c_t)$ です。定理 6.13 の横断性条件 $\beta^t R u'(c_t) a_t \to 0$ は、オイラー方程式 $u'(c_{t-1}) = \beta R u'(c_t)$ を使うと $\beta^{t-1} u'(c_{t-1}) a_t \to 0$ と同じで、これは定理 1.10 の横断性条件 $\beta^T u'(c_T) a_{T+1} \to 0$ そのものです。

定理 6.14（横断性条件は必要条件である）

上の仮定に加えて、$0 \in X$ とし、定理 6.9 の仮定（単調性）も満たされているとする。最適な計画 $\{x_t^*\}$ が内点解で、各 x_t^* で定理 6.12 の仮定が満たされるならば、横断性条件 (6.7) が成り立つ。

証明のアイデア

価値関数は凹で、その傾きは包絡線条件により $F_x(x_t^*, x_{t+1}^*)$ です。凹関数の接線は関数の上にあるので、x_t^* での接線を 0 まで延ばすと、「傾き $\times$ x_t^*」が $v^*(x_t^*) - v^*(0)$ で上から抑えられます。価値関数は有界なので、この量は有界で、β^t をかければ 0 に収束します。証明の山場は、価値関数の**有界性**と**凹性**の2つを組み合わせるところです。

証明　定理 6.6 より、最適な計画は各期でベルマン方程式の最大化を達成するので、$x_{t+1}^* = g(x_t^*)$ です。定理 6.12 より v^* は x_t^* で微分可能で、$v^{*\prime}(x_t^*) = F_x(x_t^*, x_{t+1}^*)$ です。また定理 6.9 より v^* は増加なので $v^{*\prime}(x_t^*) \geq 0$ です。v^* は凹なので、x_t^* での接線の不等式を $x = 0$ で使うと

$$
\begin{aligned}
v^*(0) &\leq v^*(x_t^*) + v^{*\prime}(x_t^*)\,(0 - x_t^*) && \text{（凹関数は接線より下にある）} \\
0 \leq v^{*\prime}(x_t^*)\,x_t^* &\leq v^*(x_t^*) - v^*(0) \leq \frac{2M}{1-\beta} && \text{（並べかえて、v^* の有界性）}
\end{aligned}
$$

です。両辺に β^t をかけると、$0 \leq \beta^t F_x(x_t^*, x_{t+1}^*) x_t^* \leq \beta^t \cdot 2M/(1-\beta) \to 0$ です。 □

数式の読み方：定理の読み方

- 定理 6.13 と定理 6.14 を合わせると、標準的な仮定のもとでは、「内点解が最適であること」と「オイラー方程式と横断性条件を満たすこと」が同値になります。したがって、「オイラー方程式を満たす経路のうち、横断性条件を満たすものを探す」という第1章の手順は、最適な経路を過不足なく見つける手順です。
- 第4章で、連続時間の横断性条件は一般には必要条件でないと述べました。ここでの証明が使ったのは、利得の有界性、価値関数の凹性と単調性、状態変数の非負性です。これらが満たされないモデルでは、横断性条件が必要条件にならないことがあります。
- 証明の鍵は、価値関数が有界であることでした。対数効用のように利得が有界でない場合は、価値関数も有界でなくなるので、この証明はそのままでは使えません。その場合にも、適当な条件のもとで横断性条件が必要条件になることが知られていますが、本書では証明しません。

補足：経済学での使いどころ

ラムゼイモデルの鞍点経路が最適であること（第4章の命題 4.3 の離散時間版）、資産価格のバブル解が家計の最適化と両立しないこと、ポンジ・ゲームの禁止のもとで家計の予算制約が生涯の形で書けることなどは、いずれも横断性条件を「最適な行動が満たす条件」として使う議論です。定理 6.14 は、それらの議論の根拠です。

6.10 推測と確認：解析解が得られる例

オイラー方程式は経路の性質を教えてくれますが、政策関数そのものは一般には手で求められません。ただし、次の特別な場合には、価値関数の形を推測して確かめる**推測と確認**（guess and verify）の方法で解けます。

計算例：ブロック＝ミルマンのモデル

$u(c)=\ln c$、$f(k)=k^{\alpha}$、$\delta=1$（資本は1期で全部減耗）とします。ベルマン方程式は

$$V(k)=\max_{k'}\bigl\{\ln(k^{\alpha}-k')+\beta V(k')\bigr\}.$$

推測：$V(k)=A+B\ln k$（A,B は未知の定数）。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^{\alpha}-k'}&=\frac{\beta B}{k'} && \text{（一階条件（}V'(k')=B/k'\text{））}\\
k'&=\frac{\beta B}{1+\beta B}k^{\alpha},\qquad c=\frac{1}{1+\beta B}k^{\alpha} && \text{（}k'\text{ について解く）}\\
A+B\ln k&=\ln\frac{k^{\alpha}}{1+\beta B}+\beta\Bigl[A+B\ln\Bigl(\frac{\beta B}{1+\beta B}k^{\alpha}\Bigr)\Bigr] && \text{（ベルマン方程式に代入）}\\
B\ln k&=(\alpha+\alpha\beta B)\ln k+(\text{定数}) && \text{（}\ln k\text{ の項を集める）}
\end{aligned}$$

確認：すべての k で成り立つには、両辺の $\ln k$ の係数が等しく $B=\alpha+\alpha\beta B$、つまり

$$B=\frac{\alpha}{1-\alpha\beta},\qquad \frac{\beta B}{1+\beta B}=\alpha\beta.$$

したがって政策関数は

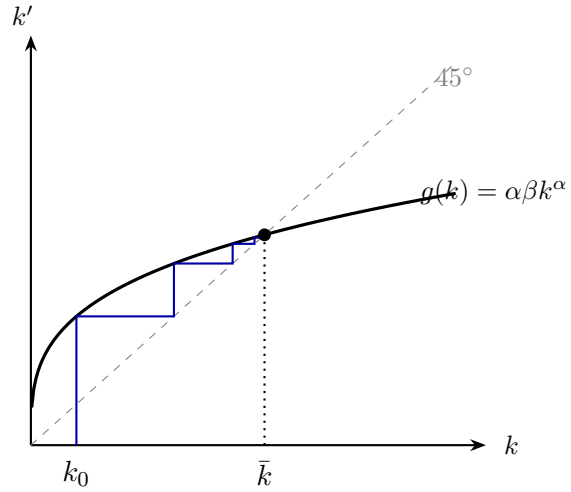
$$k'=g(k)=\alpha\beta k^{\alpha},\qquad c=(1-\alpha\beta)k^{\alpha}.$$

生産の一定割合 $\alpha\beta$ を貯蓄する、という単純なルールになります。これは貯蓄率 $s=\alpha\beta$ のソローモデルと同じ動きです。定数 A も、定数項を比べると $A=\frac{1}{1-\beta}\Bigl[\ln(1-\alpha\beta)+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln(\alpha\beta)\Bigr]$ と求まります。

数式の読み方：政策関数の読み方

- 政策関数 $k'=\alpha\beta k^{\alpha}$ は1階の差分方程式で、定常状態は $\bar{k}=(\alpha\beta)^{1/(1-\alpha)}$ です。$g'(\bar{k})=\alpha<1$ なので安定です（定理 1.6）。
- 価値関数の係数 $B=\alpha/(1-\alpha\beta)$ は「資本が1%増えると生涯効用がどれだけ増えるか」です。今期の生産が α% 増え、その一部が貯蓄されて来期の資本を増やし、さらにその次も…という効果の無限和 $\alpha(1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2+\cdots)=\alpha/(1-\alpha\beta)$ になっています。
- 貯蓄率 $\alpha\beta$ は、資本の重要性 α が大きいほど、辛抱強さ β が大きいほど高くなります。

図 6.1　政策関数と最適経路



$\alpha = 0.3$、$\beta = 0.9$。$g(k) = 0.27k^{0.3}$、$\bar{k} = 0.27^{1/0.7} \approx 0.154$、$k_0 = 0.03$。

図の読み方

1. 黒の曲線が政策関数 $k' = g(k)$ です。ベルマン方程式を解いて得られる「今期の資本から来期の資本を決めるルール」です。定理 6.10 のとおり、一価で連続な関数になっています。
2. 青の階段は、k_0 から出発した最適経路です（第1章の45度線図と同じ読み方）。資本は定常状態 $\bar{k}$ に単調に収束します。
3. ハミルトニアンでは位相図の鞍点経路として求めた最適経路が、ここでは政策関数という1本の曲線で表されています。政策関数は、鞍点経路を「資本から消費（または来期の資本）を決める関数」として書いたものと考えることができます。

補足：推測の当て方

推測と確認がうまくいくのは、効用関数・生産関数の形と価値関数の形が「同じ族」に入るときです。対数効用とコブ＝ダグラス型・完全減耗、線形の制約と2次の目的関数（**線形2次問題**、価値関数も2次関数）などが代表例です。それ以外の場合は、次の数値的な方法を使います。

6.11　価値関数反復

ベルマン方程式の右辺は、関数 V を受け取って新しい関数を返す操作とみなせます。これが定理 6.8 の写像 T です。

$$(TV)(k) \equiv \max_{k'} \left\{ u\big(f(k) + (1-\delta)k - k'\big) + \beta V(k') \right\}. \tag{6.8}$$

ベルマン方程式は $V = TV$、つまり「T を施しても変わらない関数」（T の**不動点**）を求める問題です。

要点：価値関数反復

適当な関数 V_0（例えば $V_0 \equiv 0$）から始めて

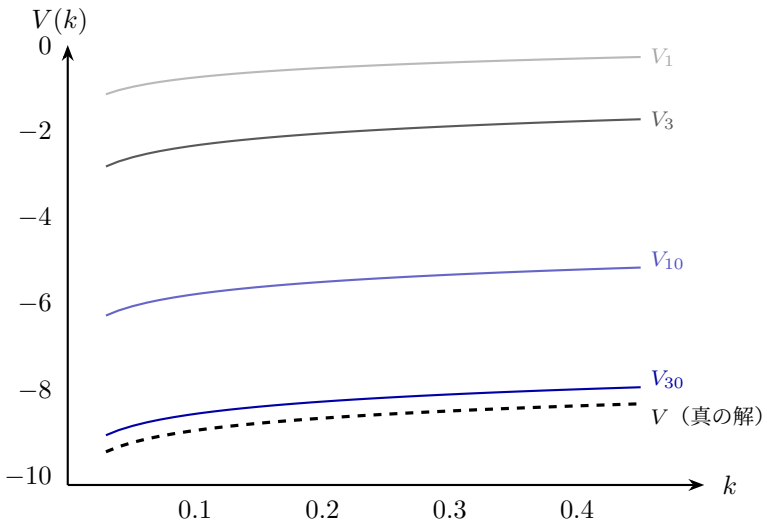
$$V_{n+1} = TV_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を繰り返すと、V_n は真の価値関数 V に一様収束する（定理 6.8）。誤差は毎回 β 倍以下に縮む：$\|V_n - V\| \le \beta^n \|V_0 - V\|$。また、停止したときの誤差は、直前の2回の差から $\|V_n - V\| \le \frac{\beta}{1-\beta}\|V_n - V_{n-1}\|$ と評価できる（定理 5.8）。

数式の読み方：V_n の意味

$V_0 \equiv 0$ から始めると、$V_1(k) = \max u(\cdot)$ は「今期で世界が終わるときの価値」、V_2 は「残り2期のときの価値」、…、V_n は「残り n 期の有限期間問題の価値」です。価値関数反復は「期間を長くしていった有限期間問題の極限」として無限期間の解を求めている、と解釈できます。ケーキ食べ問題の V_n がそのまま、この反復の n 回目です。

図 6.2　価値関数反復の収束



$u = \ln c$、$f(k) = k^{0.3}$、$\delta = 1$、$\beta = 0.9$。$V_0 \equiv 0$ から始めて、$k \in [0.03, 0.45]$ の300点の格子上でベルマン方程式の右辺の最大化を繰り返した。破線は推測と確認で求めた真の価値関数 $V(k) = A + B\ln k$（$B = \alpha/(1-\alpha\beta) \approx 0.411$、$A \approx -7.99$）。

図の読み方

1. 灰色・薄い青・青の実線は、反復1回目・3回目・10回目・30回目の V_n です。黒の破線が真の価値関数です。
2. 1回目は「今期すべて食べる」価値 $\ln k^\alpha$ で、真の値よりずっと上にあります（$V_0 \equiv 0$ は将来の効用を0とみなしており、対数効用では将来の効用が負なので、過大評価になる）。
3. 反復を重ねるごとに曲線は下に移り、真の値に近づきます。誤差は毎回およそ $\beta = 0.9$ 倍に縮むので、30回目では誤差が当初の $0.9^{30} \approx 4\%$ ほどになり、真の値の近くまで来ています。
4. 曲線の**形**（傾き）は早い段階でほぼ正しくなっています。政策関数は V の傾きで決まるので、価値関数の水準より速く収束する傾向があります。

コードで確かめる：価値関数反復の手順（擬似コード）

1. 資本の格子 $k_1 < k_2 < \cdots < k_N$ を用意し、$V(k_i) = 0$ とおく。
2. 各 k_i について、すべての k_j を候補として $\ln(k_i^\alpha - k_j) + \beta V(k_j)$ を計算し、最大値を新しい $V(k_i)$ に、最大を与える k_j を $g(k_i)$ にする（$k_i^\alpha - k_j \le 0$ の候補は除く）。
3. 新旧の V の差の最大値が十分小さく（例：10^{-6}）なるまで2を繰り返す。

図の計算では、200回の反復で誤差が 10^{-4} 以下になり、求めた政策関数は解析解 $\alpha\beta k^\alpha$ と格子の幅の範囲で一致しました。停止規則の閾値 ε と真の誤差の関係は、定理 5.8 の事後評価 $\frac{\beta}{1-\beta}\varepsilon$ で与えられます。$\beta = 0.9$ なら、真の誤差は閾値の9倍以下です。

補足：政策関数反復

価値関数反復は確実ですが、β が1に近いと収束が遅くなります（$\beta = 0.99$ なら誤差が $1/10$ になるのに約230回）。そこで、「政策関数 g を固定して、その政策に従ったときの価値 V_g を線形方程式 $V_g(k) = F(k, g(k)) + \beta V_g(g(k))$ から直接求め、次に V_g を使って政策を改善する」という**政策関数反復**（ハワードの改善アルゴリズム）がよく使われます。政策の改善の各ステップで価値が単調に増えることと、収束がはるかに速いことが知られています。

6.12 利得が有界でない場合

この章の定理は、利得関数 F が有界であることを前提にしてきました。しかし、ケーキ食べ問題やブロック＝ミルマンのモデルの対数効用は、$c \to 0$ で $-\infty$ に発散するので有界で

はありません。それでも推測と確認で求めた解が正しいことは、次のように正当化できます。

発展：ベルマン方程式の解が価値関数であるための条件（有界でない場合）

定理 6.5 の「有界」という条件は、次の条件で置きかえられます。F は上に有界（または各計画の割引和が収束する）とし、関数 v が式 (6.3) を満たし、さらに**すべての**実行可能な計画 $\{x_t\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = 0$$

が成り立つならば、$v = v^*$ です。証明の筋は定理 6.6 と同じです。v は式 (6.3) を満たすので、任意の計画について $v(x_0) \geq \sum_{t<n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta^n v(x_n)$ で、$n \to \infty$ として $v(x_0) \geq u(\pi)$、よって $v \geq v^*$ です。逆に、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、各期で右辺を $\varepsilon(1-\beta)$ 以内で達成する計画をとると、$v(x_0) \leq \sum_{t<n} \beta^t F + \beta^n v(x_n) + \varepsilon$ となり、同じ極限で $v(x_0) \leq v^*(x_0) + \varepsilon$ です。

ブロック＝ミルマンのモデルでは $v(k) = A + B\ln k$ なので、条件は $\beta^n \ln k_n \to 0$ です。実行可能な計画では $k_{n+1} \leq k_n^{\alpha}$ より資本は上に有界なので、この条件が破れるのは $\ln k_n$ が β^{-n} の速さで $-\infty$ に発散する場合だけです。そのような計画では $\ln c_n \leq \alpha \ln k_n$ も同じ速さで発散するので、割引和は $-\infty$ となり、最適な計画の候補から外れます。したがって、条件を満たす計画の範囲で比べれば十分で、$A + B\ln k$ が価値関数であると結論できます。

補足：有界でない場合の一般論

有界でない利得を扱う一般的な方法として、(1) 状態変数の範囲を $[k_{\min}, k_{\max}]$（$k_{\min} > 0$）に制限して利得を有界にし、この範囲の外に出ないことを別に示す方法、(2) 関数の大きさを $\|f\|_{\phi} = \sup_x |f(x)|/\phi(x)$ のように重み ϕ で割って測る**重み付きノルム**を使い、縮小写像の原理を適用する方法、があります。どちらも本書では扱いません。

6.13 ハミルトニアンとベルマン方程式の関係

	ハミルトニアン（第4章）	ベルマン方程式（本章）
時間	連続時間	主に離散時間
未知のもの	経路 $c(t)$、$k(t)$	関数 $V(k)$、$g(k)$
中心となる式	ケインズ＝ラムゼイ則、位相図	オイラー方程式、政策関数
状態の価値	共役変数 $\mu(t)$	$V'(k)$
最適性の根拠	最大値原理と十分条件（定理4.2）	最適性の原理（定理 6.6）と十分条件（定理 6.13）
得意な場面	成長理論、解析的な分析	不確実性、数値計算、DSGE

どちらの方法でも、同じ問題からは同じオイラー方程式が導かれます。問題の性質に合わせて、扱いやすい方を選べばよいのです。

発展：HJB方程式は、ベルマン方程式の期間を短くした極限

第4章の最後で、連続時間の価値関数が満たすハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン（HJB）方程式を導きました。それが離散時間のベルマン方程式とどう対応するかを確かめます。期間の長さを Δ とし、1期間の効用を $u(a,c)\Delta$、割引因子を $\beta = e^{-\rho\Delta}$、遷移式を $a' = a + g(a,c)\Delta$ とすると、ベルマン方程式は

$$V(a) = \max_{c}\Big\{ u(a,c)\Delta + e^{-\rho\Delta} V\big(a + g(a,c)\Delta\big) \Big\}$$

です。V が微分可能として、$e^{-\rho\Delta} \approx 1 - \rho\Delta$、$V(a + g\Delta) \approx V(a) + V'(a) g\Delta$ を代入し、Δ の2次以上の項を捨てると

$$\begin{aligned} V(a) &\approx \max_{c}\Big\{ u\Delta + (1-\rho\Delta)\big[V(a) + V'(a)g\Delta\big] \Big\} && \text{（近似を代入）} \\ \rho\Delta\, V(a) &\approx \max_{c}\big\{ u\Delta + V'(a)g\Delta \big\} && \text{（}V(a)\text{ を左辺に移す）} \\ \rho V(a) &= \max_{c}\big\{ u(a,c) + V'(a)g(a,c) \big\} && \text{（}\Delta\text{ で割って }\Delta \to 0\text{）} \end{aligned}$$

となり、HJB方程式が得られます。右辺は $\mu = V'(a)$ とおいた当期価値ハミルトニアンの最大値です。離散時間の一階条件 $u'(c) = \beta V'(a')$ は $\partial H^c/\partial c = 0$ に、包絡線条件は共役方程式 $\dot{\mu} = \rho\mu - \partial H^c/\partial a$ に対応します（HJB方程式の両辺を a で微分し、最適経路に沿って $\mu(t) = V'(a(t))$ の時間微分を計算すると得られます）。連続時間では「縮小写像」の形にはなりませんが、HJB方程式の解の存在と一意性も、適当な関数空間の上の不動点問題として証明されます。

6.14 不確実性への拡張（予告）

生産に確率的なショック z（技術水準）がある場合、状態変数は (k, z) の2つになります。今期の z は観察できますが、来期の z' は分かりません。このとき、ベルマン方程式は

$$V(k,z) = \max_{k'} \Big\{ u\big(zf(k) + (1-\delta)k - k'\big) + \beta\, \mathrm{E}\big[V(k', z') \,\big|\, z\big] \Big\} \tag{6.9}$$

となります。$\mathrm{E}[V(k', z') \mid z]$ は「今期の z を知ったうえでの、来期の価値の期待値」です（第7章の条件付き期待値）。z が来期の z' を予測する手がかりになる（例：$\ln z' = \phi \ln z + \varepsilon'$）ので、$z$ が状態変数に入ります。確実な場合と同じ手順（一階条件と包絡線条件）で、確率的なオイラー方程式

$$u'(c) = \beta\, \mathrm{E}\big[u'(c')\big(z' f'(k') + 1 - \delta\big) \,\big|\, z\big]$$

が得られます。これが確率的な成長モデルと実物的景気循環（RBC）モデルの出発点です。

この章の理論（縮小写像による価値関数の存在、単調性と凹性、微分可能性）は、期待値をとる操作が単調性と割引を保つので、ほぼそのまま確率的な問題に拡張できます。その内容は、条件付き期待値とマルコフ連鎖を扱う第7章のあとで、第8章（確率的動的計画法）として独立して扱います。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 最適性の原理：無限期間の問題を、政策関数を毎期当てはめる問題に置きかえる根拠。
- 価値関数の存在・一意性・連続性：最適成長・消費貯蓄・投資・サーチの各モデルで、解が存在して一つに決まることの保証。価値関数反復の収束。
- 単調性・凹性：政策関数の一価性と連続性、比較静学。
- ベンヴェニスト＝シャインクマンの定理：包絡線条件 $V'(k) = u'(c)[f'(k)+1-\delta]$ の正当化。共役変数・ラグランジュ乗数との対応。
- オイラー方程式と横断性条件：最適な経路の過不足ない特徴づけ。バブル解の排除、鞍点経路の選択。

要点

- 無限期間の問題は再帰的で、価値関数を使ってベルマン方程式 $V(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta V(y)\}$ に書ける。逐次問題の価値関数はベルマン方程式を満たし、ベルマン方程式の有界な解は逐次問題の価値関数に一致する。最適な計画は、各期でベルマン方程式の最大化を達成する計画である（最適性の原理）。
- 利得が有界連続で、実行可能集合がコンパクトな値をとる連続な対応なら、ベルマン方程式の写像 T は $C(X)$ 上の縮小写像で、価値関数は存在してただ一つに決まり、連続である。利得が単調・凹なら、価値関数も単調・狭義凹で、政策関数は一価で連続である。
- 価値関数は内点で微分可能で、包絡線条件 $V'(x) = F_x(x, g(x))$ が成り立つ（ベンヴェニスト＝シャインクマン）。一階条件と合わせてオイラー方程式が導かれる。
- 標準的な仮定のもとで、内点解が最適であることと、オイラー方程式と横断性条件を満たすこととは同値である。
- 対数効用・コブ＝ダグラス・完全減耗なら、推測と確認で $k' = \alpha\beta k^{\alpha}$ と解ける。一般には価値関数反復で解き、誤差は β^n の速さで縮む。

次の章へ　ここまでで、決定論的な動学（第I部）の理論が一通り完成しました。続く章では、技術ショックや所得ショックを表す確率過程（条件付き期待値、マルコフ連鎖、AR(1) 過程）を学び、そのうえで、この章のベルマン方程式を不確実性のある問題に拡張します。確率的な動的計画法は、資産価格、予備的貯蓄、DSGEモデルの土台です。

大学院とのつながり　大学院のマクロ経済学で新しいモデルに出会ったら、「状態変数と実行可能な選択は何か」「ベルマン方程式はどう書けるか」「一階条件と包絡線条件からオイラー方程式はどう出るか」「定常状態は安定か」という本書の問いを順に当てはめてみてください。たいていのモデルは、本書の道具の組み合わせで読み解けるはずです。

第7章

確率過程

ここまでの流れ　第1〜6章では、将来が確実に分かっている（決定論的な）動学を扱い、差分方程式・微分方程式・ハミルトニアン・ベルマン方程式の理論を一通り完成させました。ここから本書の第II部に入り、将来が不確実な動学を扱います。

前提知識　第1章の1階線形差分方程式の後ろ向きの解と前向きの解（定理 1.4、定理 1.5）と等比級数（命題 1.2）。第2章の安定性の判定（定理 2.6）。第5章の縮小写像の原理（定理 5.8）。有限状態の確率・期待値・ベイズの定理（ミクロ版の「確率と期待効用」の章）。

この章の問い　技術ショックや所得ショックのように、時間を通じて確率的に変動する変数は、どのような数学で表せばよいのでしょうか。「t 期の情報で予想する」とは、正確には何を意味するのでしょうか。

この章で分かること　情報と条件付き期待値、繰り返し期待値の法則、マルコフ連鎖と定常分布（存在・一意性・収束の証明）、AR(1) 過程と定常性、ラグ演算子、VAR、マルチンゲール、大数の法則と中心極限定理、正規分布と対数正規分布。

7.1　この章の見取り図

確率過程とは、確率変数を時間の順に並べた列 $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ のことです。この章では、マクロ経済学で使う確率過程を、次の3つの見方で整理します。

1. **予想の数学**：t 期までに分かっている情報で将来を予想する操作が、条件付き期待値 $\mathrm{E}_t[\cdot]$ です。合理的期待の仮定は、この操作の性質（繰り返し期待値の法則）として表されます。
2. **有限個の状態**：ショックが「好況・不況」のように有限個の値しかとらない場合は、マルコフ連鎖で表します。数値計算では、連続的なショックもマルコフ連鎖で近似します。
3. **線形の過程**：ショックが連続的な値をとる場合は、AR(1) 過程やVARで表します。これは第1・2章の差分方程式に、毎期ショックが加わったものです。

測度論（一般の確率空間）には立ち入らず、証明は有限個の状態の場合に行います。連続的な確率変数についても同じ公式が成り立ちますが、その厳密な証明には測度論が必要です。

7.2　確率変数ベクトルと分散共分散行列

n 個の確率変数を並べたベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ の期待値は、成分ごとの期待値を並べたもの $\mathrm{E}[x] = \mu$ です。ばらつきは**分散共分散行列**

$$\mathrm{Var}(x) = \mathrm{E}\big[(x-\mu)(x-\mu)^\top\big] \tag{7.1}$$

で表します。(i,j) 成分は $\mathrm{Cov}(x_i, x_j)$ で、対角には分散が並びます。

命題 7.1（線形変換の期待値と分散）

定数の行列 A とベクトル b について、$\mathrm{E}[Ax + b] = A\mathrm{E}[x] + b$、$\mathrm{Var}(Ax + b) = A\,\mathrm{Var}(x)\,A^\top$。特に $\mathrm{Var}(x)$ は対称で半正定値である。

証明　期待値は和と定数倍を保つ（線形である）ので1つめが成り立ちます。2つめは、$y = Ax + b$ とおくと $y - \mathrm{E}[y] = A(x-\mu)$ なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(y) &= \mathrm{E}\big[A(x-\mu)(x-\mu)^\top A^\top\big] && ((Av)^\top = v^\top A^\top)\\
&= A\,\mathrm{E}\big[(x-\mu)(x-\mu)^\top\big]A^\top && (\text{期待値の線形性})
\end{aligned}$$

です。A を $1 \times n$ の行ベクトル $c^\top$ とすると $c^\top \mathrm{Var}(x) c = \mathrm{Var}(c^\top x) \geq 0$ となり、半正定値であることが分かります。 □

1変数の公式 $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ の行列版で、a^2 が「A を両側から挟む」形に変わります。VARの分散（7.6節）やカルマンフィルタ（第13章）で繰り返し使います。

7.3　情報と条件付き期待値

有限個の状態 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_S\}$ のどれかが起こり、状態 ω_s の確率を $\pi_s > 0$ とします。確率変数とは、状態ごとに値を決める関数 $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ です。

情報を分割で表す

「ある時点で何が分かっているか」は、状態の集合 Ω の**分割**で表せます。例えば、今期の景気が好況か不況かだけが分かっているなら、Ω を「好況の状態の集まり」と「不況の状態の集まり」の2つに分けたものが情報です。

定義 7.2（情報と条件付き期待値）

Ω を互いに交わらない空でない集合 $B_1, \ldots, B_K$ に分けたもの $\mathcal{I} = \{B_1, \ldots, B_K\}$ を情報という。$\mathcal{I}$ のもとでの Y の条件付き期待値 $\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}]$ とは、状態 $\omega \in B_k$ に対して

$$\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}](\omega) = \frac{\sum_{\omega_s \in B_k} \pi_s Y(\omega_s)}{\sum_{\omega_s \in B_k} \pi_s}$$

という値をとる確率変数である。確率変数 X の値で状態を分けた情報を使うときは $\mathrm{E}[Y \mid X]$ と書く。

数式の読み方：定義の読み方

- 右辺は「B_k が起きたと分かったときの、ベイズの定理による条件付き確率 $\pi_s / \Pr(B_k)$ で重みをつけた Y の平均」です。
- $\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}]$ は、同じ B_k に属する状態では同じ値をとります。つまり、その時点で分かっている情報だけで値が決まる確率変数です。
- 例えば Y を賃金、X を教育年数とすると、$\mathrm{E}[Y \mid X]$ は「教育年数ごとの平均賃金」に、その人の教育年数を入れたものです。

時間を通じて情報が増えていく様子は、分割が次第に細かくなる列 $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots$ で表します（$\mathcal{I}_{t+1}$ の各集合は、$\mathcal{I}_t$ のどれか一つの集合に含まれる）。これを**情報の流れ**といい、$\mathrm{E}_t[Y] = \mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}_t]$ と略記します。マクロ経済学の E_t は「t 期までに観察された全ての変数の値を条件とした期待値」です。変数 x_t の値が $\mathcal{I}_t$ で決まる（$\mathcal{I}_t$ の各集合の上で一定である）とき、x_t は t 期に**既知**であるといいます。

命題 7.3（条件付き期待値の性質）

情報 $\mathcal{J}$ が $\mathcal{I}$ より細かい（$\mathcal{J}$ の各集合が $\mathcal{I}$ のどれかの集合に含まれる）とする。

1. （線形性）$\mathrm{E}[aY + bZ \mid \mathcal{I}] = a\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}] + b\mathrm{E}[Z \mid \mathcal{I}]$。
2. （既知の変数はくくり出せる）W が $\mathcal{I}$ で決まるなら、$\mathrm{E}[WY \mid \mathcal{I}] = W\,\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}]$。
3. （繰り返し期待値の法則）$\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{J}] \mid \mathcal{I}\big] = \mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}]$。特に $\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}]\big] = \mathrm{E}[Y]$、$\mathrm{E}_t\big[\mathrm{E}_{t+1}[Y]\big] = \mathrm{E}_t[Y]$。

証明　1は定義の式が Y について線形であることから従います。2は、B_k の上で W が定数 w_k なので、定義の分子から w_k をくくり出せることから従います。3を示します。$\mathcal{I}$ の集合 B を一つ固定し、B に含まれる $\mathcal{J}$ の集合を $C_1, \ldots, C_m$ とします（$B = C_1 \cup \cdots \cup$

C_m）。$\Pr(C) = \sum_{\omega_s \in C} \pi_s$ と書くと、B の上で

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{J}] \,\big|\, \mathcal{I}\big] &= \frac{1}{\Pr(B)} \sum_{j=1}^{m} \Pr(C_j) \cdot \frac{\sum_{\omega_s \in C_j} \pi_s Y(\omega_s)}{\Pr(C_j)} && (\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{J}] \text{ は } C_j \text{ の上で一定}) \\
&= \frac{1}{\Pr(B)} \sum_{\omega_s \in B} \pi_s Y(\omega_s) && (C_j \text{ をまとめると } B) \\
&= \mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}] && (\text{定義})
\end{aligned}
$$

です。$\mathcal{I} = \{\Omega\}$（何も分からない情報）とすれば $\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{J}]] = \mathrm{E}[Y]$ が得られます。 □

補足：経済学での使いどころ

繰り返し期待値の法則は、「今日の時点で予想する『明日の予想』は、今日の予想に等しい」ことを意味します。明日の予想が今日の予想より上がると今日の時点で分かっているなら、今日の予想を最初から上げておくはずだからです。確率的なオイラー方程式を何期分もつなげて前向きに解くとき（第8・10章）、$\mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1}[\cdot]] = \mathrm{E}_t[\cdot]$ とまとめる操作は、すべてこの法則によります。

命題 7.4（条件付き期待値は最良の予測である）

$\mathcal{I}$ で決まる確率変数 W のうち、平均二乗誤差 $\mathrm{E}[(Y-W)^2]$ を最小にするのは $W = \mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}]$ である。また予測誤差 $Y - \mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}]$ は、$\mathcal{I}$ で決まるどの確率変数とも無相関である。

証明　$\hat{Y} = \mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}]$、$e = Y - \hat{Y}$ とします。$\mathcal{I}$ で決まる W について、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[eW] &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[eW \mid \mathcal{I}]\big] && (\text{繰り返し期待値の法則}) \\
&= \mathrm{E}\big[W\,\mathrm{E}[e \mid \mathcal{I}]\big] && (W \text{ をくくり出す}) \\
&= \mathrm{E}\big[W(\hat{Y} - \hat{Y})\big] = 0 && (\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{I}] = \hat{Y})
\end{aligned}
$$

です（$W = 1$ とすれば $\mathrm{E}[e] = 0$ なので、無相関でもあります）。すると、$\hat{Y} - W$ も $\mathcal{I}$ で決まるので、

$$
\mathrm{E}[(Y-W)^2] = \mathrm{E}[(e + \hat{Y} - W)^2] = \mathrm{E}[e^2] + 2\mathrm{E}[e(\hat{Y} - W)] + \mathrm{E}[(\hat{Y} - W)^2] = \mathrm{E}[e^2] + \mathrm{E}[(\hat{Y} - W)^2]
$$

となり、$W = \hat{Y}$ のとき最小です。 □

補足：経済学での使いどころ

「予測誤差は、予測した時点の情報と無相関である」という性質は、合理的期待の実証的な意味そのものです。条件付き期待値は「情報で作れる確率変数全体への射影」であり、この見方は第13章のカルマンフィルタの導出で使います。

7.4 マルコフ連鎖

定義 7.5（マルコフ連鎖）

有限個の値 $\{z_1, \dots, z_m\}$ をとる確率過程 $\{z_t\}$ が、すべての t と i, j について

$$\Pr(z_{t+1} = z_j \mid z_t = z_i,\ z_{t-1}, \dots, z_0) = \Pi_{ij}$$

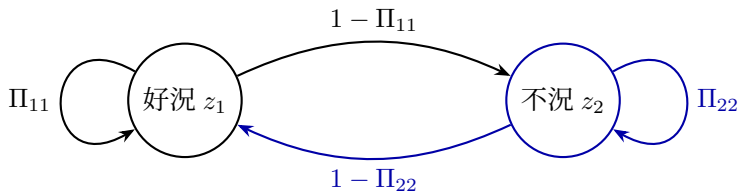
（過去の値によらない）を満たすとき、$\{z_t\}$ をマルコフ連鎖という。$m \times m$ 行列 $\Pi = (\Pi_{ij})$ を推移確率行列という。各成分は非負で、各行の和は 1 である。

t 期の分布を行ベクトル $p_t = (\Pr(z_t = z_1), \dots, \Pr(z_t = z_m))$ で表すと、全確率の公式 $\Pr(z_{t+1} = z_j) = \sum_i \Pr(z_t = z_i)\Pi_{ij}$ より

$$p_{t+1} = p_t \Pi, \qquad p_t = p_0 \Pi^t \tag{7.2}$$

です。分布の動きは、行列を掛けていく線形の差分方程式です。また、関数 f の条件付き期待値は $\mathrm{E}[f(z_{t+1}) \mid z_t = z_i] = \sum_j \Pi_{ij} f(z_j)$、つまり列ベクトル $(f(z_1), \dots, f(z_m))^\top$ に左から Π を掛けたものの第 i 成分です。

図 7.1　2つの状態のマルコフ連鎖



矢印に添えた数は、来期にその状態へ移る確率。

図の読み方

1. 各状態から出る矢印の確率の和は 1 です。これが「推移確率行列の各行の和は 1」に対応します。
2. Π_{11}、Π_{22} が 1 に近いほど、同じ状態にとどまりやすく、景気の局面が長く続きます（持続性が高い）。

分布が時間を通じて変わらないとき、その分布を定常分布といいます。

定義 7.6（定常分布）

成分が非負で和が 1 の行ベクトル p^* が $p^* = p^*\Pi$ を満たすとき、p^* を定常分布という。

定常分布の存在と一意性を、第5章の縮小写像の原理で証明します。分布の間の距離には、成分の差の絶対値の和 $\|p\|_1 = \sum_j |p_j|$ を使います。

定理 7.7（定常分布の存在・一意性・収束）

推移確率行列 Π について、$\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \min_i \Pi_{ij} > 0$ とする（ある状態 j へは、どの状態からも正の確率で移れる）。このとき、

1. 定常分布 p^* はただ一つ存在する。
2. どんな初期分布 p_0 から出発しても $p_t = p_0\Pi^t$ は p^* に収束し、$\|p_t - p^*\|_1 \le (1-\varepsilon)^t \|p_0 - p^*\|_1$ である。

証明のアイデア

分布 p を $p\Pi$ に移す写像 T が、分布の集合の上で縮小写像であることを示せば、残りは縮小写像の原理がすべて片づけます。山場は「2つの分布の差 $d = p - q$ は成分の和が 0 なので、Π の各列から共通の部分 $\min_i \Pi_{ij}$ を差し引いても $d\Pi$ は変わらない」という観察です。どの状態からも共通に流れ込む確率の分だけ、2つの分布の違いが打ち消されます。

証明

方針　分布の集合 $\Delta = \{p \in \mathbb{R}^m : p_j \ge 0,\ \sum_j p_j = 1\}$ の上の写像 $T(p) = p\Pi$ が係数 $1-\varepsilon$ の縮小写像であることを示し、定理 5.8 を当てはめます。

ステップ1　T は Δ を Δ に写す

$p \in \Delta$ なら、$(p\Pi)_j = \sum_i p_i \Pi_{ij} \ge 0$ で、$\sum_j (p\Pi)_j = \sum_i p_i \sum_j \Pi_{ij} = \sum_i p_i = 1$ です。また Δ は $\mathbb{R}^m$ の閉集合で、$\mathbb{R}^m$ はノルム $\|\cdot\|_1$ について完備です（ミクロ版の「$\mathbb{R}^n$ の位相」の章の完備性。$\mathbb{R}^m$ のノルムはどれも同値なので、どのノルムで考えても完備です）。

ステップ2　縮小性

$p, q \in \Delta$ とし、$d = p - q$ とおくと $\sum_i d_i = 0$ です。$\mu_j = \min_i \Pi_{ij}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\|T(p) - T(q)\|_1 &= \sum_j \Big| \sum_i d_i \Pi_{ij} \Big| && (T \text{ の定義}) \\
&= \sum_j \Big| \sum_i d_i (\Pi_{ij} - \mu_j) \Big| && (\textstyle\sum_i d_i \mu_j = \mu_j \sum_i d_i = 0) \\
&\le \sum_j \sum_i |d_i| (\Pi_{ij} - \mu_j) && (\text{三角不等式、} \Pi_{ij} - \mu_j \ge 0) \\
&= \sum_i |d_i| \Big(\sum_j \Pi_{ij} - \varepsilon \Big) = (1 - \varepsilon) \|p - q\|_1 && (\text{行の和は } 1)
\end{aligned}
$$

です。$0 < \varepsilon \le 1$ なので、T は係数 $1 - \varepsilon < 1$ の縮小写像です。

ステップ3　結論

定理 5.8 より、T は Δ にただ一つの不動点 $p^* = p^* \Pi$ をもち、$p_t = T^t(p_0)$ は誤差評価つきで p^* に収束します。 □

数式の読み方：仮定の読み方

- 仮定 $\varepsilon > 0$ は、すべての成分が正（$\Pi_{ij} > 0$）なら必ず成り立ちます。2状態の景気の連鎖（図 7.1）で $0 < \Pi_{11}, \Pi_{22} < 1$ なら成り立ち、$\varepsilon = \min(\Pi_{11}, 1 - \Pi_{22}) + \min(1 - \Pi_{11}, \Pi_{22})$ です。
- ある k で Π^k が仮定を満たせば、Π^k に定理を当てはめて同じ結論が得られます（Π^k の定常分布は Π の定常分布でもあり、一意性もそこから出ます）。
- 仮定がまったく成り立たない例は、$\Pi = I$（状態がまったく動かない）や $\Pi = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$（交互に入れかわる）です。前者では定常分布が無数にあり、後者では p_t が振動して収束しません。

補足：経済学での使いどころ

景気の局面・個人の雇用状態・所得の水準をマルコフ連鎖で表すと、長期的にそれぞれの状態にいる割合が定常分布です。2状態なら $p^* = p^* \Pi$ を解いて $p_1^* = (1 - \Pi_{22}) / (2 - \Pi_{11} - \Pi_{22})$ となります。異質的家計モデル（第12章）の「資産と所得の定常分布」も、同じ定理の考え方で求めます。なお、仮定がなくても定常分布は必ず存在します（ブラウワーの不動点定理を分布の集合 Δ に当てはめる。ミクロ版の「不動点定理」の章）。縮小写像を使うと、一意性と収束の速さまで分かる点が違います。

7.5　AR(1) 過程と定常性

連続的な値をとるショックの標準的なモデルが、AR(1) 過程（1次の自己回帰過程）です。

> **定義 7.8（ホワイトノイズとAR(1) 過程）**
> 確率変数の列 $\{\varepsilon_t\}$ が、$\mathrm{E}[\varepsilon_t]=0$、$\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\sigma^2$、$t\neq s$ なら $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_s)=0$ を満たすとき、ホワイトノイズという。ホワイトノイズ $\{\varepsilon_t\}$ と定数 ρ を使って
>
> $$x_t=\rho x_{t-1}+\varepsilon_t$$
>
> で定まる過程を AR(1) 過程という。ρ を自己回帰係数（持続性）という。

これは第1章の1階線形差分方程式に、毎期ショック ε_t が加わったものです。過去にさかのぼって代入を繰り返すと

$$x_t=\varepsilon_t+\rho\varepsilon_{t-1}+\rho^2\varepsilon_{t-2}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\varepsilon_{t-k} \tag{7.3}$$

となります（$|\rho|<1$ の場合の後ろ向きの解。これを**MA(∞) 表現**といいます）。t 期の値は、過去のショックに ρ^k の重みをつけた和で、古いショックほど影響が小さくなります。

> **定義 7.9（弱定常性）**
> 確率過程 $\{x_t\}$ の期待値 $\mathrm{E}[x_t]$ と自己共分散 $\gamma_k=\mathrm{Cov}(x_t,x_{t-k})$ が、どれも t によらないとき、$\{x_t\}$ は弱定常（共分散定常）であるという。γ_k/γ_0 を k 次の自己相関という。

> **命題 7.10（AR(1) 過程のモーメント）**
> $|\rho|<1$ のとき、MA(∞) 表現(7.3)で定まる x_t は弱定常で、
>
> $$\mathrm{E}[x_t]=0,\qquad \gamma_0=\mathrm{Var}(x_t)=\frac{\sigma^2}{1-\rho^2},\qquad \gamma_k=\rho^k\gamma_0\quad(k\geq 0).$$

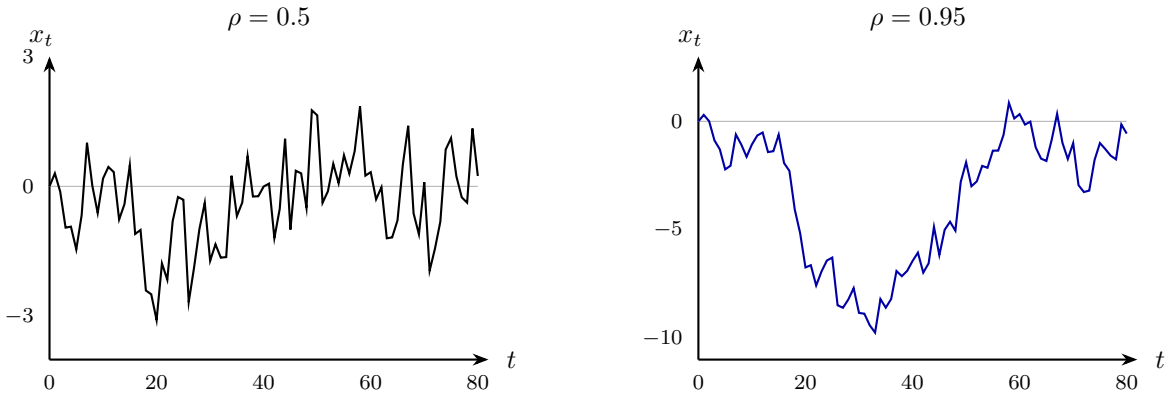
証明　各項の期待値は 0 なので $\mathrm{E}[x_t]=0$ です（無限和と期待値の交換は、係数の二乗和 $\sum\rho^{2k}$ が収束することで正当化されます。本書ではこの点は証明しません）。ε どうしは異

なる時点で無相関なので、

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\varepsilon_{t-j}\Big)\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\rho^l\varepsilon_{t-k-l}\Big)\Big] && \text{（MA}(\infty)\text{ 表現を代入）}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\rho^{k+l}\rho^l\sigma^2 && \text{（}j=k+l\text{ の項だけが残る）}\\
&= \rho^k\sigma^2\sum_{l=0}^{\infty}\rho^{2l} = \rho^k\frac{\sigma^2}{1-\rho^2} && \text{（等比級数（命題 1.2））}
\end{aligned}
$$

です。どれも t によらないので、弱定常です。 □

図 7.2　AR(1) 過程の経路：持続性の違い



$x_0 = 0$。2つの経路には同じショックの列 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{80}$（標準正規分布から発生させた乱数）を使っている。縦軸の目盛りは左右で異なる。

図の読み方

1. どちらの経路も、同じショックから作られています。違うのは、過去のショックをどれだけ覚えているか（ρ）だけです。
2. $\rho = 0.5$（黒）では、ショックの影響がすぐに消え、経路は 0 のまわりを細かく行き来します。
3. $\rho = 0.95$（青）では、ショックの影響が長く残り、同じ符号のショックが重なると、経路は 0 から大きく長く離れます。分散 $\sigma^2/(1-\rho^2)$ も、$\rho = 0.5$ のときの約8倍です。景気循環のような「波」は、持続性の高いショックから生まれます。

補足：経済学での使いどころ

RBCモデルやニューケインジアン・モデルでは、技術水準の対数 $\ln z_t$ や金融政策のショックを AR(1) 過程で表します。$\rho = 1$ の場合 $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$ は**ランダムウォーク**（単位根過程）で、分散 $t\sigma^2$ が時間とともに大きくなるので定常ではありません。ランダムウォークの時間の刻みを細かくした極限がブラウン運動です（第14章）。

7.6 ラグ演算子とVAR

ラグ演算子 L は、確率過程を1期ずらす操作 $Lx_t = x_{t-1}$ です。$L^k x_t = x_{t-k}$ となり、AR(1) 過程は $(1 - \rho L)x_t = \varepsilon_t$ と書けます。$|\rho| < 1$ なら、等比級数の公式を形式的に当てはめた

$$(1 - \rho L)^{-1} = 1 + \rho L + \rho^2 L^2 + \cdots$$

によって $x_t = (1-\rho L)^{-1}\varepsilon_t = \sum_{k} \rho^k \varepsilon_{t-k}$ となり、MA(∞) 表現が1行で得られます。$|\rho| > 1$ のときは、同じ式を $(1-\rho L)^{-1} = -(\rho L)^{-1}(1 - \rho^{-1}L^{-1})^{-1}$ と書きかえ、$L^{-1}x_t = x_{t+1}$（未来へずらす）で展開します。これは第1章の「不安定な根は前向きに解く」という原則のラグ演算子版で、第10章で前向きの解を求めるときに使います。

変数が複数あるときは、ベクトル $y_t \in \mathbb{R}^n$ について

$$y_t = A y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \mathrm{E}[\varepsilon_t] = 0, \quad \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \Omega, \quad \text{異なる時点の } \varepsilon \text{ は無相関} \tag{7.4}$$

という**VAR**（ベクトル自己回帰）を考えます。p 期前までの値に依存する AR(p) やVAR(p) も、過去の値を並べたベクトルを状態とすれば、この1次の形に書き直せます（**コンパニオン形式**。例：$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$ は $y_t = (x_t, x_{t-1})^\top$ について $A = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$）。

命題 7.11（VARの定常性と分散）

A のすべての固有値の絶対値が 1 より小さいとする。このとき $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \varepsilon_{t-k}$ は弱定常で、分散 $\Sigma = \mathrm{Var}(y_t)$ は

$$\Sigma = A \Sigma A^\top + \Omega$$

（離散時間のリャプノフ方程式）のただ一つの解である。また $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = A^k \Sigma$ である。

証明　すべての固有値の絶対値が 1 より小さいので、第2章の定理 2.6 の議論から A^k の各成分は等比数列の速さで 0 に近づき、無限和の分散は有限に定まります（収束の細部は本書では証明しません）。$y_t = A y_{t-1} + \varepsilon_t$ で、y_{t-1} は $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$ だけで決まるので ε_t と無

相関です。命題 7.1 より

$$\mathrm{Var}(y_t) = A\,\mathrm{Var}(y_{t-1})A^{\top} + \Omega$$

で、定常なら両辺の分散は等しく Σ です。一意性：Σ_1, Σ_2 が解なら、差 $\Delta = \Sigma_1 - \Sigma_2$ は $\Delta = A\Delta A^{\top}$ を満たし、繰り返すと $\Delta = A^k \Delta (A^{\top})^k \to 0$ なので $\Delta = 0$ です。共分散は、$y_t = A^k y_{t-k} + (\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-k+1}$ の和) と、後ろの項が y_{t-k} と無相関であることから従います。 □

補足：経済学での使いどころ

線形化して解いたDSGEモデルは、状態変数についての VAR(1) になります（第10章）。モデルが予測する分散・共分散はこのリャプノフ方程式で、インパルス応答（ショック ε_t が k 期後の y_{t+k} に与える影響）は A^k で計算します。

7.7 マルチンゲールと合理的期待

定義 7.12（マルチンゲール）

情報の流れ $\{\mathcal{I}_t\}$ のもとで、t 期に既知の確率変数の列 $\{M_t\}$ が、すべての t で $\mathrm{E}_t[M_{t+1}] = M_t$ を満たすとき、マルチンゲールという。$\mathrm{E}_t[e_{t+1}] = 0$ を満たす $\{e_t\}$ をマルチンゲール差分という。

マルチンゲールは「明日の値の最良の予測が今日の値である」過程で、その変化分 $M_{t+1} - M_t$ はマルチンゲール差分です。繰り返し期待値の法則から、$\mathrm{E}_t[M_{t+k}] = M_t$ がすべての $k \geq 1$ で成り立ちます。

命題 7.13（予想の改訂はマルチンゲール差分である）

確率変数 Y について $M_t = \mathrm{E}_t[Y]$ とおくと、$\{M_t\}$ はマルチンゲールである。特に、予想の改訂 $M_{t+1} - M_t$ を t 期の情報で予測することはできない（$\mathrm{E}_t[M_{t+1} - M_t] = 0$）。

証明　$\mathrm{E}_t[M_{t+1}] = \mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1}[Y]] = \mathrm{E}_t[Y] = M_t$ です（命題 7.3 の3）。 □

補足：経済学での使いどころ

- **消費のランダムウォーク仮説**：2次の効用で $\beta(1+r) = 1$ なら、確率的なオイラー方程式は $\mathrm{E}_t[c_{t+1}] = c_t$ となり、消費はマルチンゲールです。消費の変化は、新しい情報（所得の予想の改訂）だけで起こります。
- **資産価格**：配当の流列の割引現在価値の予想は、命題 7.13 により、適切に割り引けばマルチンゲールになります。「価格の予測できない変動」は、合理的期待の帰結です（第8章）。

7.8 大数の法則・中心極限定理・エルゴード性

データの数 n が大きくなったとき、標本平均 $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ がどう振る舞うかを述べるのが、次の2つの定理です。ここでは主張だけを述べ、証明はしません。

定理 7.14（大数の法則と中心極限定理）

$x_1, x_2, \ldots$ が互いに独立で同じ分布（期待値 μ、分散 $\sigma^2 < \infty$）に従うとする。

1. （大数の法則）任意の $\delta > 0$ について、$n \to \infty$ のとき $\Pr(|\bar{x}_n - \mu| > \delta) \to 0$。
2. （中心極限定理）$n \to \infty$ のとき、$\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu)$ の分布は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に近づく。

数式の読み方：定理の読み方

- 1の収束を**確率収束**といいます。「データが増えると、標本平均はほぼ確実に真の平均のすぐ近くに来る」ということです。分散が有限なら、チェビシェフの不等式 $\Pr(|\bar{x}_n - \mu| > \delta) \le \sigma^2/(n\delta^2)$ から直ちに示せます。
- 2では、$\bar{x}_n$ そのものは μ に縮んでいくので、ずれを $\sqrt{n}$ 倍に拡大して分布の形を見ています。元の分布の形によらず正規分布が現れる点が重要です。

マクロ経済学の時系列は、独立ではありません。しかし、定常なマルコフ連鎖や $|\rho| < 1$ の AR(1) 過程では、1本の長い時系列の時間平均 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(x_t)$ が、定常分布のもとでの期待値に収束することが知られています（**エルゴード定理**。本書では証明しません）。これによって、1つの経済の長い時系列から、モデルの定常分布の性質（平均・分散・自己相関）を推定でき、逆に、モデルをシミュレーションした時間平均でモデルのモーメントを計算できます。異質的家計モデルで「1人の家計の長い生涯の平均」と「多数の家計の横断面の平均」を同一視するのも、この定理によります。

7.9 正規分布と対数正規分布

平均 μ、分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の密度関数は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\!\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ です。正規分布に従う確率変数ベクトルの線形変換は、また正規分布に従います（平均と分散は命題 7.1 で計算できます）。X が正規分布に従うとき、e^X の分布を**対数正規分布**といいます。

命題 7.15（対数正規分布の期待値）

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ なら $\mathrm{E}[e^X] = e^{\mu + \sigma^2/2}$。

証明　指数の部分を平方完成します。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[e^X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Bigl(x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Bigr)\mathrm{d}x && \text{（期待値の定義）} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Bigl(-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{\sigma^2}{2}\Bigr)\mathrm{d}x && \text{（平方完成）} \\
&= e^{\mu+\sigma^2/2} && \text{（}N(\mu+\sigma^2,\sigma^2)\text{ の密度の積分は 1）}
\end{aligned}
$$

です。2行目は、$-\frac{(x-\mu)^2-2\sigma^2 x}{2\sigma^2} = -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ を展開して確かめられます。　□

補足：経済学での使いどころ

e^x は凸関数なので、ジェンセンの不等式から $\mathrm{E}[e^X] \geq e^{\mu}$ です。その差を正確に表すのが $\sigma^2/2$ の項です。確率的なオイラー方程式で消費の伸び率を対数正規分布と仮定すると、期待値が閉じた形で計算でき、安全利子率とリスク・プレミアムの公式が得られます（第8章）。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 条件付き期待値と繰り返し期待値の法則 → 合理的期待、確率的オイラー方程式の前向きの解、予測誤差の無相関性。
- マルコフ連鎖と定常分布 → 景気の局面・雇用状態・所得の過程、ショックの離散化、異質的家計の定常分布。
- AR(1) とVAR → 技術ショック・政策ショックの過程、線形化したDSGEモデルの解、分散とインパルス応答。
- マルチンゲール → 消費のランダムウォーク、資産価格の予測不可能性。

要点

- 情報は状態の分割で表し、条件付き期待値は「情報が同じ状態の上での平均」です。繰り返し期待値の法則 $\mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1}[Y]] = \mathrm{E}_t[Y]$ が合理的期待の計算の基本です。
- マルコフ連鎖の分布は $p_{t+1} = p_t\Pi$ で動きます。どの状態からも共通に移れる確率 ε が正なら、$p \mapsto p\Pi$ は縮小写像で、定常分布がただ一つ存在し、どこから出発してもそこに収束します。
- $|\rho| < 1$ の AR(1) 過程は弱定常で、分散は $\sigma^2/(1-\rho^2)$、自己相関は ρ^k です。VARでは固有値の絶対値が 1 より小さいことが定常性の条件で、分散はリャプノフ方程式で求まります。
- $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ なら $\mathrm{E}[e^X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$ です。

次の章へ　次の章では、この章の道具を使って、第6章のベルマン方程式を不確実性のある問題に広げます。確率的オイラー方程式から、確率的割引因子による資産価格の公式が導かれます。

大学院とのつながり　時系列分析（AR・VAR・単位根）、合理的期待モデル、資産価格理論は、どれもこの章の確率過程の言葉で書かれています。測度論に基づく確率論は、連続的な状態を厳密に扱うために必要になりますが、計算の規則はこの章と同じです。

第8章

確率的動的計画法と資産価格

ここまでの流れ　第6章では、将来が確実な問題について、価値関数の存在・一意性と、オイラー方程式による最適経路の特徴づけを証明しました。第7章では、不確実な将来を表す条件付き期待値とマルコフ連鎖を学びました。

前提知識　第6章の再帰的な最適化問題（定義 6.1）、価値関数の存在（定理 6.8）、ベンヴェニスト＝シャインクマンの定理（定理 6.11）。第5章のブラックウェルの十分条件（定理 5.10）。第7章の条件付き期待値（命題 7.3）、マルコフ連鎖、対数正規分布（命題 7.15）。第1章の前向きの解とバブル（定理 1.5）。状態価格と資産価格の基本定理（ミクロ版の「確率と期待効用」の章）。

この章の問い　将来が不確実なとき、ベルマン方程式とオイラー方程式はどう変わるのでしょうか。その確率的なオイラー方程式から、株や債券の価格について何が言えるのでしょうか。

この章で分かること　確率的ベルマン方程式と解の存在（証明）、確率的オイラー方程式、ショックつきの最適成長モデル、確率的割引因子（SDF）による資産価格の公式、状態価格との対応、リスク・プレミアム、ルーカスの木のモデル、マルコフ連鎖によるショックの離散化（タウチェン法）。

8.1　確率的ベルマン方程式

第6章の問題に、外生的なショック z_t を加えます。ショックは有限個の値 $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$ をとるマルコフ連鎖で、推移確率行列を Π とします（連続的なショックは8.4節の方法でマルコフ連鎖に近似します）。t 期のはじめに (x_t, z_t) が観察され、意思決定者は来期の内生的な状態 $x_{t+1} \in \Gamma(x_t, z_t)$ を選び、利得 $F(x_t, x_{t+1}, z_t)$ を得ます。選択は t 期までの情報だけに依存してよく（将来のショックを先取りできない）、目的は期待割引利得 $\mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}, z_t)$ の最大化です。

第6章と同じく「今期の選択」と「来期以降の最適な価値」に分けると、来期の価値が不確実なので、その条件付き期待値をとった

$$v(x, z_i) = \max_{y \in \Gamma(x, z_i)} \left\{ F(x, y, z_i) + \beta \sum_{j=1}^{m} \Pi_{ij}\, v(y, z_j) \right\} \tag{8.1}$$

が得られます。これを**確率的ベルマン方程式**といいます。$\sum_j \Pi_{ij} v(y, z_j) = \mathrm{E}[v(y, z') \mid z = z_i]$ です。

数式の読み方：式の読み方

- 状態は (x, z) の組です。今期の z は来期の z' を予測する手がかりになる（Π の第 i 行が来期の分布を与える）ので、状態に入ります。ショックが毎期独立なら、Π のどの行も同じで、z は利得を通じてだけ効きます。
- 選ぶのは「来期の x」という一つの値ですが、それは z に依存してよいので、解は政策関数 $y = g(x, z)$ の形をとります。

定理 8.1（確率的ベルマン方程式の解の存在・一意性）

$X \subset \mathbb{R}^n$ は閉集合、各 $z \in Z$ について対応 $\Gamma(\cdot, z)$ は空でないコンパクトな値をとる連続な対応、$F(\cdot, \cdot, z)$ は有界で連続とする。$X \times Z$ 上の有界な関数で、各 z について x の連続関数であるものの全体を $C(X \times Z)$ とし、上限ノルムを入れる。このとき

1. (8.1)の右辺で定まる写像 $T : C(X \times Z) \to C(X \times Z)$ は係数 β の縮小写像で、ベルマン方程式の解 v がただ一つ存在する。任意の v_0 から始めた反復 $T^n v_0$ は v に収束する。
2. 各 (x, z) で最大値を達成する y の集合 $G(x, z)$ は空でなく、$G(\cdot, z)$ は上半連続である。

証明のアイデア

確率的になっても、ベルマン作用素に加わる操作は「確率をウェイトにした加重平均 $\sum_j \Pi_{ij} v(y, z_j)$」だけです。加重平均は、大小関係を保ち（単調性）、定数 a を足せば結果もちょうど a だけ増えます（割引の条件にそのまま効く）。だから、ブラックウェルの2条件が決定論の場合と同じ2行で確かめられます。

証明

方針　$C(X \times Z)$ が完備で、T が $C(X \times Z)$ をそれ自身に写し、ブラックウェルの2条件を満たすことを示します。

ステップ1　空間と写像

Z は有限集合なので、$C(X \times Z)$ は $C(X)$ を m 個並べたものと同じで、各成分の完備性（定理 5.6）から完備です。$v \in C(X \times Z)$ なら、z_i を固定したとき、$y \mapsto F(x, y, z_i) + \beta \sum_j \Pi_{ij} v(y, z_j)$ は連続関数の有限個の和なので (x, y) について連続かつ有界です。ベルジュの最大値定理（ミクロ版の「連続性・最大値定理・対応」の章）より、その最大値 $(Tv)(x, z_i)$ は x の連続関数で、最大値を達成する y の集合 $G(x, z_i)$ は空でなく上半連続です。これで2と、$Tv \in C(X \times Z)$ が分かります。

ステップ2　単調性

すべての点で $v \le w$ なら、すべての y, i で $\sum_j \Pi_{ij} v(y, z_j) \le \sum_j \Pi_{ij} w(y, z_j)$（ウェイト $\Pi_{ij} \ge 0$）です。最大化の対象が大きくなるので、$Tv \le Tw$ です。

ステップ3　割引

定数 $a \ge 0$ について、$\sum_j \Pi_{ij}(v(y, z_j) + a) = \sum_j \Pi_{ij} v(y, z_j) + a$（行の和が 1）なので、$T(v + a) = Tv + \beta a$ です。

ステップ4　結論

定理 5.10 の証明は X を $X \times Z$ に置きかえてもそのまま成り立つので、T は係数 β の縮小写像です。縮小写像の原理（定理 5.8）から1が従います。　□

数式の読み方：決定論の結果のうち、そのまま成り立つもの

第6章の結果は、証明の中の「$v(y)$」を「$\sum_j \Pi_{ij} v(y, z_j)$」に置きかえれば、ほぼそのまま成り立ちます。

- **単調性・凹性**：加重平均は増加関数・凹関数の性質を保つので、定理 6.9・定理 6.10 と同じ仮定（z ごとに）のもとで、$v(\cdot, z)$ は増加・狭義凹で、政策関数 $g(\cdot, z)$ は一価で連続です（系 5.9 を使う証明がそのまま通ります）。
- **微分可能性**：z を固定すればベンヴェニスト＝シャインクマンの定理がそのまま使え、包絡線条件 $v_x(x, z) = F_x(x, g(x, z), z)$ が成り立ちます。
- **逐次問題との同値性**：ベルマン方程式の解が、確率的な逐次問題（ショックの履歴に依存する計画を選ぶ問題）の価値関数に一致することも成り立ちます。ショックが有限個の値をとる場合は、ショックの履歴が有限個なので第6章と同じ議論が使えますが、記号が重くなるので本書では証明しません。連続的なショックの場合には、可測性の問題があり、測度論が必要です。

8.2　確率的オイラー方程式

内点解で v が微分可能なら、(8.1)の最大化の一階条件と包絡線条件は

$$F_y(x, y, z_i) + \beta \sum_j \Pi_{ij} v_x(y, z_j) = 0, \qquad v_x(x, z_i) = F_x(x, g(x, z_i), z_i)$$

です。包絡線条件を1期先にずらして一階条件に代入すると、**確率的オイラー方程式**

$$F_y(x_t, x_{t+1}, z_t) + \beta \, \mathrm{E}_t\big[F_x(x_{t+1}, x_{t+2}, z_{t+1})\big] = 0 \tag{8.2}$$

が得られます。決定論の式（第6章）の来期の項に、条件付き期待値がついただけです。横断性条件は $\lim_{t\to\infty}\beta^t \mathrm{E}_0[F_x(x_t, x_{t+1}, z_t)\, x_t] = 0$ になり、標準的な仮定のもとで、オイラー方程式と合わせて最適性の十分条件になります（決定論の定理 6.13 と同じ方針で示せます。本書では証明しません）。

計算例：ショックつきの最適成長モデル

$\max \mathrm{E}_0 \sum_t \beta^t u(c_t)$、$c_t + k_{t+1} = z_t f(k_t) + (1-\delta)k_t$ とします。$x = k$、$F(k, k', z) = u(zf(k) + (1-\delta)k - k')$ なので、$F_y = -u'(c)$、$F_x = u'(c)(zf'(k) + 1 - \delta)$ で、(8.2)は

$$u'(c_t) = \beta\, \mathrm{E}_t\Big[u'(c_{t+1})\big(z_{t+1} f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\big)\Big]$$

となります。「今日1単位の消費をあきらめる限界費用 = 来期の収益で得られる限界効用の期待値の割引値」です。
対数効用 $u = \ln c$、$f(k) = k^\alpha$、$\delta = 1$、$\ln z_{t+1} = \phi \ln z_t + \varepsilon_{t+1}$（$\mathrm{E}_t[\varepsilon_{t+1}] = 0$、$0 \le \phi < 1$）の場合は、$v(k, z) = A + B \ln k + D \ln z$ と推測して確かめられます。

$$\frac{1}{zk^\alpha - k'} = \frac{\beta B}{k'} \;\Rightarrow\; k' = \frac{\beta B}{1 + \beta B}\, zk^\alpha \qquad \text{（一階条件（E[v] の k' 微分は B/k'））}$$

$$B = \alpha + \alpha\beta B \qquad \text{（$\ln k$ の係数を比べる）}$$

$$D = 1 + \beta B + \beta\phi D \qquad \text{（$\ln z$ の係数を比べる（$\mathrm{E}_t[\ln z_{t+1}] = \phi \ln z_t$））}$$

したがって $B = \alpha/(1-\alpha\beta)$ は確実な場合と同じで、政策関数は $k' = \alpha\beta z k^\alpha$、$D = \dfrac{1}{(1-\alpha\beta)(1-\beta\phi)}$ です。貯蓄率 $\alpha\beta$ がショックに反応しないのは対数効用・完全減耗という特殊な仮定によるもので、一般のモデルでは数値的に解くか、第9章の線形近似を使います。D は、ショックが持続的（ϕ が 1 に近い）ほど、今日の良いショックの価値が大きいことを表しています。

補足：経済学での使いどころ

この確率的な最適成長モデルが、実物的景気循環（RBC）モデルの骨格です（労働の選択を加えたものを第11章で解きます）。所得ショックを受ける家計の消費・貯蓄問題も、同じ確率的オイラー方程式で特徴づけられ、借入制約を加えると異質的家計モデル（第12章）になります。

8.3 確率的割引因子と資産価格

確率的オイラー方程式を、資産を売買する家計に当てはめると、資産価格の一般的な公式が得られます。家計は資産 j を θ_t 単位買い、価格は p_t、来期に配当 d_{t+1} を受け取って価格 p_{t+1} で売れるとします。今期の消費を p_t だけ減らして1単位買い、来期にその売却額と配当を消費する、という小さな変更が最適な計画を改善しないための条件（オイラー方程

式）は

$$p_t\,u'(c_t) = \beta\,\mathrm{E}_t\big[u'(c_{t+1})(p_{t+1}+d_{t+1})\big]$$

です。両辺を $u'(c_t)$ で割ると、資産価格の基本的な公式が得られます。

命題 8.2（確率的割引因子による価格づけ）

$m_{t+1} = \beta u'(c_{t+1})/u'(c_t)$ とおく。オイラー方程式は

$$p_t = \mathrm{E}_t\big[m_{t+1}(p_{t+1}+d_{t+1})\big], \qquad \text{同じことだが} \qquad 1 = \mathrm{E}_t\big[m_{t+1}R_{t+1}\big]$$

と書ける。ここで $R_{t+1} = (p_{t+1}+d_{t+1})/p_t$ は粗収益率である。どの資産についても同じ m_{t+1} が使える。

---

m_{t+1} を**確率的割引因子**（SDF）といいます。p_t と $u'(c_t)$ は t 期に既知なので、割り算は条件付き期待値の中に入れられます（命題 7.3 の2）。

数式の読み方：状態価格との対応

ショックがマルコフ連鎖で、来期の状態が z_j のときの来期の消費を c_j とすると、t 期に z_i にいるとき

$$p_t = \sum_j \Pi_{ij}\,\beta\frac{u'(c_j)}{u'(c_t)}\,(p_j+d_j) = \sum_j \psi_{ij}(p_j+d_j), \qquad \psi_{ij} = \beta\,\Pi_{ij}\frac{u'(c_j)}{u'(c_t)}$$

です。ψ_{ij} は「来期に状態 z_j が起きたときだけ1円を支払う証券（アロー証券）の今期の価格」、つまりミクロ版の「確率と期待効用」の章の**状態価格**です。そこでは、裁定機会がないことと状態価格（$\psi \geq 0$）が存在することが同値であると証明しました。ここでは、最適化する家計の限界効用が、その状態価格を具体的に与えています。限界効用が高い状態（不況で消費が少ない状態）ほど、そこで支払う証券は高く評価されます。

命題 8.3（安全利子率とリスク・プレミアム）

安全資産（来期の収益率 R^f_{t+1} が t 期に既知）について $R^f_{t+1} = 1/\mathrm{E}_t[m_{t+1}]$ である。任意の資産の収益率 R_{t+1} について

$$\mathrm{E}_t[R_{t+1}] - R^f_{t+1} = -R^f_{t+1}\,\mathrm{Cov}_t\big(m_{t+1}, R_{t+1}\big).$$

証明　安全資産では R^f を期待値の外に出せるので $1 = R^f\mathrm{E}_t[m]$ です（以下、添字を省き

ます）。一般の資産では、共分散の定義 $\mathrm{Cov}(m,R)=\mathrm{E}[mR]-\mathrm{E}[m]\mathrm{E}[R]$ を使って

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{E}[mR] = \mathrm{E}[m]\mathrm{E}[R] + \mathrm{Cov}(m,R) && \text{（共分散の定義）} \\ &= \frac{\mathrm{E}[R]}{R^f} + \mathrm{Cov}(m,R) && \text{（}\mathrm{E}[m]=1/R^f\text{）} \end{aligned}$$

となり、両辺に R^f を掛けて整理すると結論を得ます。 □

補足：経済学での使いどころ

期待収益率が安全利子率を上回る分（リスク・プレミアム）は、収益率の分散ではなく、SDF との共分散で決まります。不況（限界効用が高く m が大きいとき）に収益が低い資産は、$\mathrm{Cov}(m,R)<0$ なので高い期待収益率を要求されます。消費の伸び率を対数正規分布とし、CRRA型効用 $u'(c)=c^{-\gamma}$ を使うと、命題 7.15 から $\ln R^f=\rho+\gamma g-\frac{1}{2}\gamma^2 s^2$（$\rho=-\ln\beta$、$g$ と s^2 は消費の対数の伸び率の平均と分散）が得られます。最後の項は予備的貯蓄の効果です。

価格の前向きの解とバブル

$p_t=\mathrm{E}_t[m_{t+1}(p_{t+1}+d_{t+1})]$ は、第1章の資産価格の式 $p_t=(p_{t+1}+d)/(1+r)$ の確率版です。繰り返し期待値の法則で前向きに代入を繰り返すと、$M_{t,t+k}=m_{t+1}m_{t+2}\cdots m_{t+k}$ として

$$p_t=\mathrm{E}_t\Big[\sum_{k=1}^{K} M_{t,t+k}\,d_{t+k}\Big]+\mathrm{E}_t\big[M_{t,t+K}\,p_{t+K}\big]$$

となります。最後の項が $K\to\infty$ で 0 になる（バブルがない）とき、価格は配当の流列を SDF で割り引いた期待現在価値（ファンダメンタル価値）に等しくなります。家計の最適化問題では、横断性条件がバブルを排除します。

ルーカスの木のモデル

資産価格を、モデルの中で完全に決めてみます。果物（配当）d_t を生む木が1本あり、その株を代表的家計が売買します。果物は貯蔵できないので、均衡では消費＝配当 $c_t=d_t$ です。配当はマルコフ連鎖に従い、状態 z_i での配当を $d_i>0$ とします。株価も状態の関数 p_i とすると、命題 8.2 は

$$u'(d_i)\,p_i=\beta\sum_j \Pi_{ij}\,u'(d_j)(p_j+d_j)\qquad (i=1,\dots,m) \tag{8.3}$$

という、p についての線形の連立方程式になります。

命題 8.4（ルーカスの木の価格）

(8.3)の解はただ一つ存在し、$f_i = u'(d_i)p_i$、$h_i = u'(d_i)d_i$ を並べたベクトルを f, h とすると

$$f = (I - \beta\Pi)^{-1}\beta\Pi h = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \Pi^k h.$$

特に対数効用 $u = \ln c$ なら、$p_i = \dfrac{\beta}{1-\beta}\, d_i$ である。

証明　(8.3)は $f = \beta\Pi(f + h)$、つまり $(I - \beta\Pi)f = \beta\Pi h$ です。写像 $f \mapsto \beta\Pi(f+h)$ は、上限ノルム $\|f\| = \max_i |f_i|$ について係数 β の縮小写像です（Π の各行は和が 1 の非負のウェイトなので $\|\Pi f\| \le \|f\|$）。縮小写像の原理から解はただ一つで、反復 $f_{n+1} = \beta\Pi(f_n + h)$ を $f_0 = 0$ から始めると $f_n = \sum_{k=1}^{n} \beta^k \Pi^k h$ が得られ、その極限が解です。対数効用では $h_i = u'(d_i)d_i = 1$ なので、$\Pi^k h = h$（行の和が 1）から $f_i = \sum_{k \ge 1} \beta^k = \beta/(1-\beta)$、$p_i = f_i / u'(d_i) = \beta d_i/(1-\beta)$ です。 □

補足：経済学での使いどころ

ルーカスの木のモデルは、資産価格理論の出発点です。対数効用では、配当が増えて価格が上がる効果と、消費が増えて限界効用が下がる（将来の配当の評価が下がる）効果がちょうど打ち消し合い、価格・配当比率が一定になります。危険回避度が1より大きいCRRA型効用では、この打ち消し合いが崩れます。この「経済全体の消費で価格を決める」モデルが、エクイティ・プレミアム・パズルなどの消費に基づく資産価格研究の基本形です。

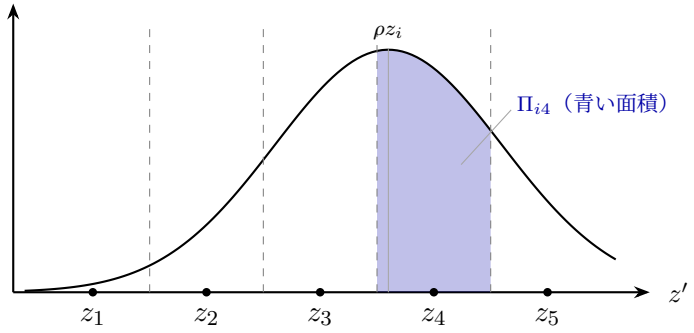
8.4　マルコフ連鎖による離散化と数値解法

技術水準などのショックは、ふつう AR(1) 過程 $z' = \rho z + \varepsilon'$（$\varepsilon' \sim N(0, \sigma^2)$）で表されます。これを数値的に扱うには、有限個の格子点 $z_1 < \cdots < z_m$（間隔 h）の上のマルコフ連鎖に近似します。**タウチェン（Tauchen）法**では、z_i から出発したときに、z' が格子点 z_j のまわりの区間 $[z_j - h/2,\, z_j + h/2]$ に入る確率を Π_{ij} とします。標準正規分布の分布関数を Φ とすると、内側の格子点では

$$\Pi_{ij} = \Phi\!\left(\frac{z_j + h/2 - \rho z_i}{\sigma}\right) - \Phi\!\left(\frac{z_j - h/2 - \rho z_i}{\sigma}\right)$$

で、両端の格子点には、区間の外側の確率もすべて含めます（各行の和が 1 になる）。

図 8.1　タウチェン法：条件付き分布を格子の区間に割り当てる



z' の条件付き分布 $N(\rho z_i, \sigma^2)$。図では $\rho z_i = 0.3$、$\sigma = 0.5$、格子の間隔 $h = 0.5$。点線は区間の境界。

図の読み方

1. 黒い曲線は、今期 z_i にいるときの来期の z' の分布です。この分布を、点線で区切った区間ごとに切り分けます。
2. 青い面積が、格子点 z_4 に割り当てる確率 Π_{i4} です。5つの区間の面積を並べたものが Π の第 i 行になります。
3. 格子を細かく、範囲を広くとるほど、元の AR(1) 過程によく近づきます。持続性 ρ が 1 に近いと近似の精度が落ちやすく、その場合は別の方法（Rouwenhorst（ルーウェンホルスト）法など）が使われます。

ショックを離散化すると、確率的ベルマン方程式の価値関数反復は、決定論の場合とほとんど同じ手順になります。

コードで確かめる：確率的な価値関数反復（擬似コード）

1. 資本の格子 $k_1, \dots, k_N$ とショックの格子 $z_1, \dots, z_m$、推移確率行列 Π を用意し、$N \times m$ の表 V を 0 で初期化する。
2. 期待値の表を計算する：$EV = V\,\Pi^{\top}$（$EV[a,i] = \sum_j \Pi_{ij} V[a,j]$ は、来期の資本 k_a、今期のショック z_i のときの来期の価値の期待値）。
3. 各 (k_b, z_i) で、$u\big(z_i f(k_b) + (1-\delta)k_b - k_a\big) + \beta\, EV[a,i]$ を a について最大化し、新しい表 $V^{\text{new}}[b,i]$ と政策 $g[b,i] = a^*$ を得る。
4. $\max |V^{\text{new}} - V|$ が十分小さくなるまで 2〜3 を繰り返す（定理 8.1 から収束が保証され、誤差は毎回 β 倍以下に縮む）。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 確率的ベルマン方程式と解の存在 → RBCモデル、所得ショックのある消費・貯蓄問題、投資、サーチ。数値解法の収束の保証。
- 確率的オイラー方程式 → 消費の動学、予備的貯蓄、線形化の出発点（第9章）。
- SDF と $1 = \mathrm{E}_t[mR]$ → 資産価格理論全体の共通の公式。状態価格・リスク中立確率との対応、リスク・プレミアムの共分散による説明。
- タウチェン法 → 連続的なショックの数値計算、異質的家計モデルの所得過程。

要点

- ショックがマルコフ連鎖なら、確率的ベルマン方程式の作用素はブラックウェルの条件を満たす縮小写像で、価値関数はただ一つ存在します。単調性・凹性・微分可能性も、決定論の場合と同じように成り立ちます。
- 確率的オイラー方程式は、決定論の式の来期の項に条件付き期待値をつけたものです。
- 資産価格は $p_t = \mathrm{E}_t[m_{t+1}(p_{t+1} + d_{t+1})]$、$m_{t+1} = \beta u'(c_{t+1})/u'(c_t)$ で決まり、$\beta \Pi_{ij} u'(c_j)/u'(c_t)$ が状態価格です。リスク・プレミアムは $-R^f \mathrm{Cov}(m, R)$ です。
- 連続的なショックは、タウチェン法などでマルコフ連鎖に近似して数値的に解きます。

次の章へ　確率的なモデルを解析的に解けるのは、対数効用・完全減耗のような特殊な場合だけです。次の章では、一般のモデルを定常状態のまわりで近似して線形の式に直す方法（対数線形化と摂動法）を学びます。

大学院とのつながり　大学院の資産価格理論は、ほぼすべて $1 = \mathrm{E}_t[mR]$ という1本の式の上に組み立てられています。マクロ金融のモデルでは、SDF を誰の限界効用で作るか（代表的家計か、金融仲介機関か）が、モデルの違いを生みます。

第9章

対数線形化と摂動法

ここまでの流れ　第8章では、確率的なモデルの最適条件が確率的オイラー方程式になることを見ました。しかし、それを解析的に解けるのは、対数効用・完全減耗のような特殊な場合だけでした。

前提知識　多変数のテイラーの定理と陰関数定理（ミクロ版の「勾配・陰関数定理・ヘッセ行列・同次関数」の章）。第1章の非線形の差分方程式の局所安定性（定理 1.6）、第2章の鞍点経路（定理 2.8）、第3章の線形化の原理（定理 3.12）。第8章の確率的オイラー方程式。

この章の問い　非線形の確率的なモデルを、どうすれば第2章の線形の道具で扱える形に直せるのでしょうか。その近似はどんな意味で正しいのでしょうか。

この章で分かること　テイラー近似と定常状態まわりの線形化、対数線形化の定義と規則（証明）、オイラー方程式と資源制約の対数線形化、摂動法の考え方、1次近似の確実性等価性（証明）、2次近似とリスクの効果（発展）。

9.1　近似の考え方

DSGEモデルの均衡条件は、多くの場合、次の形にまとめられます。

$$\mathrm{E}_t\big[f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t)\big] = 0. \tag{9.1}$$

x_t は先決変数（資本や外生ショック）、y_t はジャンプ変数（消費・労働・価格など）を並べたベクトル、f は最適化条件と市場清算条件を並べたベクトル値の関数です。ショックがない場合に変数が一定の値 $(\bar{x}, \bar{y})$ にとどまる点、つまり $f(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) = 0$ の解を**確定的定常状態**（以下、定常状態）といいます。

近似の方針は、第1・3章の線形化と同じです。

1. 定常状態 $(\bar{x}, \bar{y})$ を求める（非線形の連立方程式だが、時間が入らないので解きやすい）。
2. f を定常状態のまわりで1次のテイラー近似に置きかえ、線形の式にする。
3. 線形のモデルを第10章の方法で解く。

ショックが小さく、経済が定常状態の近くにとどまる限り、この近似の解は真の解に近いと期待できます。どの意味で近いのかを、9.5節で摂動法として正確に述べます。

9.2　テイラー近似と線形化

定理 9.1（1次のテイラー近似）

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が点 $\bar{x}$ の近くで連続微分可能なら、

$$f(x)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^{\top}(x-\bar{x})+R(x),\qquad \lim_{x\to\bar{x}}\frac{R(x)}{\|x-\bar{x}\|}=0.$$

ミクロ版の「勾配・陰関数定理・ヘッセ行列・同次関数」の章で述べた結果です（f が微分可能であることの定義そのものです）。剰余 $R(x)$ が $\|x-\bar{x}\|$ より速く 0 に近づくことを $R(x)=o(\|x-\bar{x}\|)$ と書き、「1次より高次の項」と呼びます。ベクトル値の関数では、勾配 $\nabla f^{\top}$ をヤコビ行列 Df に置きかえます。

用語の説明：線形化と高次の項

- **線形化**：関数をその点での接線（接平面）で置きかえること。変数を定常状態からの差 $\tilde{x}=x-\bar{x}$ で表すと、$f(x)\approx Df(\bar{x})\,\tilde{x}$ という1次式になります（$f(\bar{x})=0$ のとき）。
- **$o(\cdot)$ の記号**：$R=o(\varepsilon)$ は「$R/\varepsilon\to 0$」の意味です。「ずれ ε が小さいとき、R は ε に比べて無視できる」と読みます。

9.3　対数線形化

マクロ経済学では、定常状態からの差ではなく、定常状態からの**変化率**で線形化するのが普通です。

定義 9.2（対数乖離）

正の変数 x と定常状態 $\bar{x}>0$ について、$\hat{x}=\ln x-\ln\bar{x}$ を x の対数乖離という。

$\hat{x}=\ln(1+(x-\bar{x})/\bar{x})\approx(x-\bar{x})/\bar{x}$ なので、$\hat{x}$ は「定常状態から何%離れているか」を表します（$\hat{x}=0.01$ なら約1%上）。変化率で表すと、単位によらない比較ができ、成長するモデルでも扱いやすく、べき乗の関数が正確に1次式になる、という利点があります。

命題 9.3（対数線形化の規則）

正の変数 x, y と定数 a について、次が成り立つ（$\approx$ は1次より高次の項を無視した等号）。

1. （積とべき）$z = x^a y$ なら、$\hat{z} = a\hat{x} + \hat{y}$（近似ではなく等号）。
2. （和）$z = x + y$ なら、$\hat{z} \approx \dfrac{\bar{x}}{\bar{z}}\hat{x} + \dfrac{\bar{y}}{\bar{z}}\hat{y}$。
3. （一般の関数）$z = g(x_1, \dots, x_n)$ で g が連続微分可能なら、$\hat{z} \approx \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \hat{x}_i$。ここで $\varepsilon_i = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x})\dfrac{\bar{x}_i}{\bar{z}}$ は定常状態での弾力性である。
4. （期待値）E_t は線形なので、$\widehat{\mathrm{E}_t[x_{t+1}]} \approx \mathrm{E}_t[\hat{x}_{t+1}]$。

証明　1は、両辺の対数をとって $\ln z = a \ln x + \ln y$、定常状態でも $\ln \bar{z} = a \ln \bar{x} + \ln \bar{y}$ なので、差をとれば正確に成り立ちます。3を示せば2はその特別な場合（$\partial g / \partial x_i = 1$）です。$x_i = \bar{x}_i e^{\hat{x}_i}$ と書き、$\phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \ln g(\bar{x}_1 e^{\hat{x}_1}, \dots, \bar{x}_n e^{\hat{x}_n})$ とおくと $\hat{z} = \phi(\hat{x}) - \phi(0)$ です。連鎖律より

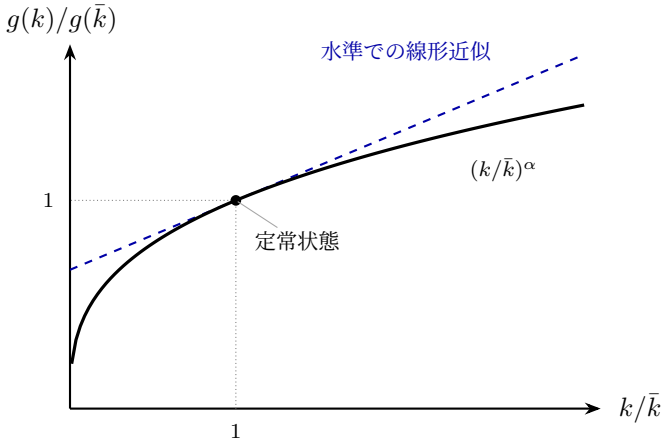
$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_i}(0) = \frac{1}{g(\bar{x})}\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) \cdot \bar{x}_i e^{0} = \varepsilon_i$$

なので、ϕ に1次のテイラー近似（定理 9.1）を当てはめると $\hat{z} = \sum_i \varepsilon_i \hat{x}_i + o(\|\hat{x}\|)$ です。4は、$x_{t+1} = \bar{x} e^{\hat{x}_{t+1}} \approx \bar{x}(1 + \hat{x}_{t+1})$ の期待値をとれば $\mathrm{E}_t[x_{t+1}] \approx \bar{x}(1 + \mathrm{E}_t[\hat{x}_{t+1}])$ となることから従います。 □

数式の読み方：規則の読み方

- 1は「積の変化率は変化率の和、a 乗の変化率は変化率の a 倍」という学部で使う近似を、対数で正確にしたものです。コブ＝ダグラス型の生産関数 $y = z k^{\alpha} n^{1-\alpha}$ は $\hat{y} = \hat{z} + \alpha\hat{k} + (1-\alpha)\hat{n}$ と正確に線形になります。
- 2は「和の変化率は、各項の変化率をそのシェアで加重平均したもの」です。資源制約 $y = c + i$ は $\hat{y} \approx \frac{\bar{c}}{\bar{y}}\hat{c} + \frac{\bar{i}}{\bar{y}}\hat{i}$ になります。
- 4の近似は、1次の範囲では「期待値と対数の順番を入れかえてよい」ということです。2次以上では、ジェンセンの不等式の分（分散の項）がずれとして残ります（9.6節）。

図 9.1　水準での線形近似と対数線形近似



政策関数 $g(k) = \alpha\beta z k^{\alpha}$（$z$ は一定、$\alpha = 1/3$）を定常状態の値で割ったもの。対数線形近似 $\hat{k}' = \alpha\hat{k}$ は、水準に戻すと $(k/\bar{k})^{\alpha}$ そのもので、黒の曲線と一致する。

図の読み方

1. 黒の曲線は、第8章で求めた政策関数 $k' = \alpha\beta z k^{\alpha}$ です。青の点線は、定常状態での接線（水準での線形近似）です。
2. 定常状態の近くでは両者はほぼ一致しますが、k が定常状態の半分や2倍になると、接線の誤差は目に見えて大きくなります。
3. 対数で線形化すると $\hat{k}' = \alpha\hat{k}$ で、これは近似ではなく正確な式です。べき乗の関数が多いマクロ経済モデルでは、対数線形化のほうが、定常状態から離れても誤差が小さいことが多いのです。

9.4　例：オイラー方程式と資源制約

第8章の最適成長モデルで、効用を $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$、$f(k) = k^{\alpha}$、技術を z_t とします。均衡条件は

$$1 = \mathrm{E}_t\left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma} R_{t+1}\right], \qquad R_{t+1} = \alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta, \tag{9.2}$$

$$k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t - c_t \tag{9.3}$$

です。定常状態（$z = 1$）では、オイラー方程式から $\bar{R} = 1/\beta$、つまり $\alpha\bar{k}^{\alpha-1} = 1/\beta - 1 + \delta$ で $\bar{k}$ が決まり、資源制約から $\bar{c} = \bar{k}^{\alpha} - \delta\bar{k}$ です。

計算例：対数線形化

オイラー方程式(9.2)の期待値の中は $\beta\exp\bigl(-\gamma(\ln c_{t+1}-\ln c_t)+\ln R_{t+1}\bigr)$ です。定常状態で $\beta\bar{R}=1$ なので、指数の中を対数乖離で書き、1次近似すると

$$
\begin{aligned}
1 &\approx \mathrm{E}_t\bigl[1-\gamma(\hat{c}_{t+1}-\hat{c}_t)+\hat{R}_{t+1}\bigr] && (e^u\approx 1+u)\\
\hat{c}_t &= \mathrm{E}_t\hat{c}_{t+1}-\frac{1}{\gamma}\mathrm{E}_t\hat{R}_{t+1} && (\text{整理する})
\end{aligned}
$$

です。$\hat{R}_{t+1}$ は規則3で、R を (z,k) の関数とみて弾力性を掛けると、$\hat{R}_{t+1}=\frac{\bar{R}-1+\delta}{\bar{R}}\bigl(\hat{z}_{t+1}+(\alpha-1)\hat{k}_{t+1}\bigr)=(1-\beta(1-\delta))\bigl(\hat{z}_{t+1}-(1-\alpha)\hat{k}_{t+1}\bigr)$ です。
資源制約(9.3)は規則1・2を使って

$$
\begin{aligned}
\bar{k}\hat{k}_{t+1} &\approx \bar{k}^{\alpha}(\hat{z}_t+\alpha\hat{k}_t)+(1-\delta)\bar{k}\hat{k}_t-\bar{c}\hat{c}_t && (\text{両辺を1次近似（}x\approx\bar{x}(1+\hat{x})\text{）})\\
\hat{k}_{t+1} &\approx \frac{1}{\beta}\hat{k}_t+\frac{\bar{y}}{\bar{k}}\hat{z}_t-\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t && (\bar{k}\text{ で割り、}\alpha\bar{y}/\bar{k}+1-\delta=\bar{R}=1/\beta)
\end{aligned}
$$

です（$\bar{y}=\bar{k}^{\alpha}$）。

数式の読み方：結果の読み方

- 線形化したオイラー方程式は「来期の金利が高いと予想されるほど、今期の消費を減らして来期に回す」ことを表し、$1/\gamma$ が**異時点間の代替の弾力性**です。
- ショックをとり除くと、$(\hat{k}_t,\hat{c}_t)$ についての 2×2 の線形差分方程式になります。$\hat{k}$ が先決変数、$\hat{c}$ がジャンプ変数で、係数行列は一方の固有値の絶対値が 1 より小さく、他方が 1 より大きい鞍点になります（第2章）。ショックつきの場合の解き方が、次の章の主題です。

9.5 摂動法：1次近似の根拠

ここまでの線形化を、正確な近似の主張として述べます。ショックの大きさを表すパラメータ $\sigma\geq 0$ を導入し、外生変数の過程を $x_{t+1}=h(x_t)+\sigma\eta\varepsilon_{t+1}$（$\mathrm{E}_t\varepsilon_{t+1}=0$）の形で書きます。$\sigma=0$ なら確定的なモデル、$\sigma=1$ が元のモデルです。モデルの解を、σ にも依存する政策関数

$$
y_t=g(x_t,\sigma),\qquad x_{t+1}=h(x_t,\sigma)+\sigma\eta\varepsilon_{t+1}
$$

の形で探します（ここで h は内生的な先決変数の政策関数も含めて書いています）。g,h を $(\bar{x},0)$ のまわりでテイラー展開して求める方法を**摂動法**といいます。

用語の説明：摂動法

- 「摂動」は、解きやすい問題（ここでは $\sigma = 0$ で定常状態にとどまる問題）を少しだけ揺らすことです。揺らした問題の解を、揺らしの大きさ σ と状態のずれ $x - \bar{x}$ のべき級数で表します。
- 政策関数 g を(9.1)に代入すると、すべての x, σ で成り立つべき恒等式

$$F(x,\sigma) \equiv \mathrm{E}\Big[f\big(g(h(x,\sigma)+\sigma\eta\varepsilon',\sigma),\, g(x,\sigma),\, h(x,\sigma)+\sigma\eta\varepsilon',\, x\big)\Big] = 0$$

  が得られます。恒等式なので、x や σ で何回微分しても 0 です。この「微分しても 0」から係数を順に決めるのが摂動法です。

F を x で微分して $(\bar{x}, 0)$ で評価すると、g_x（$\partial g/\partial x$）と h_x についての行列の2次方程式

$$f_{y'} g_x h_x + f_y g_x + f_{x'} h_x + f_x = 0$$

が得られます（$f_{y'}$ は f の第1引数についてのヤコビ行列。以下同様）。これは、前節で行った線形化モデルに $y_t = g_x x_t$、$x_{t+1} = h_x x_t$ という解を代入した式と同じです。この方程式は一般に複数の解をもち、そのうち h_x の固有値の絶対値がすべて 1 より小さいもの（安定な解）を選ぶ手続きが、第10章のブランシャール＝カーンの方法です。

命題 9.4（1次近似の確実性等価性）

g, h が $(\bar{x}, 0)$ の近くで連続微分可能に存在するとし、行列

$$\begin{pmatrix} f_{y'} + f_y & f_{y'} g_x + f_{x'} \end{pmatrix}$$

（$(\bar{x}, 0)$ で評価）が正則であるとする。このとき $g_\sigma(\bar{x}, 0) = 0$、$h_\sigma(\bar{x}, 0) = 0$ である。したがって1次近似の政策関数

$$y_t \approx \bar{y} + g_x (x_t - \bar{x}), \qquad x_{t+1} \approx \bar{x} + h_x (x_t - \bar{x}) + \sigma\eta\varepsilon_{t+1}$$

は、ショックの大きさ σ（リスクの大きさ）に依存しない。

証明のアイデア

$F(x, \sigma) = 0$ を σ で微分すると、ε' を含む項は、期待値をとるとちょうど $\mathrm{E}[\varepsilon'] = 0$ で消えます。残るのは g_σ と h_σ についての「右辺が 0 の連立1次方程式」なので、係数行列が正則なら解は 0 しかありません。リスクは、1次の段階では平均的に打ち消し合ってしまうのです。

証明

方針　恒等式 $F(\bar{x},\sigma)=0$ を σ で微分し、$\sigma=0$ で評価します。

ステップ1　σ で微分する

来期の状態 $x'=h(x,\sigma)+\sigma\eta\varepsilon'$ の σ についての微分は $h_\sigma+\eta\varepsilon'$ です。連鎖律より、$(\bar{x},0)$ で

$$
\begin{aligned}
0=F_\sigma &= \mathrm{E}\Big[f_{y'}\big(g_x(h_\sigma+\eta\varepsilon')+g_\sigma\big)+f_y g_\sigma+f_{x'}(h_\sigma+\eta\varepsilon')\Big] && \text{（連鎖律）}\\
&= f_{y'}(g_x h_\sigma+g_\sigma)+f_y g_\sigma+f_{x'}h_\sigma && \text{（}\mathrm{E}[\varepsilon']=0\text{、他は定数）}\\
&= (f_{y'}+f_y)g_\sigma+(f_{y'}g_x+f_{x'})h_\sigma && \text{（整理する）}
\end{aligned}
$$

です。$(\bar{x},0)$ では ε' の値によらず f の微分は同じ点で評価されるので、微分係数を期待値の外に出せました。

ステップ2　結論

最後の式は、縦に並べた (g_σ,h_σ) に仮定の行列を掛けたものが 0 であることを述べています。行列が正則なので $g_\sigma=0$、$h_\sigma=0$ です。　□

数式の読み方：摂動法の正当化について

- 命題 9.4 は、g,h が存在して微分可能であることを仮定しています。その存在は、適当な関数空間の上で陰関数定理を使って示されます（定常状態で線形化したモデルが一意の安定な解をもつこと、つまり第10章のブランシャール＝カーンの条件が、陰関数定理の「ヤコビ行列が正則」という仮定の役割を果たします）。本書では証明しません。
- 得られる近似は「$x-\bar{x}$ と σ が十分小さいとき、誤差はそれらの1次より速く小さくなる」という局所的な主張です。大きなショックや、借入制約のように定常状態の近くで微分できない部分があるモデルでは、1次近似は使えません（第12章）。
- 第3章の線形化の原理（定理 3.12）が「定常状態の近くでは、非線形のシステムは線形化したシステムと同じように振る舞う」ことを保証したのと同じ役割を、確率的なモデルでは摂動法が果たします。

補足：経済学での使いどころ

確実性等価性のため、1次近似のモデルでは、リスクの大きさが政策関数に影響しません。予備的貯蓄、リスク・プレミアム、不確実性ショックの効果、厚生の比較のように、リスクそのものが主題の問題では、1次近似では答えが出ず、2次以上の近似が必要です。逆に、景気変動の平均的な動き（インパルス応答・分散・相関）の分析には、1次近似で十分なことが多いのです。

9.6 2次近似

発展：2次近似とリスクの効果

同じ恒等式を2回微分すると、$g_{xx}, g_{x\sigma}, g_{\sigma\sigma}$ などが順に決まります。このうち $g_{x\sigma} = h_{x\sigma} = 0$ はやはり成り立ちますが、$g_{\sigma\sigma}$ と $h_{\sigma\sigma}$ は一般に 0 ではなく、

$$y_t \approx \bar{y} + g_x \tilde{x}_t + \tfrac{1}{2}\tilde{x}_t^\top g_{xx} \tilde{x}_t + \tfrac{1}{2} g_{\sigma\sigma}\sigma^2$$

の最後の項が、リスクによって政策関数を平行移動させる効果（**リスク調整**）を表します。例えばオイラー方程式 $u'(c_t) = \beta R \mathrm{E}_t[u'(c_{t+1})]$ で u' が凸なら、ジェンセンの不等式から $\mathrm{E}_t[u'(c_{t+1})] > u'(\mathrm{E}_t c_{t+1})$ で、リスクが大きいほど今期の消費を減らして貯蓄します（予備的貯蓄）。$g_{\sigma\sigma}$ の符号と大きさは、u'''（慎重さ）を含む式で決まります。2次近似のモデルをそのままシミュレーションすると、2乗の項が積み重なって発散することがあるので、実際には「2次の項の計算に1次の解を使う」刈り込み（プルーニング）という工夫が使われます。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 対数線形化の規則 → DSGEモデルの均衡条件を、定常状態からの変化率についての線形の式に直す標準的な手順（第11章）。
- 摂動法 → 線形近似が局所的に正しいことの根拠。Dynare などの計算ソフトが行っている計算の中身。
- 確実性等価性 → 1次近似で分かること（平均的な景気変動）と分からないこと（リスクの効果）の区別。

要点

- 線形化とは、定常状態で関数をその接平面に置きかえることです。誤差はずれの1次より速く小さくなります。
- 対数乖離 $\hat{x} = \ln x - \ln \bar{x}$ は定常状態からの変化率です。積とべきは正確に線形になり、和はシェアで加重平均し、一般の関数は弾力性を係数とする1次式になります。
- 摂動法では、政策関数を状態とショックの大きさ σ のべき級数で表します。1次の係数は線形化したモデルの安定な解で決まり、$g_\sigma = h_\sigma = 0$（確実性等価性）です。
- リスクの効果は2次近似で初めて現れます。

次の章へ　線形化したモデルは、$\mathrm{E}_t[\cdot]$ を含む線形の差分方程式です。次の章では、その解がただ一つに決まる条件（ブランシャール＝カーンの定理）を証明し、解を求める方法を学びます。

大学院とのつながり　論文で「モデルを定常状態のまわりで対数線形化する」と書かれているとき、行われているのはこの章の規則の機械的な適用です。どの変数を対数で、どの変数（金利・純資産など負になりうるもの）を水準の差で近似するかの選択にも、この章の考え方が使えます。

第10章

線形合理的期待モデルの解法

ここまでの流れ　第2章では、確定的な線形差分方程式で、安定な固有値の数と先決変数の数を比べれば解が一つに決まるかどうかが分かることを、2×2 の鞍点の場合に証明しました。第9章では、確率的なモデルを線形化すると、条件付き期待値 E_t を含む線形の差分方程式になることを見ました。

前提知識　第1章の前向きの解（定理 1.5）。第2章の対角化（定理 2.4）、一般解（定理 2.5）、2×2 の判定（命題 2.7）、安定部分空間（命題 2.10）。第7章の繰り返し期待値の法則（命題 7.3）、AR(1) 過程。第9章の線形化。

この章の問い　$\mathrm{E}_t[y_{t+1}]$ を含む線形のモデルは、いつ、ただ一つの解をもつのでしょうか。解が一つに決まらないとき、経済学的には何が起きているのでしょうか。

この章で分かること　1変数のモデルの前向きの解と未定係数法、ブランシャール＝カーンの定理（証明）、決定性と不決定性、シューア分解（証明）、ニューケインジアン・モデルのテイラー原理（証明）、インパルス応答、QZ分解による解法（発展）。

10.1　1変数のモデル：前向きの解と未定係数法

最も簡単な合理的期待モデルは

$$x_t = a\,\mathrm{E}_t[x_{t+1}] + b\,z_t, \qquad z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1} \quad (|\rho|<1) \tag{10.1}$$

です。例えば、x_t を株価、z_t を配当とすると $a=1/(1+r)$ の資産価格の式、x_t をインフレ率、z_t を限界費用とするとニューケインジアン・フィリップス曲線になります。今日の x_t が、明日の x についての今日の予想に依存する点が、第1章の差分方程式と違うところです。

命題 10.1（1変数のモデルの解）

$|a|<1$ とする。(10.1)の解で、各 t について $\mathrm{E}_t[x_{t+k}]$ が k について有界であるものは、ただ一つ

$$x_t = b\sum_{k=0}^{\infty} a^k \mathrm{E}_t[z_{t+k}] = \frac{b}{1-a\rho}\,z_t$$

である。$|a|>1$ のときは、このような解が無数に存在する。

証明

ステップ1　前向きに代入する

(10.1)を $t+1$ 期にずらして E_t をとり、繰り返し期待値の法則 $\mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1}[x_{t+2}]] = \mathrm{E}_t[x_{t+2}]$ を使うと、$\mathrm{E}_t[x_{t+1}] = a\mathrm{E}_t[x_{t+2}] + b\mathrm{E}_t[z_{t+1}]$ です。これを元の式に代入することを K 回繰り返すと

$$x_t = a^K \mathrm{E}_t[x_{t+K}] + b\sum_{k=0}^{K-1} a^k \mathrm{E}_t[z_{t+k}]$$

となります。

ステップ2　$|a| < 1$ の場合

有界性の仮定と $|a| < 1$ から第1項は $K \to \infty$ で 0 になります。AR(1) 過程では $\mathrm{E}_t[z_{t+k}] = \rho^k z_t$ なので、残りは等比級数で $b\sum_k (a\rho)^k z_t = bz_t/(1-a\rho)$ です（$|a\rho| < 1$）。逆に、この x_t が(10.1)を満たすことは代入して確かめられます。

ステップ3　$|a| > 1$ の場合

上の解 x_t^*（$|a\rho| < 1$ なら意味をもつ）に、$s_{t+1} = a^{-1}s_t + \nu_{t+1}$（$\mathrm{E}_t\nu_{t+1} = 0$ の任意のショック）を満たす s_t を加えた $x_t = x_t^* + s_t$ も、$a\mathrm{E}_t[s_{t+1}] = s_t$ なので(10.1)を満たします。$|a^{-1}| < 1$ なので s_t は有界にとどまり、初期値 s_0 と ν の選び方の数だけ解があります。 □

数式の読み方：結果の読み方

- $|a| < 1$ の解は、第1章の「不安定な根は前向きに解く」の確率版です（式を $\mathrm{E}_t[x_{t+1}] = a^{-1}x_t - \cdots$ と書くと、根は a^{-1} で絶対値が 1 より大きい）。
- $|a| > 1$ のときに加えた s_t は、経済の基礎的条件（z_t）と無関係な変動で、人々がそれを予想するから実際に起こる、という自己実現的な変動です。これを**サンスポット**といいます。解が一つに決まらないことを**不決定性**といいます。

計算例：未定係数法

解の形を $x_t = \psi z_t$ と推測し、係数 ψ を式に合うように決める方法を**未定係数法**といいます。$\mathrm{E}_t[x_{t+1}] = \psi\rho z_t$ を(10.1)に代入すると

$$\psi z_t = a\psi\rho z_t + bz_t \qquad \text{（推測を代入）}$$

$$\psi = \frac{b}{1-a\rho} \qquad \text{（}z_t\text{ の係数を比べる）}$$

で、前向きの解と一致します。未定係数法は計算が速い反面、それが唯一の有界な解であるかどうかは教えてくれません。一意性は、命題 10.1 や次の節の定理で別に確かめる必要があります。

10.2 ブランシャール＝カーンの定理

変数が複数の場合を考えます。$x_t \in \mathbb{R}^{n_x}$ を先決変数、$p_t \in \mathbb{R}^{n_p}$ をジャンプ変数とし、$y_t = (x_t^\top, p_t^\top)^\top \in \mathbb{R}^n$（$n = n_x + n_p$）について

$$\mathrm{E}_t[y_{t+1}] = A y_t, \qquad x_{t+1} - \mathrm{E}_t[x_{t+1}] = \eta\, \varepsilon_{t+1} \tag{10.2}$$

というモデルを考えます。ε_{t+1} は $\mathrm{E}_t[\varepsilon_{t+1}] = 0$ の外生ショックで、x_0 は与えられています。

用語の説明：先決変数とジャンプ変数（確率的な場合）

- **先決変数**：来期の値の予測誤差が、外生ショック $\eta\varepsilon_{t+1}$ で決まってしまう変数です。資本ストックや、AR(1) に従う技術水準がこれにあたります。
- **ジャンプ変数**：予測誤差 $p_{t+1} - \mathrm{E}_t[p_{t+1}]$ がモデルの中で決まる変数です。消費・価格・インフレ率のように、新しい情報に応じて自由に跳べる変数です。
- 外生ショックの過程（AR(1) など）は、先決変数として x_t に含めます。第9章の線形化モデルは、ショックをこう扱えば(10.2)の形になります（係数行列に逆行列をとれない場合は10.6節）。

次の定理の一意性の条件は、ブランシャール＝カーンの条件（Blanchard–Kahn 条件）と呼ばれます。ここでは A が（複素数の範囲で）対角化可能で、絶対値がちょうど 1 の固有値はないと仮定します。$A = P\Lambda P^{-1}$ とし、固有値の絶対値が 1 より大きいもの（不安定な固有値）の数を m とします。$Q = P^{-1}$ の行のうち、不安定な固有値に対応する m 本の行を集めた $m \times n$ 行列を Q_u とし、列を先決変数の部分とジャンプ変数の部分に分けて $Q_u = \begin{pmatrix} Q_{ux} & Q_{up} \end{pmatrix}$（$Q_{up}$ は $m \times n_p$）と書きます。対応する不安定な固有値を並べた対角行列を Λ_u とします。

定理 10.2（ブランシャール＝カーンの定理）

(10.2)の解のうち、各 t で $\mathrm{E}_t[y_{t+k}]$ が k について有界であるものを考える（ε は有界とする）。

1. $m = n_p$ で Q_{up} が正則なら、解はただ一つで

$$p_t = -Q_{up}^{-1} Q_{ux}\, x_t \equiv F x_t, \qquad x_{t+1} = (A_{xx} + A_{xp}F)\, x_t + \eta \varepsilon_{t+1}$$

   である。ここで A_{xx}, A_{xp} は A の先決変数の行のブロックである。

2. $m > n_p$ なら、一般に解は存在しない（$Q_{ux}x_0$ が Q_{up} の列空間に入るような特別な x_0 でなければ、$t=0$ ですでに解がない）。

3. $m < n_p$ なら、解が存在するとき、解は無数にある（不決定）。

証明のアイデア

固有ベクトルの座標 $w_t = Q y_t$ に直すと、モデルは成分ごとに $\mathrm{E}_t[w_{i,t+1}] = \lambda_i w_{i,t}$ という1変数の式に分かれます。不安定な成分は、前向きに解くと「有界であるためには 0 でなければならない」ことが分かります（命題 10.1 の $b=0$ の場合）。こうして m 本の制約 $Q_u y_t = 0$ が得られます。あとは、未知数であるジャンプ変数 p_t の数 n_p と、制約の数 m を比べるだけです。定理の山場は、確率的なモデルの有界性が、この m 本の線形の制約にちょうど言いかえられる、という点にあります。

証明

方針　有界な解であることと、すべての t で $Q_u y_t = 0$ が成り立つこととが同値であることを示し、この連立1次方程式を p_t について解きます。

ステップ1　固有ベクトルの座標に直す

$w_t = Q y_t$ とおきます。(10.2)の第1式に左から Q を掛けると、$QA = \Lambda Q$ なので

$$\mathrm{E}_t[w_{t+1}] = \Lambda w_t$$

です。不安定な成分を並べた $w_t^u = Q_u y_t$ について、$\mathrm{E}_t[w_{t+1}^u] = \Lambda_u w_t^u$ が成り立ちます。

ステップ2　有界なら $Q_u y_t = 0$

ステップ1の式を繰り返し使うと（繰り返し期待値の法則）、$\mathrm{E}_t[w_{t+k}^u] = \Lambda_u^k w_t^u$、つまり $w_t^u = \Lambda_u^{-k} \mathrm{E}_t[w_{t+k}^u]$ です。解が有界なら $\mathrm{E}_t[w_{t+k}^u] = Q_u \mathrm{E}_t[y_{t+k}]$ は k について有界で、Λ_u^{-k} の対角成分は $|\lambda_i|^{-k} \to 0$ なので、$k \to \infty$ として $w_t^u = 0$ です。

ステップ3　$Q_u y_t = 0$ なら有界

逆に、すべての t で $w_t^u = 0$ とします。安定な成分 w^s については $\mathrm{E}_t[w_{t+k}^s] = \Lambda_s^k w_t^s$ で、$|\lambda_i| < 1$ なので有界です。$\mathrm{E}_t[y_{t+k}] = P\,\mathrm{E}_t[w_{t+k}]$ も有界です。

ステップ4　制約を p_t について解く

制約 $Q_u y_t = 0$ は

$$Q_{up}\,p_t = -Q_{ux}\,x_t$$

という、未知数 n_p 個、式 m 本の連立1次方程式です（x_t は t 期のはじめに決まっている）。

- $m = n_p$ で Q_{up} が正則なら、$p_t = -Q_{up}^{-1}Q_{ux}x_t$ とただ一つに決まります。これを(10.2)の先決変数の行に代入すると、$x_{t+1} = \mathrm{E}_t[x_{t+1}] + \eta\varepsilon_{t+1} = A_{xx}x_t + A_{xp}p_t + \eta\varepsilon_{t+1}$ から x の式が得られます。ジャンプ変数の行も満たされることは、次のように分かります。$Q_u A = \Lambda_u Q_u$ なので、$Q_u y_t = 0$ なら $Q_u(Ay_t) = 0$ で、Ay_t のジャンプ変数の部分は F と先決変数の部分の積に等しくなります。したがって $\mathrm{E}_t[p_{t+1}] = F\mathrm{E}_t[x_{t+1}]$ は Ay_t のジャンプ変数の部分に一致し、(10.2)の第1式が成り立ちます。
- $m > n_p$ なら、式の数が未知数より多く、$-Q_{ux}x_0$ が Q_{up} の列空間に入らない限り解はありません。
- $m < n_p$ なら、式の数が未知数より少なく、解があれば少なくとも $n_p - m$ 次元の自由度が残ります。さらに、各期の p_{t+1} の予測誤差にも、制約に反しない範囲で任意のショック（サンスポット）を加えられます。

□

数式の読み方：定理の読み方と補足

- 「不安定な固有値の数 = ジャンプ変数の数」が一意性の条件です。第2章の鞍点（先決変数1つ、ジャンプ変数1つ、不安定な固有値1つ）は、その最も簡単な場合です。
- Q_{up} の正則性は、第2章の定理 2.8 の「v_1 の第1成分が 0 でない」にあたる条件です。これが破れると、ジャンプ変数をどう選んでも不安定な成分を消せません。数が合っていればほとんどの場合に成り立ちますが、確かめる必要があります。
- 解 $x_{t+1} = (A_{xx} + A_{xp}F)x_t + \eta\varepsilon_{t+1}$ の係数行列の固有値は、A の安定な固有値と一致します（解は安定部分空間の上を動くため）。こうしてモデルの解は、第7章の定常な VAR(1) になります。
- 固有値が複素数の場合も、P、Q は複素行列になりますが、共役な固有値の組が両方とも Q_u に入るので、$F = -Q_{up}^{-1}Q_{ux}$ は実行列になります。

補足：経済学での使いどころ

DSGEモデルを数値的に解くソフトウェアは、最初に必ずこの条件を確かめ、「不安定な固有値が多すぎる（解なし）」「少なすぎる（不決定）」という警告を出します。不決定性は単なる数学的な不都合ではなく、金融政策ルールの良し悪しを判断する基準として使われます（10.4節）。

10.3 シューア分解

定理 10.2 では A が対角化可能であると仮定しました。対角化できない行列や、数値的に固有ベクトルが求めにくい行列でも同じ議論ができるように、ユニタリ行列による三角化を用意します。複素行列 U が $U^*U = I$（U^* は U の転置をとって各成分の複素共役をとったもの）を満たすとき、U を**ユニタリ行列**といいます。実行列なら直交行列のことで、列ベクトルが互いに直交する長さ 1 のベクトルです。

定理 10.3（シューア分解）

任意の $n \times n$ の複素行列 A に対して、ユニタリ行列 U と上三角行列 T があって、$A = UTU^*$ と書ける。T の対角成分は A の固有値である。

証明

方針　n についての数学的帰納法で示します。

ステップ1　$n = 1$

$U = (1)$、$T = A$ とすればよい。

ステップ2　固有ベクトルを最初の基底にとる

$n-1$ 次の行列で成り立つとします。代数学の基本定理より A は固有値 λ_1 と、長さ 1 の固有ベクトル u_1 をもちます（第2章）。u_1 に $n-1$ 本のベクトルを付け加えて、互いに直交する長さ 1 のベクトルの組を作り（グラム＝シュミットの直交化）、それを並べた $V = (u_1 \ W)$ はユニタリ行列です。$Au_1 = \lambda_1 u_1$ と $W^* u_1 = 0$ より

$$V^* A V = \begin{pmatrix} u_1^* A u_1 & u_1^* A W \\ W^* A u_1 & W^* A W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

です（$b^* = u_1^* A W$、$A_2 = W^* A W$ は $(n-1) \times (n-1)$）。

ステップ3　帰納法の仮定を使う

仮定より $A_2 = U_2 T_2 U_2^*$ と書けます。$U = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$ とおくと、ユニタリ行列の積はユニタリ行列で、

$$U^* A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^* U_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

は上三角行列です。A と T は相似なので固有多項式が等しく、三角行列の固有値は対角成分なので、T の対角成分は A の固有値です。　□

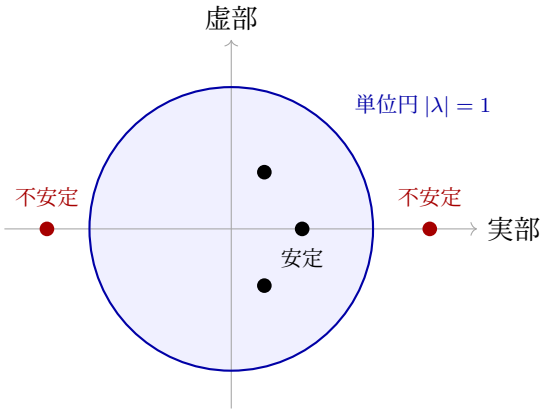
数式の読み方：ブランシャール＝カーンの定理への使い方

さらに、T の対角成分の並び順は自由に選べることが知られています（本書では証明しません）。安定な固有値を左上に、不安定な固有値を右下に並べた $A = UTU^*$ をとり、$w_t = U^* y_t$ とおくと、

$$\mathrm{E}_t \begin{pmatrix} w_{t+1}^s \\ w_{t+1}^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{ss} & T_{su} \\ 0 & T_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t^s \\ w_t^u \end{pmatrix}$$

です。下のブロックは w^u だけの式で、T_{uu} の固有値はすべて不安定なので、定理 10.2 のステップ2と同じ議論で $w_t^u = 0$ が出ます（三角行列なので、下の成分から順に1変数の議論を当てはめられます）。U^* の下の m 行を Q_u の代わりに使えば、定理 10.2 は対角化できない A にもそのまま拡張できます。ユニタリ行列は数値的に安定に計算できるので、実際の計算ではこちらを使います。

図 10.1　固有値と単位円：何本を前向きに解くか



模式図。黒の点は絶対値が 1 より小さい固有値（3個）、赤の点は 1 より大きい固有値（2個）。

図の読み方

1. 単位円の内側の固有値の方向の成分は、どこから出発しても減衰するので、後ろ向きに（過去の値から）解けます。外側の固有値の方向の成分は、前向きに解くと 0 でなければならず、1本につき1つの制約が生まれます。
2. この図の場合、制約は2本なので、ジャンプ変数が2つ（先決変数が3つ）なら、ブランシャール＝カーンの条件 $m = n_p$ が満たされます。
3. 政策ルールなどのパラメータを動かすと、固有値が単位円をまたいで出入りし、解の一意性が変わります（図 10.2）。

10.4　決定性とテイラー原理

ジャンプ変数だけからなるモデルでは $n_x = 0$ なので、一意性の条件は「すべての固有値が不安定」です。2×2 の場合には、第2章の判定法から次の基準が得られます。

命題 10.4（2つの固有値がともに不安定であるための条件）

2×2 の実行列 M について、$T = \operatorname{tr} M$、$D = \det M$、$p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D$ とする。2つの固有値の絶対値がともに 1 より大きいための必要十分条件は、次の (a)・(b) のどちらかが成り立つことである。

(a)　$D > 1$、$p(1) > 0$、$p(-1) > 0$。

(b)　$p(1) < 0$、$p(-1) < 0$（このとき $D < -1$ で、固有値は符号の異なる2つの実数）。

証明

方針　逆行列の固有値に、命題 2.7 の1を当てはめます。

固有値がともに不安定なら $D=\lambda_1\lambda_2\neq 0$、(a)・(b) のもとでも $D\neq 0$ なので、どちらの側から考えても M は正則です。M の固有値がともに不安定であることは、M^{-1} の固有値 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2$ の絶対値がともに 1 より小さいことと同値です。M^{-1} の固有値の和は $(\lambda_1+\lambda_2)/(\lambda_1\lambda_2)=T/D$、積は $1/D$ なので、その固有多項式は $\tilde{p}(\lambda)=\lambda^2-(T/D)\lambda+1/D$ で、

$$\tilde{p}(1)=\frac{p(1)}{D},\qquad \tilde{p}(-1)=\frac{p(-1)}{D}$$

です。命題 2.7 の1より、条件は「$1/D<1$、$p(1)/D>0$、$p(-1)/D>0$」と同値です。$D>0$ ならこれは (a) と同じで、$D<0$ なら $1/D<1$ は自動的に成り立ち、残りは (b) と同じです。(b) のもとでは $p(1)+p(-1)=2(1+D)<0$ より $D<-1$ です。 □

補足：基本的なニューケインジアン・モデル

インフレ率 π_t、産出ギャップ $\tilde{y}_t$、名目金利 i_t（いずれも定常状態からの乖離。この節の $\tilde{y}_t$ は、10.2節のベクトル y_t とは別のものです）について、

$$\begin{aligned}
\pi_t &= \beta \mathrm{E}_t\pi_{t+1}+\kappa\tilde{y}_t && \text{（ニューケインジアン・フィリップス曲線）}\\
\tilde{y}_t &= \mathrm{E}_t\tilde{y}_{t+1}-\tfrac{1}{\sigma}\bigl(i_t-\mathrm{E}_t\pi_{t+1}\bigr) && \text{（動学的IS曲線）}\\
i_t &= \phi_\pi\pi_t && \text{（金融政策ルール）}
\end{aligned}$$

を考えます（$0<\beta<1$、$\kappa>0$、$\sigma>0$、$\phi_\pi\geq 0$）。第1式は企業の価格設定、第2式は家計の確率的オイラー方程式を対数線形化したもので、導出の概略は第11章で述べます。π_t と $\tilde{y}_t$ はどちらもジャンプ変数です。

命題 10.5（テイラー原理）

上のモデルで、有界な解がただ一つに決まる（決定的である）ための必要十分条件は $\phi_\pi>1$ である。$\phi_\pi<1$ なら不決定である。

証明

ステップ1　(10.2)の形に直す

政策ルールを代入し、フィリップス曲線から $\mathrm{E}_t\pi_{t+1}=(\pi_t-\kappa\tilde{y}_t)/\beta$、それをIS曲線に代入すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t\pi_{t+1} &= -\frac{\kappa}{\beta}\tilde{y}_t+\frac{1}{\beta}\pi_t && \text{（フィリップス曲線を解く）}\\
\mathrm{E}_t\tilde{y}_{t+1} &= \tilde{y}_t+\frac{1}{\sigma}\Bigl(\phi_\pi\pi_t-\mathrm{E}_t\pi_{t+1}\Bigr) && \text{（IS曲線を解く）}\\
&= \Bigl(1+\frac{\kappa}{\sigma\beta}\Bigr)\tilde{y}_t+\frac{1}{\sigma}\Bigl(\phi_\pi-\frac{1}{\beta}\Bigr)\pi_t && \text{（1行目を代入）}
\end{aligned}$$

です。$w_t = (\tilde{y}_t, \pi_t)^\top$ について $\mathrm{E}_t w_{t+1} = M w_t$、

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\kappa}{\sigma\beta} & \dfrac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi - \dfrac{1}{\beta}\right) \\ -\dfrac{\kappa}{\beta} & \dfrac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

ステップ2　トレースと行列式

計算すると

$$D = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\kappa}{\sigma\beta}\right) + \frac{\kappa}{\sigma\beta}\left(\phi_\pi - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} + \frac{\kappa\phi_\pi}{\sigma\beta} \qquad (D = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$$

$$T = 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{\kappa}{\sigma\beta} \qquad (\text{対角成分の和})$$

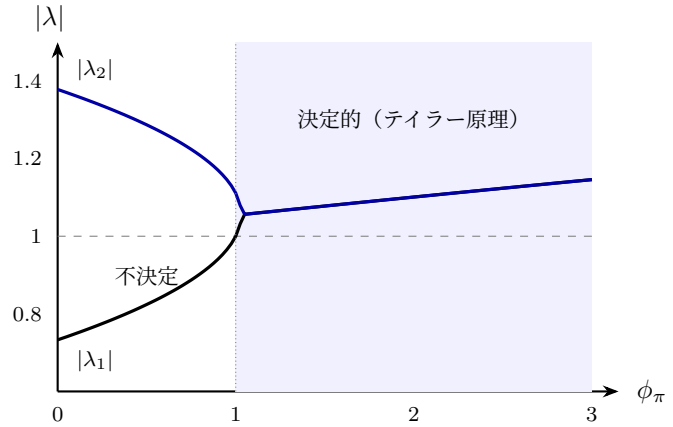
$$p(1) = 1 - T + D = \frac{\kappa(\phi_\pi - 1)}{\sigma\beta}, \qquad p(-1) = 1 + T + D > 0 \qquad (\text{代入して整理})$$

です。

ステップ3　判定

ジャンプ変数が2つ、先決変数が0なので、定理 10.2 より、一意性の条件は2つの固有値がともに不安定であることです（$Q_{up} = Q_u$ は正則な 2×2 行列）。$D > 1/\beta > 1 > 0$ なので命題 10.4 の (b) は起こらず、条件は (a) の $p(1) > 0$、すなわち $\phi_\pi > 1$ と同値です。$\phi_\pi < 1$ なら $p(1) < 0$ で、命題 2.7 の2より不安定な固有値は1つだけなので、$m = 1 < 2 = n_p$ で不決定です。　□

図 10.2　政策ルールの係数と固有値の絶対値



$\beta = 0.99$、$\kappa = 0.1$、$\sigma = 1$ として、M の2つの固有値の絶対値を計算した（説明のための値）。ϕ_π が約1.03を超えると固有値は共役な複素数になり、絶対値が一致する。

図の読み方

1. 青の線（大きいほうの固有値）は、どの ϕ_π でも 1 より上にあります。黒の線（小さいほうの固有値）は、$\phi_\pi = 1$ でちょうど単位円の上を通り、それより右では 1 より大きくなります。
2. $\phi_\pi < 1$（左側）では、不安定な固有値が1つしかなく、2つのジャンプ変数に対して制約が1本足りません。サンスポットによる変動が起こりえます。
3. $\phi_\pi > 1$（右側の青い領域）では、2つの固有値がどちらも単位円の外にあり、解はただ一つに決まります。

補足：経済学での使いどころ

テイラー原理は「インフレ率が1%上がったら、名目金利を1%より大きく上げて、実質金利を上げよ」という金融政策の原則です。命題 10.5 はその数学的な根拠で、政策ルールが期待の自己実現的な変動を排除できるかどうかを、固有値の数で判定しています。産出ギャップにも反応するルール $i_t = \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t$ では、同じ計算から条件 $\kappa(\phi_\pi - 1) + (1-\beta)\phi_y > 0$ が得られます。

10.5　インパルス応答

定理 10.2 の解は、状態 x_t についての VAR(1)

$$x_{t+1} = H x_t + \eta \varepsilon_{t+1}, \qquad p_t = F x_t, \qquad H = A_{xx} + A_{xp} F$$

です。

定義 10.6（インパルス応答）

0 期にショック ε_0 の第 j 成分だけが1単位生じ、その後のショックが 0 である場合の、k 期後の変数の値（定常状態からの乖離）を、ショック j に対するインパルス応答という。上の解では、先決変数については $H^k \eta e_j$、ジャンプ変数については $F H^k \eta e_j$（e_j は第 j 単位ベクトル）である。

線形のモデルでは、インパルス応答は「ショックの影響が時間とともにどう伝わり、消えていくか」を完全に要約します。H の固有値はすべて安定なので、応答は等比数列の速さで 0 に戻ります。収束の遅さは、最大の固有値の絶対値で決まります。k 期後の予測の誤差の分散を、どのショックがどれだけ説明するかを分けたものを**分散分解**といい、これもインパルス応答から計算できます。

計算例：ニューケインジアン・モデルの金融政策ショック

政策ルールにショックを加えた $i_t = \phi_\pi \pi_t + v_t$、$v_{t+1} = \rho v_t + \varepsilon_{t+1}$ を考え、$\tilde{y}_t = \psi_y v_t$、$\pi_t = \psi_\pi v_t$ と推測します（未定係数法）。$\mathrm{E}_t \tilde{y}_{t+1} = \psi_y \rho v_t$ などを代入すると

$$\psi_\pi = \beta\rho\psi_\pi + \kappa\psi_y \;\Rightarrow\; \psi_\pi = \frac{\kappa}{1-\beta\rho}\psi_y \qquad \text{（フィリップス曲線）}$$

$$\sigma(1-\rho)\psi_y = -(\phi_\pi - \rho)\psi_\pi - 1 \qquad \text{（IS曲線）}$$

$$\psi_y = -\frac{1-\beta\rho}{\Delta}, \qquad \psi_\pi = -\frac{\kappa}{\Delta} \qquad \text{（連立して解く）}$$

です。ここで $\Delta = \sigma(1-\rho)(1-\beta\rho) + \kappa(\phi_\pi - \rho)$ です。$\phi_\pi > 1$ なら $\Delta > 0$ なので、金融引き締め（$v_t > 0$）は産出ギャップとインフレ率をともに下げ、その応答は ρ^k の速さで消えていきます。$\phi_\pi > 1$ のもとでは定理 10.2 から有界な解はこれだけなので、未定係数法で求めた解が唯一の解であることも保証されます。

10.6 QZ分解による解法

発展：係数行列が正則でない場合

線形化したモデルは、ふつう $A_0 \mathrm{E}_t[y_{t+1}] = A_1 y_t$ の形で得られます。A_0 が正則なら $A = A_0^{-1}A_1$ として定理 10.2 が使えますが、期待値を含まない静学的な式（生産関数や市場清算条件）があると、A_0 の行の一部が 0 になり、逆行列がとれません。このときは、シューア分解を2つの行列に広げた**一般化シューア分解（QZ分解）**を使います。任意の正方行列 A_0, A_1 に対して、ユニタリ行列 Q, Z と上三角行列 S, T があって

$$A_0 = QSZ^*, \qquad A_1 = QTZ^*$$

と書けます（本書では証明しません）。比 t_{ii}/s_{ii} を一般化固有値といい（$s_{ii} = 0$ なら無限大とみなす）、これが A の固有値の役割を果たします。$w_t = Z^* y_t$ とおくと $S\mathrm{E}_t[w_{t+1}] = T w_t$ という三角形の式になり、一般化固有値の絶対値が 1 より大きい成分を前向きに解いて 0 とおく、という手順は定理 10.2 とまったく同じです。無限大の一般化固有値は静学的な式に対応し、「不安定」の側に数えます。DSGEモデルの標準的な計算ソフトは、この方法で解を求めています。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 前向きの解と未定係数法 → ニューケインジアン・フィリップス曲線、資産価格、為替レートなどの1変数のモデル。
- ブランシャール＝カーンの定理 → 線形化したDSGEモデルの解の存在と一意性の判定、政策関数 $p_t = Fx_t$ と状態の推移 H の計算。
- テイラー原理 → 金融政策ルールの評価、不決定性とサンスポット。
- インパルス応答 → ショックの伝わり方の分析、モデルとデータ（VARの推定結果）の比較。

要点

- $|a| < 1$ の $x_t = a\mathrm{E}_t x_{t+1} + bz_t$ は前向きに解けて、AR(1) のショックなら $x_t = bz_t/(1-a\rho)$ です。$|a| > 1$ ならサンスポット解が無数にあります。
- 固有ベクトル（またはシューア分解）の座標では、不安定な成分は有界であるために 0 でなければなりません。この制約の数（不安定な固有値の数）とジャンプ変数の数が等しく、対応する部分行列が正則なら、解はただ一つです（ブランシャール＝カーン）。
- 解は状態の VAR(1) $x_{t+1} = Hx_t + \eta\varepsilon_{t+1}$、$p_t = Fx_t$ で、インパルス応答は $H^k\eta$ です。
- 基本的なニューケインジアン・モデルでは、$\phi_\pi > 1$（テイラー原理）が決定性の必要十分条件です。

次の章へ　これで、DSGEモデルを解くための道具がすべてそろいました。次の章では、RBCモデルと基本的なニューケインジアン・モデルを、最適化条件の導出から、定常状態・対数線形化・解・インパルス応答まで、通して解きます。

大学院とのつながり　合理的期待モデルの解法は、ブランシャール＝カーンの方法、未定係数法、QZ分解による方法など、いくつもの流儀がありますが、どれも「不安定な方向を前向きに解いて消す」という同じ考え方に立っています。不決定性とサンスポットの理論は、金融政策・財政政策の相互作用（物価水準の財政理論など）の研究につながります。

第11章

DSGEモデルの構築と解法

ここまでの流れ　第8章で確率的な最適化の条件（確率的オイラー方程式）を、第9章で定常状態のまわりの対数線形化を、第10章で線形合理的期待モデルの解法（ブランシャール＝カーンの定理）を学びました。

前提知識　第1章の有限期間のラグランジュ法とオイラー方程式。第8章の確率的オイラー方程式（式(8.2)）。第9章の対数線形化の規則（命題 9.3）。第10章のブランシャール＝カーンの定理（定理 10.2）、テイラー原理（命題 10.5）、インパルス応答。第7章の AR(1) 過程と VAR の分散（命題 7.11）。

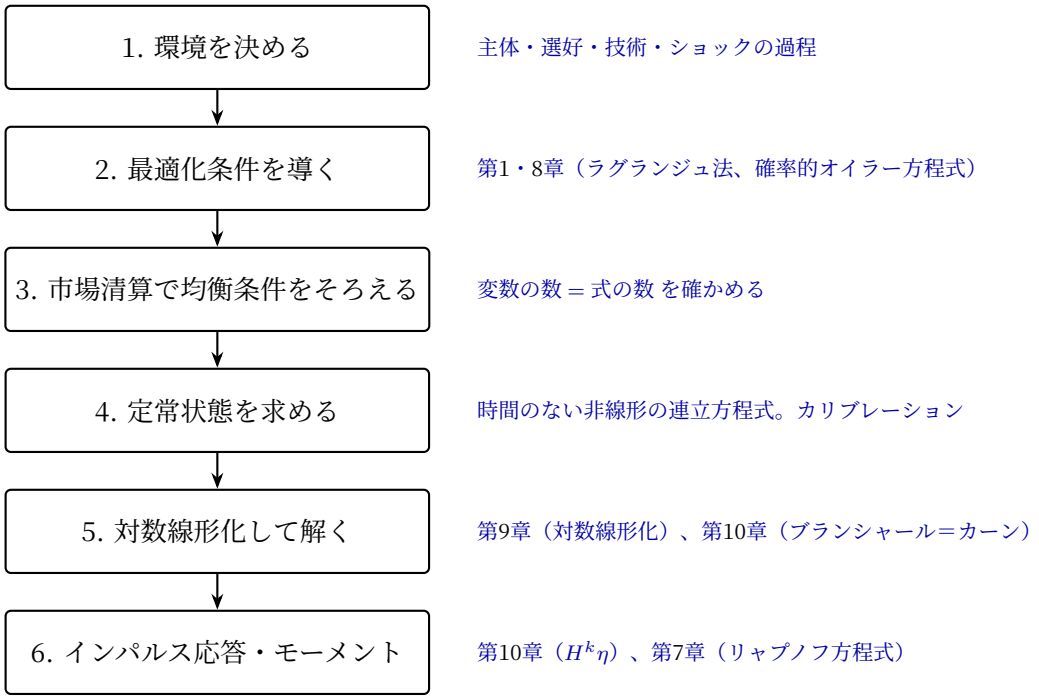
この章の問い　ここまでの道具を組み合わせると、DSGEモデルは最初から最後までどのように解けるのでしょうか。

この章で分かること　DSGEモデルを作って解く6つの手順、RBCモデルの均衡条件・定常状態・対数線形化・解・インパルス応答、カリブレーションの考え方、基本的なニューケインジアン・モデルの構造と解。

11.1　DSGEモデルを解く手順

DSGE（動学的確率的一般均衡）モデルとは、家計・企業・政府などの主体が、それぞれ将来を見通して最適化し（動学的）、ショックを受け（確率的）、すべての市場が清算する（一般均衡）モデルです。どんなに大きなモデルでも、解き方は次の6つの手順にまとめられます。

図 11.1　DSGEモデルを解く6つの手順



右側の青い文字は、各手順で使う本書の道具。

図の読み方

1. 手順1〜3がモデルを「作る」部分、手順4〜6がモデルを「解く」部分です。経済学的な工夫は主に1〜3に、数学的な道具は主に4〜6に入ります。
2. 手順5で、第10章の「不安定な固有値の数 = ジャンプ変数の数」の条件を確かめます。満たされないときは、手順1の設定（政策ルールなど）に戻って見直します。

11.2　RBCモデル：環境と最適化条件

代表的家計は、消費 c_t と労働時間 n_t を選び、

$$\max\ \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln c_t - \chi \frac{n_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right)$$

を目的とします。$\varphi > 0$ の逆数 $1/\varphi$ は労働供給のフリッシュ弾力性です。代表的企業は、資本 k_t と労働を使い、コブ＝ダグラス型の技術 $y_t = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$ で生産します。技術水準は $\ln z_{t+1} = \rho \ln z_t + \varepsilon_{t+1}$（$0 \le \rho < 1$）に従います。資本は $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$ で蓄積し、財市場の清算条件は $y_t = c_t + i_t$ です。

競争均衡は、この経済の資源配分の最適化（社会計画者の問題）と一致するので、ここでは計画者の問題を解きます（第一基本定理。ミクロ版の「均衡の存在と厚生経済学の基

本定理」の章）。資源制約 $c_t + k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t$ のもとで、第8章と同じ手順で最適化条件を導くと、次の均衡条件が得られます。

$$\chi n_t^{\varphi} c_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{n_t} \qquad \text{（労働供給：余暇と消費の限界代替率 = 実質賃金）} \tag{11.1}$$

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathrm{E}_t\Big[\frac{1}{c_{t+1}}\Big(\alpha\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta\Big)\Big] \qquad \text{（オイラー方程式）} \tag{11.2}$$

$$y_t = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} \qquad \text{（生産関数）} \tag{11.3}$$

$$k_{t+1} = y_t + (1-\delta)k_t - c_t \qquad \text{（資源制約）} \tag{11.4}$$

と、技術の過程です。未知の変数は c, n, y, k の4つ、式も4本です。

数式の読み方：最適化条件の読み方

- (11.1)は、労働時間を少し増やしたときの余暇の不効用 χn^{φ} と、それで得られる所得の限界効用 w/c（$w = (1-\alpha)y/n$ は労働の限界生産物）が等しいという条件です。ラグランジュ乗数を $\lambda_t = 1/c_t$（所得の限界効用）とおけば、n_t についての一階条件そのものです。
- (11.2)の括弧の中は、資本の粗収益率 $R_{t+1} = \alpha y_{t+1}/k_{t+1} + 1 - \delta$ です。分権化した経済では、これが企業の利潤最大化から決まるレンタル率 $+1-\delta$ に等しくなります。

11.3 定常状態とカリブレーション

$z = 1$ として、時間の添字を落とした式を解きます。オイラー方程式から $1 = \beta(\alpha\bar{y}/\bar{k} + 1 - \delta)$ なので

$$\frac{\bar{y}}{\bar{k}} = \frac{1/\beta - 1 + \delta}{\alpha} \qquad \text{（オイラー方程式）}$$

$$\frac{\bar{i}}{\bar{y}} = \delta\frac{\bar{k}}{\bar{y}}, \qquad \frac{\bar{c}}{\bar{y}} = 1 - \frac{\bar{i}}{\bar{y}} \qquad \text{（資源制約）}$$

$$\chi\bar{n}^{1+\varphi} = (1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{c}} \qquad \text{（労働供給の式に } \bar{n} \text{ を掛ける）}$$

です。比率はすべて (α, β, δ) だけで決まり、水準は $\bar{n}$ を決めれば $\bar{k} = \bar{n}(\bar{y}/\bar{k})^{1/(\alpha-1)}$ から定まります。

用語の説明：カリブレーション

パラメータの値を、モデルの定常状態（または長期の平均）がデータの長期的な平均と一致するように決める方法を**カリブレーション**といいます。上の式は、そのまま決め方を教えてくれます。

- β：定常状態の実質利子率 $1/\beta - 1$ が、データの平均的な実質利子率に一致するように決める。
- α：$\bar{w}\bar{n}/\bar{y} = 1 - \alpha$ なので、国民所得に占める労働所得の割合から決める。
- δ：$\bar{i}/\bar{k} = \delta$ なので、投資・資本比率から決める。
- χ：定常状態の労働時間 $\bar{n}$ が、データの平均的な労働時間の割合に一致するように決める。
- ρ と ε の標準偏差：生産関数から逆算した技術水準（ソロー残差）$\ln z_t = \ln y_t - \alpha \ln k_t - (1-\alpha)\ln n_t$ の系列に AR(1) を当てはめて決める。

カリブレーションでは、モデルが説明しようとする景気変動のモーメント（分散・相関）は、パラメータを決めるのに使いません。それを使わずに、モデルがデータの景気変動をどこまで再現できるかを見るのが、カリブレーションの考え方です。データ全体でパラメータを決める方法は、第13章で扱います。

11.4 対数線形化と解

命題 9.3 の規則を各式に当てはめます。

計算例：RBCモデルの対数線形化

$$
\begin{aligned}
(1+\varphi)\hat{n}_t &= \hat{y}_t - \hat{c}_t && \text{（(11.1)：積とべきの規則）}\\
\hat{y}_t &= \hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t && \text{（(11.3)：正確に線形）}\\
\hat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\hat{k}_t + \frac{\bar{y}}{\bar{k}}\hat{y}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t && \text{（(11.4)：和の規則）}\\
\hat{c}_t &= \mathrm{E}_t\hat{c}_{t+1} - \big(1-\beta(1-\delta)\big)\mathrm{E}_t\big[\hat{y}_{t+1} - \hat{k}_{t+1}\big] && \text{（(11.2)：第9章の計算と同じ）}\\
\hat{z}_{t+1} &= \rho\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1} && \text{（技術の過程）}
\end{aligned}
$$

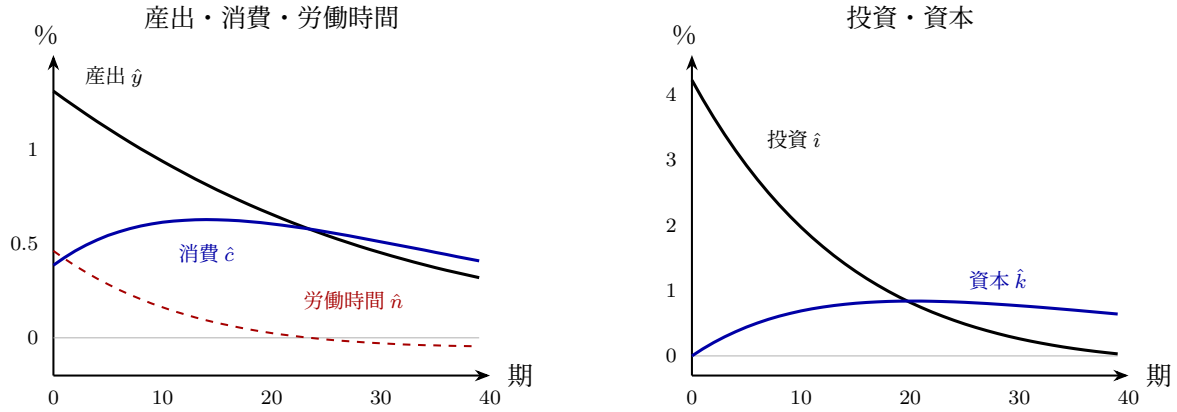
第1式と第2式は時間をまたがない（静学的な）式なので、$\hat{n}_t$ と $\hat{y}_t$ を $(\hat{k}_t, \hat{z}_t, \hat{c}_t)$ で表して残りの式に代入できます。すると、先決変数 $x_t = (\hat{k}_t, \hat{z}_t)$、ジャンプ変数 $p_t = \hat{c}_t$ についての、第10章の形 $\mathrm{E}_t y_{t+1} = A y_t$ のモデルになります（静学的な式を消去しない場合は、QZ分解を使います）。

ブランシャール＝カーンの条件は、ジャンプ変数が1つなので「不安定な固有値がちょうど1つ」です。$\hat{z}$ の方向の固有値は $\rho < 1$ で安定、残りの $(\hat{k}, \hat{c})$ の部分は第9章で見たとおり鞍点なので、標準的なパラメータでは条件が満たされます。解は

$$\hat{c}_t = f_k \hat{k}_t + f_z \hat{z}_t, \qquad \hat{k}_{t+1} = h_{kk} \hat{k}_t + h_{kz} \hat{z}_t$$

の形で、他の変数も $(\hat{k}_t, \hat{z}_t)$ の1次式で表されます。

図 11.2　RBCモデルの技術ショックに対するインパルス応答



0 期に技術水準が1%上がり（$\varepsilon_0 = 0.01$）、その後 $\rho = 0.95$ で減衰する場合。四半期のモデルとして $\alpha = 1/3$、$\beta = 0.99$、$\delta = 0.025$、$\varphi = 1$、$\bar{n} = 1/3$（説明のための値）。縦軸は定常状態からの乖離（%）。

図の読み方

1. 技術が上がると、産出（黒）はその分以上に増えます。労働時間（赤）が増え、資本も徐々に積み上がるためです。
2. 消費（青）の反応は小さく、ゆっくり山を描きます。家計は一時的な所得の増加の多くを貯蓄に回し、消費を平準化します（確率的オイラー方程式）。
3. その分、投資（右図の黒）は産出の3倍以上も反応します。投資が消費よりはるかに大きく変動するという景気循環の事実を、モデルは再現します。
4. 資本（右図の青）は先決変数なので 0 期には動かず、投資を通じてゆっくり増え、ゆっくり戻ります。技術が戻ったあとも資本が残るので、産出も消費も長く定常状態より上にとどまります。

補足：経済学での使いどころ

モデルの解 $x_{t+1} = Hx_t + \eta\varepsilon_{t+1}$ から、命題 7.11 のリャプノフ方程式で状態の分散 Σ を、$p_t = Fx_t$ からジャンプ変数の分散 $F\Sigma F^\top$ を計算できます。これを、データの景気循環成分の標準偏差・相関・自己相関と比べるのが、RBC研究の標準的な評価の方法です。

11.5 基本的なニューケインジアン・モデル

RBCモデルでは、価格が伸縮的なので、金融政策は実物経済に影響しません。ニューケインジアン・モデルは、これに独占的競争と価格の硬直性を加えたものです。

数式の読み方：モデルの構造（導出の概略）

- **家計**：消費と労働を選び、名目債券を売買します。名目金利 i_t と期待インフレ率から、確率的オイラー方程式 $1=\beta \mathrm{E}_t[(c_{t+1}/c_t)^{-\sigma}(1+i_t)/\Pi_{t+1}]$（$\Pi_{t+1}$ は粗インフレ率）が得られます。財市場の清算 $c_t=y_t$ を使って対数線形化し、価格が伸縮的なときの産出（自然産出）からの乖離 $\tilde{y}_t$ で書いたものが、**動学的IS曲線**です。
- **企業**：差別化された財を作る多数の企業が、それぞれ自社の財の価格を決めます。毎期、確率 $1-\omega$ でだけ価格を改定できる（カルボ型の価格設定）とすると、改定できた企業は、しばらく価格を変えられないことを見越して、将来の限界費用の期待割引値をもとに価格を決めます。これを集計し、定常状態（インフレ率 0）のまわりで対数線形化すると、**ニューケインジアン・フィリップス曲線** $\pi_t=\beta \mathrm{E}_t\pi_{t+1}+\kappa\tilde{y}_t$ が得られます。労働だけを使う線形の技術の場合、$\kappa=\frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}(\sigma+\varphi)$ です。
- **中央銀行**：テイラー型の金融政策ルール $i_t=\phi_\pi\pi_t+\phi_y\tilde{y}_t+v_t$ に従います。

カルボ型の価格設定の集計の詳しい導出は、本書では扱いません。数学的には、第1章の前向きの解（期待割引値）と、この本の対数線形化の規則だけで行えます。

こうして得られる3本の式

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= \beta \mathrm{E}_t\pi_{t+1}+\kappa\tilde{y}_t,\\
\tilde{y}_t &= \mathrm{E}_t\tilde{y}_{t+1}-\tfrac{1}{\sigma}\big(i_t-\mathrm{E}_t\pi_{t+1}\big),\\
i_t &= \phi_\pi\pi_t+\phi_y\tilde{y}_t+v_t, \qquad v_{t+1}=\rho_v v_t+\varepsilon_{t+1}
\end{aligned}
$$

は、ジャンプ変数 $(\tilde{y}_t,\pi_t)$、先決変数 v_t のモデルです。v の方向の固有値 ρ_v は安定なので、ブランシャール＝カーンの条件は「残り2つの固有値がともに不安定」で、それは命題 10.5 とその後の補足のとおり $\kappa(\phi_\pi-1)+(1-\beta)\phi_y>0$ です。解は第10章の計算例で求めたとおりで、金融引き締めのショックは産出ギャップとインフレ率をともに下げます。

補足：経済学での使いどころ

基本的なニューケインジアン・モデルは、中央銀行の分析モデルや大学院のマクロ経済学で使われる中規模DSGEモデルの核になっています。中規模のモデルは、これに資本、賃金の硬直性、習慣形成、投資の調整費用などを加えたものですが、解き方は図 11.1 の6つの手順と同じです。変数が数十個になっても、行うことは「定常状態を求め、線形化し、固有値を数え、インパルス応答を計算する」ことに変わりはありません。

発展：ゼロ金利制約と非線形性

名目金利には下限（ゼロ金利制約）$i_t \geq \underline{i}$ があります。この制約が効くと、政策ルールは $\max\{\underline{i},\ \phi_\pi \pi_t + \cdots\}$ という微分できない式になり、定常状態のまわりの線形近似（第9章）は使えません。制約が効く期間が一時的な場合には、「線形のモデルを、制約が効く局面と効かない局面に分けてつなぐ」方法や、モデル全体を非線形のまま数値的に解く方法が使われます。異質的家計モデルの借入制約（次の章）も、同じ種類の非線形性です。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 6つの手順 → あらゆるDSGEモデルの分析の流れ。論文を読むときも、どの手順の話をしているのかを意識すると読みやすくなります。
- カリブレーション → 長期の平均でパラメータを決め、景気変動のモーメントでモデルを評価する方法。
- インパルス応答と分散 → モデルの含意をデータ（VARの推定結果、景気循環の統計）と比べる方法。

要点

- DSGEモデルは「環境 → 最適化条件 → 均衡条件 → 定常状態 → 対数線形化と解 → インパルス応答」の6つの手順で解きます。
- RBCモデルの均衡条件は、労働供給の式・オイラー方程式・生産関数・資源制約と技術の過程です。定常状態の比率は (α, β, δ) で決まり、それがカリブレーションの式になります。
- 線形化したRBCモデルは、先決変数 $(\hat{k}, \hat{z})$・ジャンプ変数 $\hat{c}$ の鞍点で、技術ショックに対して投資が大きく、消費が小さく反応します。
- 基本的なニューケインジアン・モデルは3本の式からなり、決定性の条件はテイラー原理です。

次の章へ　この章のモデルでは、家計は1人の代表的家計にまとめられていました。次の章では、所得ショックと借入制約のために家計ごとに資産が異なる経済を考え、資産の分布そのものを均衡の一部として扱います。

大学院とのつながり　大学院のマクロ経済学では、この章のモデルを出発点に、金融摩擦、労働市場のサーチ、開放経済などを加えたモデルを学びます。どのモデルでも、新しい要素が「どの最適化条件・均衡条件を変えるか」に注目すると、構造が見通せます。

第12章

異質的家計モデルの数学

> **ここまでの流れ**　第11章までのモデルでは、家計を1人の代表的家計にまとめていました。第8章で所得ショックのある家計の消費・貯蓄問題を、第7章でマルコフ連鎖の定常分布を学びました。
> **前提知識**　第8章の確率的ベルマン方程式と解の存在（定理 8.1）、確率的オイラー方程式。第6章のベンヴェニスト＝シャインクマンの定理（定理 6.11）。第7章のマルコフ連鎖と定常分布（定理 7.7）、エルゴード定理（7.8節）。KKT条件（ミクロ版の「制約付き最適化」の章）、中間値の定理（ミクロ版の「連続性・最大値定理・対応」の章）。
> **この章の問い**　家計ごとに所得の運・不運が異なり、保険で完全には打ち消せないとき、経済全体の資産の分布はどう決まるのでしょうか。分布が均衡の一部になるモデルは、どう定義し、どう解くのでしょうか。
> **この章で分かること**　借入制約つきの消費・貯蓄問題とオイラー不等式（証明）、自然借入制約、政策関数の性質、資産と所得の分布の推移（マルコフ作用素）と定常分布、定常均衡の定義と存在の考え方、利子率が時間選好率より低くなる理由、数値解法（内生的格子点法・分布の反復・二分法）、集計ショックと連続時間版（発展）。

12.1　所得変動と借入制約：家計の問題

多数の家計が、それぞれ独立に所得のショックを受けるとします。家計の労働の効率 e_t は有限個の値 $\{e_1, \dots, e_m\}$ をとるマルコフ連鎖（推移確率行列 Π）に従い、賃金 w のもとで所得 we_t を得ます。資産 a_t には粗利子率 $R = 1 + r$ がつきます。所得のショックに対する保険市場はなく、資産を貯めることでしか備えられません（**不完備市場**）。さらに、借入には上限があります。

$$\max \ \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad c_t + a_{t+1} = R a_t + w e_t, \quad a_{t+1} \geq -b, \quad c_t \geq 0. \tag{12.1}$$

$b \geq 0$ は借入の上限で、$a_{t+1} \geq -b$ を**借入制約**といいます。u は狭義増加・狭義凹で、$u'(0^+) = \infty$ とします。ベルマン方程式は

$$v(a, e_i) = \max_{-b \leq a' \leq R a + w e_i} \left\{ u(R a + w e_i - a') + \beta \sum_j \Pi_{ij} v(a', e_j) \right\}$$

で、第8章の形（$x=a$、$z=e$）です。

数式の読み方：借入の上限について

- 最悪の所得 $e_{\min}=\min_i e_i$ が永久に続いても返済できる借入の上限は、等比級数の和 $we_{\min}(1/R+1/R^2+\cdots)=we_{\min}/r$ です。これを**自然借入制約**といいます。b がこれより大きいと、悪い所得が続いたときに消費を非負に保てなくなるので、$b\le we_{\min}/r$ とします。
- 自然借入制約が効くときは、$u'(0^+)=\infty$ のために家計はその限界まで借りることはありません。制約が実際に効くのは、b がそれより厳しい（例：$b=0$、借入不可）場合です。

定理 12.1（オイラー不等式）

価値関数 $v(\cdot,e)$ が凹であるとし、最適な政策を $a'=g(a,e)$、$c=Ra+we-g(a,e)>0$ とする。このとき

$$u'(c_t)\ge \beta R\,\mathrm{E}_t\big[u'(c_{t+1})\big],\qquad \text{ただし } a_{t+1}>-b \text{ なら等号}$$

が成り立つ。

証明のアイデア

借入制約が効いていなければ、今日1円貯めて明日 R 円使う変更も、逆に今日1円多く使って明日返す変更もできるので、両方向の変更が得にならないことから等号が出ます。制約が効いていると、「今日もっと借りる」方向の変更だけができません。残る「今日もっと貯める」方向が得にならないことから、不等号だけが出ます。技術的な山場は、制約が効いていても価値関数が微分でき、包絡線条件が使えることです。

証明

方針　包絡線条件 $v_a(a,e)=Ru'(c)$ を示し、KKT条件と組み合わせます。

ステップ1　包絡線条件

状態 (a_0,e_i) を固定し、その最適な選択を $a_0'=g(a_0,e_i)$ とします。a_0 の近くの a について、来期の資産を a_0' に固定したときの値

$$W(a)=u(Ra+we_i-a_0')+\beta\sum_j \Pi_{ij}v(a_0',e_j)$$

を考えます。$c>0$ なので、a が a_0 に十分近ければ a_0' は実行可能で（借入制約は a によらない）、$W(a)\le v(a,e_i)$、$W(a_0)=v(a_0,e_i)$ です。W は微分可能な凹関数で、$v(\cdot,e_i)$ は凹

関数なので、ベンヴェニスト＝シャインクマンの定理（定理 6.11）より v は a_0 で微分可能で、$v_a(a_0, e_i) = W'(a_0) = Ru'(c)$ です。制約が効いているかどうかは、この議論に影響しません。

ステップ2　KKT条件

a' についての最大化問題は、凹関数 $u(Ra + we_i - a') + \beta \sum_j \Pi_{ij} v(a', e_j)$ を $a' \geq -b$ のもとで最大化する問題です（上限 $a' \leq Ra + we_i$ は $u'(0^+) = \infty$ より効きません）。来期の各状態で $c' > 0$ なので、ステップ1により $v(\cdot, e_j)$ は a' で微分可能です。KKT条件（ミクロ版の「制約付き最適化」の章）より、乗数 $\mu \geq 0$ があって

$$-u'(c) + \beta \sum_j \Pi_{ij} v_a(a', e_j) + \mu = 0, \qquad \mu\,(a' + b) = 0$$

です。$v_a(a', e_j) = Ru'(c'_j)$ を代入すると $u'(c) = \beta R\,\mathrm{E}[u'(c')] + \mu \geq \beta R\,\mathrm{E}[u'(c')]$ で、$a' > -b$ なら $\mu = 0$ で等号です。 □

数式の読み方：結果の読み方

- 制約が効いている家計は「今日の限界効用が、明日の限界効用の割引値より高い」、つまり、借りられるならもっと今日消費したい状態にあります。乗数 μ がその「借りられないことの損失」の大きさです。
- 制約が効いていなくても、将来に制約が効く可能性があるだけで、家計は今日の貯蓄を増やします（予備的貯蓄）。u' が凸なら、所得のリスクそのものも予備的貯蓄の理由になります（第9章の発展枠）。

命題 12.2（政策関数の性質）

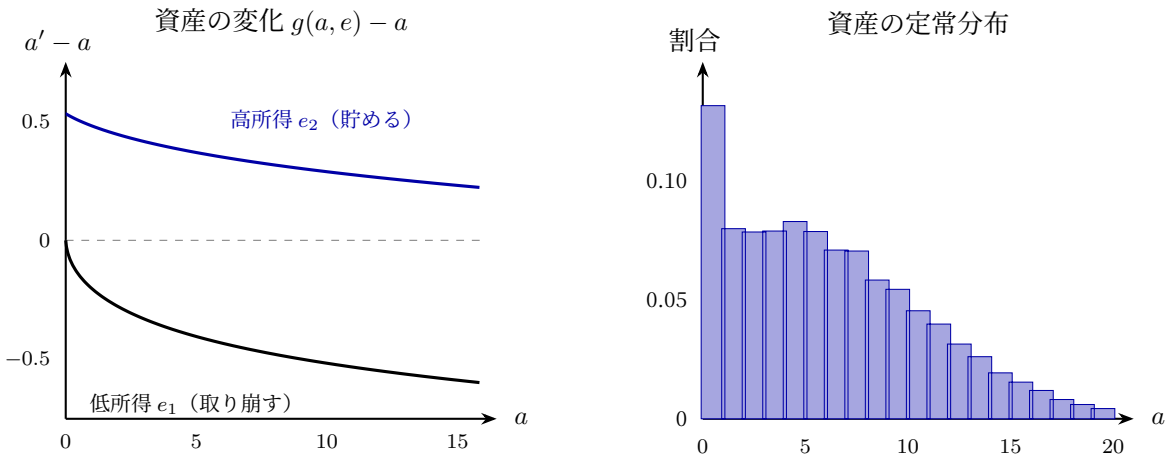
標準的な仮定（u が狭義凹で $u'(0^+) = \infty$、e の推移が単調）のもとで、次が成り立つ。本書では証明しない。

1. 消費 $c(a, e)$ と来期の資産 $g(a, e)$ は、ともに a の増加関数である（g は、借入制約が効く範囲では一定で、それ以外では狭義に増加する）。
2. ある閾値 $\underline{a}(e)$ があって、$a \leq \underline{a}(e)$ では借入制約が効き $g(a, e) = -b$ となる。
3. $\beta R < 1$ で、u が適当な条件（例えばCRRA型）を満たすなら、資産には上限 $\bar{a}$ があり、$a \leq \bar{a}$ なら $g(a, e) \leq \bar{a}$ である。

数式の読み方：命題の読み方

1は、資産が増えると、その一部を今日使い、一部を将来に残すことを表します。3が重要で、$\beta R < 1$（せっかちさが利子率を上回る）なら、資産が十分多い家計は資産を取り崩します。逆に $\beta R \geq 1$ なら、オイラー不等式から $u'(c_t) \geq \mathrm{E}_t[u'(c_{t+1})]$ で、所得のリスクがある限り資産は際限なく増えていきます（限界効用が、平均的に下がっていく過程（優マルチンゲール）になり、消費が無限大に向かう）。資産の分布が定常になるには、$\beta R < 1$ が必要です。

図 12.1　政策関数と資産の定常分布



CRRA型効用（相対的危険回避度2）、$\beta = 0.96$、$b = 0$、効率 $e \in \{0.6, 1.4\}$、同じ状態にとどまる確率0.9。利子率と賃金は図 12.2 の均衡の値（説明のための値）。右図は資産を幅1の区間に分けた割合で、最初の区間には $a = 0$（借入制約）にいる家計（約5%）を含む。

図の読み方

1. 左図は、来期の資産と今期の資産の差（純貯蓄）です。青（高所得）は 0 より上で資産を増やし、黒（低所得）は 0 より下で資産を取り崩しています。所得の良いときに貯め、悪いときに取り崩す、という自己保険の動きです。
2. 低所得で資産がほとんどない家計は、$a' = 0$ の借入制約に張りつきます（黒の線の左端で $a' - a = 0$ になる部分）。資産が多いほど、低所得のときに取り崩す額は大きくなります。
3. 家計は高所得と低所得を行き来するので、資産は2本の線の間を上下します。その結果として生まれる資産の分布が右図です。借入制約にいる家計の山と、右に長く伸びる裾をもつ、非対称な分布になります。

12.2　分布の推移と定常分布

個々の家計の状態 (a_t, e_t) は、政策関数とマルコフ連鎖によって確率的に動きます。経済全体では、状態 (a, e) の家計の割合（分布）λ_t が時間とともに動きます。資産の値の集合 A と状態 e_j について、

$$\lambda_{t+1}(A \times \{e_j\}) = \sum_i \Pi_{ij}\, \lambda_t\big(\{(a, e_i) : g(a, e_i) \in A\}\big) \tag{12.2}$$

です。右辺は「今期 e_i にいて、来期の資産が A に入る家計のうち、効率が e_j に移る割合」の和です。分布 λ_t を λ_{t+1} に写すこの写像を**マルコフ作用素**といい、T^* と書きます。定常分布は $\lambda = T^*\lambda$ の不動点です。

数式の読み方：格子の上では行列になる

数値計算では、資産を格子点 $a_1 < \cdots < a_N$ に制限します。$g(a_k, e_i)$ が格子点の間に落ちたときは、両隣の格子点に距離に応じた確率で割り当てます（例：g が a_l と a_{l+1} のちょうど真ん中なら $1/2$ ずつ）。すると (a_k, e_i) から (a_l, e_j) に移る確率を並べた $Nm \times Nm$ の推移確率行列ができ、(12.2)は第7章の $p_{t+1} = p_t \Pi$ そのものになります。

定理 12.3（定常分布の存在と一意性）

格子の上の推移確率行列が定理 7.7 の仮定（ある k 乗で、どの状態からも共通に移れる状態がある）を満たせば、資産と所得の定常分布はただ一つ存在し、どの初期分布から始めてもそこに収束する。

格子の上の問題は定理 7.7 そのものなので、証明はそちらに任せます。仮定は「十分長い期間のうちに、どの家計も、例えば『低所得が続いて借入制約に張りつく状態』に正の確率で到達する」ことで、低所得の状態の持続性が 1 未満で、低所得の家計が資産を取り崩す（図 12.1）限り、成り立ちます。連続的な資産の上での定常分布の存在と一意性は、政策関数の単調性と「混ざり合いの条件」を使って、単調なマルコフ過程の理論で示されます（本書では証明しません）。

12.3　定常均衡

ここまでは利子率と賃金を所与としました。家計の資産の合計を、企業が資本として借りる経済を考えると、利子率は資本市場の清算で決まります。企業はコブ＝ダグラス型の技術 $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ を使い、資本の減耗率は δ です。総労働 L は効率の定常分布のもとでの平均で、一定です。

定義 12.4（定常均衡）

利子率 r、賃金 w、価値関数 v、政策関数 g、分布 λ、総資本 K の組で、次を満たすものを（アイヤガリ型の）定常均衡という。

1. （家計）v と g は、(r, w) のもとでの家計の問題の解である。
2. （企業）$r = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta$、$w = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha}$。
3. （分布）λ は g と Π から定まるマルコフ作用素の定常分布である。
4. （資本市場の清算）$K = \sum_{(a,e)} a\, \lambda(a, e)$（家計の資産の合計が資本に等しい）。

企業の条件から、r を決めれば K/L と w が決まります。したがって均衡は、利子率 r についての1本の方程式

$$K^s(r) = K^d(r)$$

に帰着します。$K^s(r)$ は利子率 r のもとで家計が定常的に保有する資産の合計（資本の供給）、$K^d(r) = L\left((r+\delta)/\alpha\right)^{1/(\alpha-1)}$ は企業の資本の需要です。

図 12.2　資本の需要と供給：定常均衡の利子率

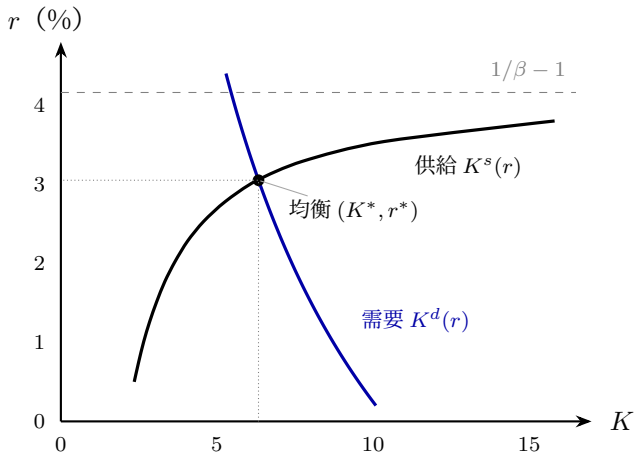


図 12.1 の家計に、$\alpha = 0.36$、$\delta = 0.08$ の企業を組み合わせた（説明のための値）。黒の曲線は、利子率ごとに家計の問題と定常分布を数値的に解いて求めた資産の合計。均衡の利子率は約3.1%。

図の読み方

1. 青の需要曲線は、利子率が高いほど資本が高くつくので右下がりです。
2. 黒の供給曲線は右上がりで、利子率が $1/\beta - 1$（灰色の点線）に近づくと急に立ち上がり、際限なく大きくなります。$\beta R \to 1$ で、家計の資産に上限がなくなるからです（命題 12.2 の3）。
3. 2本の曲線は、$1/\beta - 1$ より下で交わります。均衡の利子率は時間選好率より低く、資本は代表的家計の経済（$r = 1/\beta - 1$）より多くなります。予備的貯蓄が資本を積み増すのです。

命題 12.5（定常均衡の存在（考え方））

$K^s(r)$ が $(-\delta,\, 1/\beta - 1)$ 上で連続で、$r \to 1/\beta - 1$ のとき $K^s(r) \to \infty$ となり、ある r_0 で $K^s(r_0) < K^d(r_0)$ であれば、$K^s(r) = K^d(r)$ となる $r^* \in (r_0, 1/\beta - 1)$ が存在する。

証明　$\Phi(r) = K^s(r) - K^d(r)$ とおくと、Φ は連続（K^d は明らかに連続）です。$\Phi(r_0) < 0$ で、$r \to 1/\beta - 1$ のとき K^d は有限の値に近づき $K^s \to \infty$ なので、$1/\beta - 1$ の十分近くに $\Phi(r_1) > 0$ となる r_1 があります。中間値の定理（ミクロ版の「連続性・最大値定理・対応」の章）より、$\Phi(r^*) = 0$ となる $r^* \in (r_0, r_1)$ が存在します。 □

数式の読み方：どこが難しいのか

命題の証明そのものは中間値の定理だけです。難しいのは仮定の確認、特に $K^s(r)$ の連続性で、これには「政策関数が r について連続に動き（ベルジュの最大値定理）、それに応じて定常分布も連続に動く」ことが必要です。後者は、分布の空間に適切な収束の概念（弱収束）を入れて示します（本書では証明しません）。また、K^s が単調増加とは限らないので、均衡の一意性は一般には保証されません。

12.4　数値解法

定常均衡は、3つの反復を入れ子にして求めます。家計の問題には、価値関数反復より速い**内生的格子点法**がよく使われます。これは、オイラー方程式を「来期の資産 a' を格子点に固定し、今期の消費と資産を逆算する」向きに使う方法です。

コードで確かめる：アイヤガリ型モデルの解法（擬似コード）

1. 利子率の範囲 $[r_{\mathrm{lo}}, r_{\mathrm{hi}}]$（$r_{\mathrm{hi}} < 1/\beta - 1$）を決める。
2. 中点 r について、企業の条件から w を計算する。
3. **家計の問題（内生的格子点法）**：消費の政策 $c(a, e)$ を推測し、次を収束するまで繰り返す。各 a'_k（格子点）と e_i について、$c_{ik} = (u')^{-1}\big(\beta R \sum_j \Pi_{ij} u'(c(a'_k, e_j))\big)$ を計算し（オイラー方程式を等号で解く）、予算制約から今期の資産 $a_{ik} = (a'_k + c_{ik} - w e_i)/R$ を逆算する。点 (a_{ik}, c_{ik}) を補間して新しい $c(\cdot, e_i)$ を作る。a が a_{i1} より小さい点では借入制約が効くので、$c = Ra + we_i + b$ とする（オイラー不等式）。
4. **分布の反復**：格子の上の推移確率行列を作り、$\lambda \leftarrow \lambda \cdot$ (推移確率行列) を収束するまで繰り返す（定理 12.3）。
5. $K^s = \sum a\lambda$ を計算し、$K^s > K^d(r)$ なら $r_{\mathrm{hi}} \leftarrow r$、そうでなければ $r_{\mathrm{lo}} \leftarrow r$ として2に戻る（**二分法**）。区間が十分小さくなったら終了。

内生的格子点法では、各反復で最大化の計算が要らず、$(u')^{-1}$ を一度計算するだけなので、価値関数反復よりはるかに速く収束します。二分法が収束するのは、各段階で $\Phi(r)$ の符号の変わる区間を半分ずつ狭めていくからで、根拠は命題 12.5 の証明と同じ中間値の定理です。

発展：集計ショックと連続時間版

- **集計ショックがある場合**：技術ショックなどの集計ショックがあると、分布 λ_t そのものが時間とともに確率的に動き、家計は将来の利子率を予想するために分布全体を状態変数として知る必要があります。分布は無限次元なので、そのままでは解けません。分布を少数のモーメント（例：平均資本）で近似し、その予測式を均衡で整合的に決める方法や、定常均衡のまわりで分布を含めて線形化する方法が使われます。
- **連続時間版**：時間を連続にすると、家計の問題はHJB方程式（第4章の発展枠）、分布の動きはコルモゴロフの前向き方程式（第14章）になり、両者は互いに随伴の関係にある線形作用素で表されます。借入制約は、HJB方程式の境界条件として扱えます。数値計算が速く、制約の近くの振る舞いを解析的に調べやすいという利点があります。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- オイラー不等式 → 借入制約・流動性制約のある消費行動、限界消費性向が高い家計（手元流動性の少ない家計）の分析。
- マルコフ作用素と定常分布 → 資産・所得の分布、格差の分析、分布を含む均衡の定義。
- 定常均衡と $r^* < 1/\beta - 1$ → 予備的貯蓄と資本蓄積、不完備市場での利子率、財政政策・公債の効果。
- 数値解法 → 異質的家計を含むニューケインジアン・モデル（HANKモデル）など、分布を含むモデル全般の計算の基礎。

要点

- 借入制約のある家計の最適条件はオイラー不等式 $u'(c_t) \geq \beta R \mathrm{E}_t[u'(c_{t+1})]$ で、制約が効いていなければ等号です。包絡線条件は制約が効いていても成り立ちます。
- 資産の分布が定常になるには $\beta R < 1$ が必要です。分布はマルコフ作用素で動き、格子の上では第7章のマルコフ連鎖と同じ方法で定常分布が求まります。
- 定常均衡は、資本の供給 $K^s(r)$ と需要 $K^d(r)$ が一致する利子率で決まり、存在は中間値の定理で示されます。均衡の利子率は $1/\beta - 1$ より低くなります。
- 数値的には、内生的格子点法・分布の反復・二分法を入れ子にして解きます。

次の章へ　ここまでは、パラメータの値を与えてモデルを解いてきました。次の章では逆に、データからモデルのパラメータを推定する方法の入口（状態空間表現、カルマンフィルタ、尤度とベイズ推定）を学びます。

大学院とのつながり　異質的家計モデルは、格差、金融政策の分配効果、財政政策の乗数など、現代のマクロ経済学の多くの研究の基本の枠組みです。数学的には、確率的動的計画法（第8章）と分布の不動点（第7章）の組み合わせであることを押さえておけば、新しいモデルにも対応できます。

第13章

推定の入口

ここまでの流れ　第11章では、パラメータの値をカリブレーションで決めてDSGEモデルを解きました。解いたモデルは、状態変数の VAR(1) と、それを観測される変数に結びつける式の組になります。

前提知識　第7章の分散共分散行列（命題 7.1）、条件付き期待値は最良の予測であること（命題 7.4）、マルコフ連鎖の定常分布（定理 7.7）、大数の法則と中心極限定理（定理 7.14）。第10章の解の形 $x_{t+1} = Hx_t + \eta\varepsilon_{t+1}$。ベイズの定理と正規分布のもとでの信念の更新（ミクロ版の「確率と期待効用」の章）。逆行列と正定値行列（ミクロ版の「線形代数の基礎と二次形式」の章）。

この章の問い　データから、モデルのパラメータをどのように推定するのでしょうか。観察できない状態変数（技術水準など）を含むモデルの尤度は、どう計算するのでしょうか。

この章で分かること　射影としての最小二乗法、線形射影と正規分布の条件付き期待値（証明）、状態空間表現、カルマンフィルタ（導出）、予測誤差分解による尤度（証明）、最尤法、ベイズ推定とメトロポリス＝ヘイスティングス法（詳細つり合いの証明）、モーメントを合わせる推定（発展）。

13.1　射影としての最小二乗法

推定の数学の中心にあるのは「射影」です。まず、なじみのある最小二乗法で考え方を確認します。n 個の観測を並べた $y \in \mathbb{R}^n$ を、説明変数を並べた $n \times k$ 行列 X（ランク k）の列の線形結合 Xb で近似し、残差平方和 $S(b) = (y - Xb)^\top (y - Xb)$ を最小にする b を求めます。

命題 13.1（最小二乗推定量と直交条件）

$S(b)$ を最小にする b はただ一つで、$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y$ である。残差 $e = y - X\hat{\beta}$ は X のすべての列と直交する（$X^\top e = 0$）。

証明

方針　直交条件を満たす $\hat{\beta}$ を先に作り、それが最小であることを三平方の定理で示します。

X のランクが k なので、$X^\top X$ は正定値で逆行列をもちます（$c \neq 0$ なら $Xc \neq 0$ で

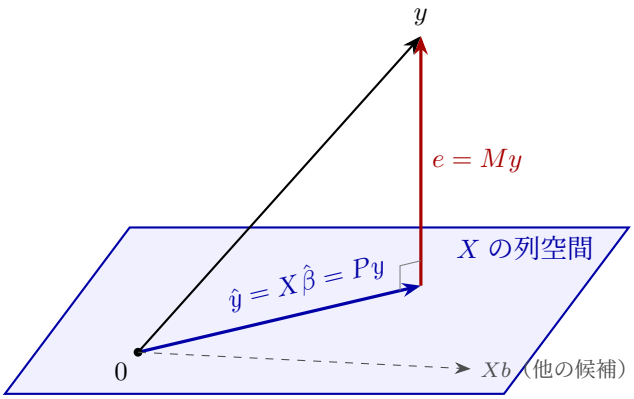
$c^\top X^\top X c = \|Xc\|^2 > 0$）。$\hat\beta = (X^\top X)^{-1} X^\top y$ とおくと $X^\top e = X^\top y - X^\top X\hat\beta = 0$ です。任意の b について

$$
\begin{aligned}
S(b) &= \|e + X(\hat\beta - b)\|^2 && (y - Xb = e + X(\hat\beta - b)) \\
&= \|e\|^2 + 2(\hat\beta - b)^\top X^\top e + \|X(\hat\beta - b)\|^2 && (\text{展開する}) \\
&= S(\hat\beta) + \|X(\hat\beta - b)\|^2 && (X^\top e = 0)
\end{aligned}
$$

なので、$S(b) \geq S(\hat\beta)$ で、等号は $X(\hat\beta - b) = 0$、つまり $b = \hat\beta$ のときだけです。 □

当てはめ値は $\hat y = X\hat\beta = Py$、$P = X(X^\top X)^{-1}X^\top$ と書けます。P を**射影行列**といい、$P^\top = P$、$PP = P$（影の影は影のまま）を満たします。

図 13.1　最小二乗法の幾何学的な意味



模式図。n 次元空間の中の y と、X の列空間（平面で表した）。

図の読み方

1. 青い平面は、係数 b をいろいろ変えたときに作れる当てはめ値 Xb 全体です。最小二乗法は、この平面の中で y に最も近い点を探す問題です（残差平方和は距離の2乗）。
2. 最も近い点は、y から平面に垂線を下ろした足 $\hat y$ です。そのとき残差 e（赤）は平面と直角に交わります。これが直交条件 $X^\top e = 0$ の図形的な意味です。
3. 平面上の他の点（点線）を選ぶと、y までの距離は必ず長くなります。命題 13.1 の証明の三平方の定理です。

13.2　線形射影と正規分布

同じ考え方を、データではなく確率変数に当てはめます。確率変数ベクトル $a \in \mathbb{R}^p$ を、観察できる確率変数ベクトル $b \in \mathbb{R}^q$ の1次式で予測することを考えます。平均を μ_a, μ_b、分散共分散を $\Sigma_{aa} = \mathrm{Var}(a)$、$\Sigma_{ab} = \mathrm{Cov}(a,b) = \mathrm{E}[(a-\mu_a)(b-\mu_b)^\top]$、$\Sigma_{bb} = \mathrm{Var}(b)$（正則）と

書きます。

命題 13.2（線形射影）

$c + Bb$ の形の予測のうち、各成分の平均二乗誤差を最小にするのは

$$\hat{a} = \mu_a + \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}(b - \mu_b)$$

で、予測誤差 $a - \hat{a}$ は b と無相関である。予測誤差の分散は $\Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba}$ である。

証明　$e = a - \hat{a}$ とおくと、$\mathrm{E}[e] = 0$ で、

$$\mathrm{Cov}(e, b) = \Sigma_{ab} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{bb} = 0$$

です。他の予測 $c + Bb$ との差 $\hat{a} - (c + Bb)$ は b の1次式なので、e と無相関です。命題 13.1 の証明と同じく、

$$\mathrm{E}\big[\|a - (c + Bb)\|^2\big] = \mathrm{E}[\|e\|^2] + \mathrm{E}\big[\|\hat{a} - (c + Bb)\|^2\big] \geq \mathrm{E}[\|e\|^2]$$

です。誤差の分散は、$\mathrm{Var}(e) = \mathrm{Var}(a) - \mathrm{Var}(\hat{a})$（$a = \hat{a} + e$ で $\hat{a}$ と e が無相関）に命題 7.1 を使えば得られます。 □

命題 13.3（正規分布の条件付き分布）

(a, b) が同時に正規分布に従うなら、b が与えられたときの a の条件付き分布は正規分布で

$$\mathrm{E}[a \mid b] = \mu_a + \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}(b - \mu_b), \qquad \mathrm{Var}(a \mid b) = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba}.$$

証明　命題 13.2 の予測誤差 e は (a, b) の1次式なので、(e, b) も同時に正規分布に従います。同時に正規分布に従う確率変数は、無相関なら独立であることが知られています（密度関数が積に分かれることから確かめられます。本書では証明しません）。e と b は無相関なので独立で、$a = \hat{a} + e$ の b を与えたときの分布は、定数 $\hat{a}$ に、b によらない正規分布 $N(0, \mathrm{Var}(e))$ を加えたものです。 □

補足：経済学での使いどころ

正規分布のもとでは、最良の予測（条件付き期待値）が1次式になり、その誤差の分散がデータによらない、という2つの性質が、カルマンフィルタを閉じた式にします。1変数で a を状態、$b = a$+ノイズ とすれば、ミクロ版の「確率と期待効用」の章の「事後の平均は精度で重みをつけた平均」という更新の公式に戻ります。信号抽出問題（ルーカスの島モデル）もこの公式で解かれます。

13.3 状態空間表現

第10章の解は、状態 s_t（資本・技術水準など）の VAR(1) でした。データとして観察できるのは産出・消費・インフレ率などで、状態の一部は直接には観察できません。これを

$$s_{t+1} = H s_t + \eta \varepsilon_{t+1}, \qquad \varepsilon_{t+1} \sim N(0, \Omega) \qquad \text{（状態方程式）} \tag{13.1}$$

$$y_t = Z s_t + u_t, \qquad u_t \sim N(0, \Sigma_u) \qquad \text{（観測方程式）} \tag{13.2}$$

と書きます。ε と u は互いに独立で、時点ごとにも独立とします。u_t は**観測誤差**です。これを**状態空間表現**といいます。行列 H, η, Z は、DSGEモデルの構造パラメータ θ（$\beta, \alpha, \rho, \phi_\pi, \ldots$）を第10章の方法で解いて得られる、$\theta$ の関数です。

数式の読み方：観測方程式の作り方

例えば RBCモデルの解から、$\hat{y}_t = Z_y (\hat{k}_t, \hat{z}_t)^\top$ と産出の対数乖離が状態の1次式で書けます。データの産出の成長率を使うなら、観測方程式を「成長率 $=$ 平均成長率 $+\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}$」とし、$\hat{k}_{t-1}$ なども状態に加えます。注意が必要なのは、観測する変数の数がショックの数（観測誤差を含む）より多いと、変数の間に確率的に成り立たない正確な線形関係が生じ、尤度が計算できなくなることです（**確率的特異性**）。

13.4 カルマンフィルタ

t 期までの観測 $Y_t = (y_1, \ldots, y_t)$ をもとに状態 s_t を推測する問題を考えます。$s_{t|t} = \mathrm{E}[s_t \mid Y_t]$、$\Sigma_{t|t} = \mathrm{Var}(s_t \mid Y_t)$、$s_{t+1|t} = \mathrm{E}[s_{t+1} \mid Y_t]$、$\Sigma_{t+1|t} = \mathrm{Var}(s_{t+1} \mid Y_t)$ と書きます。

定理 13.4（カルマンフィルタ）

初期の状態 s_1 が $N(s_{1|0}, \Sigma_{1|0})$ に従うとする。このとき、すべての t で s_t の Y_{t-1} を与えたときの条件付き分布は正規分布 $N(s_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1})$ で、平均と分散は次の漸化式で計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\text{（予測誤差）} && \nu_t = y_t - Z s_{t|t-1}, \qquad G_t = Z\Sigma_{t|t-1}Z^\top + \Sigma_u \\
&\text{（更新）} && K_t = \Sigma_{t|t-1}Z^\top G_t^{-1}, \qquad s_{t|t} = s_{t|t-1} + K_t\nu_t \\
& && \Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t Z \Sigma_{t|t-1} \\
&\text{（予測）} && s_{t+1|t} = H s_{t|t}, \qquad \Sigma_{t+1|t} = H\Sigma_{t|t}H^\top + \eta\Omega\eta^\top
\end{aligned}
$$

また、Y_{t-1} を与えたときの y_t の条件付き分布は $N(Z s_{t|t-1}, G_t)$ である。K_t をカルマン・ゲインという。

証明のアイデア

毎期行うのは、「今日の観測 y_t を見て、状態についての信念を正規分布の公式で更新する」ことと、「状態方程式で信念を1期先に進める」ことの2つだけです。正規分布は1次式で写しても、正規分布で条件づけても正規分布のままなので、信念はいつも平均と分散の2つで完全に表せます。これが、無限に続く時系列の推測が有限個の漸化式で済む理由です。

証明

方針　t についての帰納法で、Y_{t-1} のもとで (s_t, y_t) が同時に正規分布に従うことを示し、命題 13.3 を当てはめます。

ステップ1　更新

Y_{t-1} のもとで $s_t \sim N(s_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1})$ と仮定します。u_t は s_t と Y_{t-1} から独立なので、$y_t = Zs_t + u_t$ と s_t は（Y_{t-1} のもとで）同時に正規分布に従い、

$$
\mathrm{E}[y_t \mid Y_{t-1}] = Z s_{t|t-1}, \quad \mathrm{Var}(y_t \mid Y_{t-1}) = G_t, \quad \mathrm{Cov}(s_t, y_t \mid Y_{t-1}) = \Sigma_{t|t-1}Z^\top
$$

です（命題 7.1）。これで y_t の条件付き分布が分かりました。命題 13.3 で $a = s_t$、$b = y_t$ とすると、$Y_t = (Y_{t-1}, y_t)$ のもとでの s_t の平均と分散は

$$
s_{t|t} = s_{t|t-1} + \Sigma_{t|t-1}Z^\top G_t^{-1}(y_t - Z s_{t|t-1}), \qquad \Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1}Z^\top G_t^{-1} Z \Sigma_{t|t-1}
$$

で、これが更新の式です。

ステップ2　予測

$s_{t+1} = Hs_t + \eta\varepsilon_{t+1}$ で、ε_{t+1} は Y_t と s_t から独立なので、Y_t のもとで s_{t+1} は正規分布に従い、平均は $Hs_{t|t}$、分散は $H\Sigma_{t|t}H^\top + \eta\Omega\eta^\top$ です（命題 7.1）。これで $t+1$ 期の仮定が成り立ち、帰納法が完成します。 □

数式の読み方：更新の式の読み方

- ν_t は「観測が予測からどれだけ外れたか」で、新しい情報そのものです。状態の推測は、その外れに K_t を掛けた分だけ修正されます。
- 1変数なら $K_t = \Sigma_{t|t-1}Z/(Z^2\Sigma_{t|t-1} + \Sigma_u)$ です。観測誤差の分散 Σ_u が大きいほど K_t は小さく、観測をあまり信用しません。状態の不確かさ $\Sigma_{t|t-1}$ が大きいほど K_t は大きく、観測を重視します。
- 分散の漸化式はデータ y_t を含まないので、データを見る前に計算できます。$\Sigma_{t|t-1}$ は多くの場合、一定の値（リカッチ方程式の解）に収束します。
- 初期値には、状態の定常分布（命題 7.11 のリャプノフ方程式の解）を使うのが標準的です。

13.5　尤度関数と最尤法

パラメータ θ のもとでデータ Y_T が観測される確率密度 $L(\theta) = p(Y_T;\theta)$ を、θ の関数とみたものを**尤度関数**といいます。

命題 13.5（予測誤差分解）

状態空間モデル(13.1)・(13.2)の対数尤度は、カルマンフィルタの ν_t, G_t を使って

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\Big(n_y\ln(2\pi) + \ln\det G_t + \nu_t^\top G_t^{-1}\nu_t\Big)$$

と書ける（n_y は観測する変数の数。ν_t, G_t は θ に依存する）。

証明　条件付き密度の定義を繰り返し使うと、同時密度は

$$p(y_1,\dots,y_T) = p(y_1)\,p(y_2\mid Y_1)\,p(y_3\mid Y_2)\cdots p(y_T\mid Y_{T-1})$$

と分解できます。定理 13.4 より、各因子は正規分布 $N(Zs_{t|t-1}, G_t)$ の密度で、y_t での値は $(2\pi)^{-n_y/2}(\det G_t)^{-1/2}\exp(-\frac{1}{2}\nu_t^\top G_t^{-1}\nu_t)$ です。対数をとって足し合わせれば結論を得ます。 □

最尤推定量は、$\ln L(\theta)$ を最大にする $\hat\theta$ です。DSGEモデルでは θ から ν_t, G_t を計算する

手順（モデルを解く → カルマンフィルタを回す）が長いので、最大化は数値的に行います。データが十分多く、モデルが正しく、パラメータが識別できる（異なる θ が異なる尤度関数を与える）という条件のもとで、最尤推定量は真の値に確率収束し、近似的に正規分布に従います。その分散は、対数尤度の2階微分（ヘッセ行列）の期待値の逆行列で近似できます（本書では証明しません。大数の法則と中心極限定理が証明の道具です）。

補足：経済学での使いどころ

DSGEモデルでは、パラメータによっては尤度がほとんど変わらない（識別が弱い）ことが多く、尤度だけで推定すると不安定になりがちです。また、割引因子のように、経済学的に妥当な範囲がはっきりしているパラメータもあります。これらの理由から、次の節のベイズ推定がよく使われます。

13.6 ベイズ推定とメトロポリス＝ヘイスティングス法

ベイズ推定では、パラメータ θ を確率変数とみなし、データを見る前の信念（**事前分布**）$p(\theta)$ を、ベイズの定理で更新した**事後分布**

$$p(\theta \mid Y_T) = \frac{L(\theta)\,p(\theta)}{\int L(\theta')\,p(\theta')\,\mathrm{d}\theta'} \;\propto\; L(\theta)\,p(\theta)$$

を求めます。分子は、カルマンフィルタで尤度を計算すれば、どの θ でも計算できます。困るのは分母の積分で、パラメータが数十個あると直接は計算できません。そこで、事後分布を定常分布とするマルコフ連鎖を作り、それを長く走らせて得た標本で事後分布を近似します（**マルコフ連鎖モンテカルロ法**、MCMC）。

コードで確かめる：ランダムウォーク型のメトロポリス＝ヘイスティングス法

1. 初期値 $\theta^{(0)}$ を決める（事後分布の最頻値など）。
2. j 回目に、候補 $\theta^{*} = \theta^{(j)} + \xi$（$\xi$ は平均 0 の正規乱数）を作る。
3. 比 $\alpha = \min\left\{1,\ \dfrac{L(\theta^{*})p(\theta^{*})}{L(\theta^{(j)})p(\theta^{(j)})}\right\}$ を計算する（分母の積分は打ち消し合うので不要）。
4. 確率 α で候補を採用して $\theta^{(j+1)} = \theta^{*}$、そうでなければ $\theta^{(j+1)} = \theta^{(j)}$ とする。
5. 2〜4を多数回繰り返し、最初の一部を捨てた残りの標本の分布を事後分布の近似とする。

この手順がなぜ事後分布を生み出すのかを、状態が有限個の場合に示します。マルコフ連鎖 Π と分布 π が、すべての i, j で

$$\pi_i \Pi_{ij} = \pi_j \Pi_{ji}$$

を満たすとき、**詳細つり合い**が成り立つといいます（「i から j への流れ」と「j から i への流れ」が等しい）。

命題 13.6（詳細つり合いと定常分布）

1. 詳細つり合いが成り立てば、π は Π の定常分布である。
2. 目標の分布を π（すべての成分が正）とし、候補を作る推移確率 $q_{ij} = q_{ji}$（対称）から、$i \neq j$ について $\Pi_{ij} = q_{ij}\min\{1, \pi_j/\pi_i\}$、残りの確率を Π_{ii} とした連鎖（メトロポリス＝ヘイスティングス法）は、詳細つり合いを満たす。

証明　1：詳細つり合いの式を i について足すと、$\sum_i \pi_i \Pi_{ij} = \pi_j \sum_i \Pi_{ji} = \pi_j$（行の和は 1）で、これは $\pi\Pi = \pi$ です。2：$i = j$ では明らかです。$i \neq j$ で $\pi_j \leq \pi_i$ とすると（逆の場合も同様）、

$$\pi_i \Pi_{ij} = \pi_i q_{ij} \frac{\pi_j}{\pi_i} = \pi_j q_{ij}, \qquad \pi_j \Pi_{ji} = \pi_j q_{ji} \cdot 1 = \pi_j q_{ij}$$

で、両者は等しくなります。　□

数式の読み方：結果の読み方

命題 13.6 より、事後分布は MH法の連鎖の定常分布です。さらに連鎖が定理 7.7 の仮定を満たせば、定常分布はただ一つで、どこから出発してもそこに収束します。エルゴード定理（7.8節）により、標本の平均は事後分布のもとでの期待値に収束します。比 π_j/π_i だけを使うので、事後分布の分母（正規化の定数）がいらない、という点がこの方法の要です。連続的なパラメータの場合も同じ議論が成り立ちますが、その厳密な証明には測度論が必要です。

発展：モーメントを合わせる推定

尤度を使わずに、モデルが予測するモーメント（分散・自己共分散・インパルス応答など）$m(\theta)$ をデータのモーメント $\hat{m}$ に近づける

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \big(\hat{m} - m(\theta)\big)^{\top} W \big(\hat{m} - m(\theta)\big)$$

という推定方法もあります（W は正定値の重み行列）。モーメントを解析的に計算するかわりにモデルのシミュレーションで計算するものを、シミュレーション・モーメント法といいます。構造VARで推定した金融政策ショックのインパルス応答に、モデルのインパルス応答を合わせる方法は、中規模のニューケインジアン・モデルの推定でよく使われます。尤度に比べてモデルの誤った部分に左右されにくい反面、使わない情報がある分だけ効率が落ちます。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- 射影と直交条件 → 最小二乗法、線形予測、カルマンフィルタの更新の式。
- 状態空間表現とカルマンフィルタ → 観察できない状態（技術水準、自然利子率、潜在産出）の推定、DSGEモデルの尤度の計算。
- 予測誤差分解と最尤法 → 動学モデルのパラメータの推定。
- ベイズ推定とMH法 → 中規模DSGEモデルの標準的な推定方法。事前分布で経済学的な知識を取り入れる。

要点

- 最小二乗法は y を説明変数の列空間に射影することで、残差は列空間と直交します。確率変数の線形射影も同じで、正規分布のもとでは条件付き期待値に一致します。
- 線形化したDSGEモデルは、状態方程式と観測方程式からなる状態空間表現になります。
- カルマンフィルタは、正規分布の条件付き分布の公式（更新）と状態方程式（予測）を交互に当てはめて、観察できない状態を推測します。
- 対数尤度は、カルマンフィルタの予測誤差 ν_t とその分散 G_t で書けます。ベイズ推定では、事後分布を詳細つり合いを満たすマルコフ連鎖（MH法）でシミュレーションします。

次の章へ　最後の章では、時間を連続にした確率的なモデルの数学（ブラウン運動、伊藤の補題、確率微分方程式）を学びます。資産価格やマクロ金融の研究で標準的に使われる道具です。

大学院とのつながり　DSGEモデルの推定は、マクロ計量経済学の中心的な話題の一つです。実際の推定では、モデルを解く・カルマンフィルタを回す・MH法を走らせる、という手順を計算ソフトが自動で行いますが、何が計算されているかを知っていれば、推定がうまくいかないとき（識別の問題、事前分布の影響、連鎖の収束の遅さ）に原因を探すことができます。

第14章

連続時間の確率解析

ここまでの流れ　第3・4章で連続時間の確定的な動学（微分方程式とハミルトニアン、HJB方程式）を、第7・8章で離散時間の確率的な動学を学びました。この章では、その2つを合流させます。

前提知識　第3章の1階線形微分方程式と積分因子（定理 3.4）。第4章の発展枠と第6章の発展枠のHJB方程式。第7章のランダムウォーク、マルチンゲール、中心極限定理（定理 7.14）、対数正規分布（命題 7.15）。1変数の2次のテイラー展開。

この章の問い　時間が連続に流れ、ショックも連続的に加わるとき、変数の動きはどう表せばよいのでしょうか。普通の微分の規則（連鎖律）は、そのまま使えるのでしょうか。

この章で分かること　ランダムウォークの極限としてのブラウン運動、二次変動と $(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$（証明）、確率積分と確率微分方程式の考え方、伊藤の補題（導出）、幾何ブラウン運動と平均回帰過程、確率的なHJB方程式とポートフォリオ選択、コルモゴロフの前向き方程式と定常分布、オプション価格の方程式（発展）。

14.1　この章の進め方

連続時間の確率過程を厳密に扱うには、測度論に基づく確率論が必要です。この章では、時間の刻み Δ の離散時間のモデルを考え、$\Delta \to 0$ の極限として連続時間の道具を導きます。証明できるところは離散時間の計算で証明し、極限をとる操作の正当化は「本書では証明しません」と明示します。経済学で使う計算の規則（伊藤の補題、確率的なHJB方程式）は、この方法で正しく導くことができます。

14.2　ブラウン運動

時間の刻みを Δ とし、$\xi_1, \xi_2, \dots$ を互いに独立で $\Pr(\xi_k = \pm 1) = 1/2$ の確率変数とします。時刻 $t = n\Delta$ の値を

$$W^{\Delta}_{n\Delta} = \sqrt{\Delta}\,(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)$$

と定めます。これは、1回の歩幅が $\sqrt{\Delta}$ のランダムウォークです（第7章）。

命題 14.1（歩幅を $\sqrt{\Delta}$ にする理由）

$t = n\Delta$ について、$\mathrm{E}[W_t^{\Delta}] = 0$、$\mathrm{Var}(W_t^{\Delta}) = t$ である。$\Delta \to 0$（t を固定し $n = t/\Delta \to \infty$）のとき、W_t^{Δ} の分布は正規分布 $N(0, t)$ に近づく。

証明　$\mathrm{E}[\xi_k] = 0$、$\mathrm{Var}(\xi_k) = 1$ で独立なので、$\mathrm{Var}(W_t^{\Delta}) = \Delta \cdot n = t$ です。$W_t^{\Delta} = \sqrt{t} \cdot \sqrt{n}\,\bar{\xi}_n$（$\bar{\xi}_n$ は ξ の標本平均）と書けるので、中心極限定理（定理 7.14）から、$\sqrt{n}\,\bar{\xi}_n$ の分布は $N(0,1)$ に近づきます。 □

歩幅を Δ にすると分散は $t\Delta \to 0$ で動きが消え、歩幅を 1 のままにすると分散は $t/\Delta \to \infty$ で発散します。$\sqrt{\Delta}$ だけが、有限で正の分散を残す刻み方です。この極限として得られる過程が、ブラウン運動です。

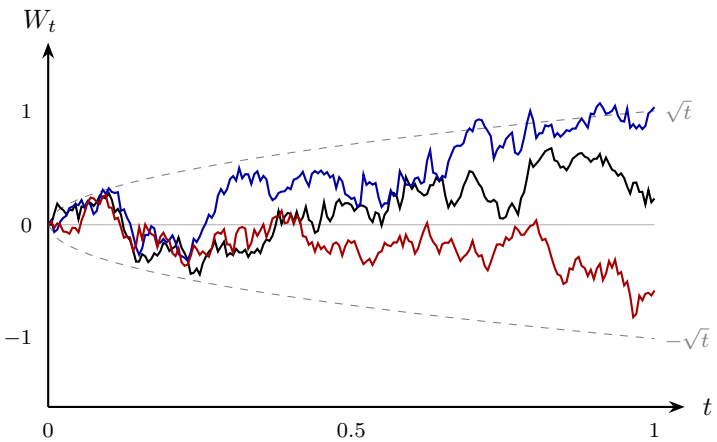
定義 14.2（ブラウン運動）

確率過程 $\{W_t\}_{t \ge 0}$ が次を満たすとき、（標準）ブラウン運動という。

1. $W_0 = 0$。
2. （独立増分）$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ について、増分 $W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ は互いに独立である。
3. （正規増分）$s < t$ について、$W_t - W_s \sim N(0, t-s)$。
4. 経路 $t \mapsto W_t$ は連続である。

このような過程が存在すること、そして W^{Δ} が（経路全体として）W に近づくことは、確率論の定理です（本書では証明しません）。ブラウン運動はマルチンゲールで（$s < t$ なら $\mathrm{E}[W_t \mid W_u, u \le s] = W_s$）、その経路は連続ですが、どの点でも微分できないことが知られています。

図 14.1　ブラウン運動の経路



3本の経路は、$\Delta = 1/200$ として独立な正規乱数 $N(0, \Delta)$ を足し合わせて作った（± 1 のかわりに正規乱数を使っても極限は同じ）。点線は標準偏差 $\pm\sqrt{t}$。

図の読み方

1. どの経路も 0 から出発し、細かくぎざぎざに動きます。どれだけ拡大しても同じようにぎざぎざで、接線が引けません（微分できない）。
2. 点線の $\pm\sqrt{t}$ は、W_t の標準偏差です。経路のばらつきは時間 t ではなく $\sqrt{t}$ に比例して広がります。短い時間 $\mathrm{d}t$ の変化の大きさは $\sqrt{\mathrm{d}t}$ の程度で、$\mathrm{d}t$ よりはるかに大きい、というのが次の節の主題です。

14.3 二次変動と $(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$

区間 $[0, t]$ を幅 $\Delta = t/n$ の小区間に分け、増分を $\Delta W_k = W_{(k+1)\Delta} - W_{k\Delta}$ と書きます。

命題 14.3（二次変動）

$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta W_k)^2$ とおくと、$\mathrm{E}[Q_n] = t$、$\mathrm{Var}(Q_n) = 2t\Delta$ である。したがって $n \to \infty$ のとき Q_n は t に確率収束する。

証明　$\Delta W_k \sim N(0, \Delta)$ は互いに独立です。正規分布 $N(0, \Delta)$ に従う X について $\mathrm{E}[X^2] = \Delta$、$\mathrm{E}[X^4] = 3\Delta^2$ なので（4次のモーメントの公式。本書では証明しません）、$\mathrm{Var}(X^2) = 3\Delta^2 - \Delta^2 = 2\Delta^2$ です。したがって

$$\mathrm{E}[Q_n] = n\Delta = t \qquad \text{（各項の期待値は } \Delta\text{）}$$

$$\mathrm{Var}(Q_n) = n \cdot 2\Delta^2 = 2t\Delta \qquad \text{（独立なので分散は和）}$$

です。チェビシェフの不等式より $\Pr(|Q_n - t| > \delta) \le 2t\Delta/\delta^2 \to 0$ です。 □

用語の説明：伊藤の計算規則

命題 14.3 は、増分の2乗 $(\Delta W)^2$ は確率的に揺れるが、多数足し合わせると揺れが消えて Δ の和（つまり時間 t）になる、ということを述べています。そこで、短い時間の計算では次の規則を使います。

$$(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}W = 0, \qquad (\mathrm{d}t)^2 = 0.$$

$\mathrm{d}t\,\mathrm{d}W$ は $\Delta^{3/2}$、$(\mathrm{d}t)^2$ は Δ^2 の程度で、Δ より速く 0 になるので無視できます。普通の関数では $(\mathrm{d}x)^2$ は無視できますが、ブラウン運動では $(\mathrm{d}W)^2$ が $\mathrm{d}t$ と同じ大きさで残ります。これが確率解析と普通の微積分の違いのすべてです。

14.4　確率微分方程式

確定的な微分方程式 $\mathrm{d}x = \mu(x)\mathrm{d}t$ に、ブラウン運動による揺れを加えた

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t \tag{14.1}$$

を**確率微分方程式**といいます。μ を**ドリフト**（平均的な動き）、σ を**拡散係数**（揺れの大きさ）といいます。この式の意味は、刻み Δ の離散時間の式

$$X_{t+\Delta} = X_t + \mu(X_t)\Delta + \sigma(X_t)\,(W_{t+\Delta} - W_t)$$

の $\Delta \to 0$ の極限、つまり積分の形 $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}W_s$ です。

数式の読み方：確率積分の読み方

- 右辺の第2の積分 $\int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}W_s$ は、和 $\sum_k \sigma(X_{k\Delta})(W_{(k+1)\Delta} - W_{k\Delta})$ の極限で定義します（**伊藤積分**）。被積分関数を必ず区間の**左端**で評価する点が重要です。左端の値は、その区間の増分が起こる前に決まっている（先取りしない）ので、各項の期待値は $\mathrm{E}[\sigma(X_{k\Delta})]\cdot\mathrm{E}[\Delta W_k] = 0$ です。
- このため伊藤積分の期待値は 0 で、伊藤積分はマルチンゲールになります。さらに $\mathrm{E}\big[(\int_0^t \sigma\,\mathrm{d}W)^2\big] = \mathrm{E}\int_0^t \sigma^2\mathrm{d}s$（**伊藤の等長性**）が成り立ちます。これも、異なる区間の増分が無相関で、同じ区間では $(\Delta W)^2$ の期待値が Δ であることから、和の段階で確かめられます。
- 離散時間の式は、そのまま数値シミュレーションの方法（オイラー＝丸山法）になります。図 14.1 は $\mu = 0$、$\sigma = 1$ の場合です。

14.5　伊藤の補題

X_t が(14.1)に従うとき、その関数 $Y_t = f(t, X_t)$ はどんな確率微分方程式に従うでしょうか。

定理 14.4（伊藤の補題）

$f(t,x)$ が t について1回、x について2回連続微分可能なら、$Y_t = f(t, X_t)$ は

$$\mathrm{d}Y_t = \Big(f_t + \mu f_x + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}\Big)\mathrm{d}t + \sigma f_x\,\mathrm{d}W_t$$

に従う（f の偏微分は (t, X_t) で、μ, σ は X_t で評価する）。

証明のアイデア

2次までのテイラー展開をして、伊藤の計算規則で整理するだけです。普通の連鎖律では2次の項 $\frac{1}{2}f_{xx}(\mathrm{d}X)^2$ は無視できますが、$(\mathrm{d}X)^2 = \sigma^2(\mathrm{d}W)^2 = \sigma^2\mathrm{d}t$ は $\mathrm{d}t$ と同じ大きさなので残ります。この1項が、伊藤の補題と普通の連鎖律の違いです。

証明（導出）

方針　短い時間 Δ の変化を2次まで展開し、Δ より小さい項を落とします。厳密な極限の議論は本書では行いません。

$\Delta X = \mu\Delta + \sigma\Delta W$ とすると、テイラーの定理より

$$
\begin{aligned}
\Delta Y &= f_t\Delta + f_x\Delta X + \tfrac{1}{2}f_{xx}(\Delta X)^2 + \cdots && \text{（2次のテイラー展開）}\\
(\Delta X)^2 &= \mu^2\Delta^2 + 2\mu\sigma\Delta\,\Delta W + \sigma^2(\Delta W)^2 \approx \sigma^2\Delta && \text{（伊藤の計算規則）}\\
\Delta Y &\approx f_t\Delta + f_x(\mu\Delta + \sigma\Delta W) + \tfrac{1}{2}f_{xx}\sigma^2\Delta && \text{（}\Delta\text{ より高次の項を落とす）}
\end{aligned}
$$

です（1行目の $\cdots$ は $\Delta\,\Delta X$ と Δ^2 の項で、Δ より速く小さくなります）。Δ の項と ΔW の項にまとめれば結論の式になります。命題 14.3 により、$(\Delta W)^2$ を Δ に置きかえた誤差は、区間全体で足し合わせても 0 に確率収束します。 □

計算例：幾何ブラウン運動

株価のモデルとしてよく使われる $\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}W_t$（変化率のドリフトが μ、変化率の標準偏差が σ）を考えます。$f(x) = \ln x$ とすると $f_x = 1/x$、$f_{xx} = -1/x^2$ なので、伊藤の補題から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\ln S_t &= \Big(\mu S_t\cdot\frac{1}{S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\cdot\Big(-\frac{1}{S_t^2}\Big)\Big)\mathrm{d}t + \sigma S_t\cdot\frac{1}{S_t}\mathrm{d}W_t && \text{（伊藤の補題）}\\
&= \Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t && \text{（整理する）}
\end{aligned}
$$

です。右辺は定数なので、そのまま積分して $\ln S_t = \ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$、つまり $S_t = S_0\exp\big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\big)$ です。$\sigma W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$ なので、命題 7.15 から $\mathrm{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$ です。対数の平均的な伸び率 $\mu - \sigma^2/2$ が変化率の期待値 μ より小さいのは、ジェンセンの不等式の効果で、普通の連鎖律では出てきません。

計算例：平均回帰過程（オルンシュタイン＝ウーレンベック過程）

$\mathrm{d}X_t = \theta(\bar{x} - X_t)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t$（$\theta > 0$）は、$\bar{x}$ から離れると引き戻される過程で、AR(1) 過程の連続時間版です。$f(t,x) = e^{\theta t}x$ に伊藤の補題を使うと（$f_{xx} = 0$ なので2次の項は消える）、

$$\mathrm{d}\big(e^{\theta t}X_t\big) = \theta e^{\theta t}\bar{x}\,\mathrm{d}t + \sigma e^{\theta t}\mathrm{d}W_t$$

です。これは第3章の積分因子の方法と同じ形で、積分すると

$$X_t = \bar{x} + e^{-\theta t}(X_0 - \bar{x}) + \sigma\int_0^t e^{-\theta(t-s)}\mathrm{d}W_s$$

です。最後の項は期待値 0、分散 $\sigma^2\int_0^t e^{-2\theta(t-s)}\mathrm{d}s = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})$（伊藤の等長性）なので、$t \to \infty$ で X_t の分布は $N\big(\bar{x}, \sigma^2/(2\theta)\big)$ に近づきます。AR(1) の分散 $\sigma^2/(1-\rho^2)$ に対応する式です。

14.6 確率的なHJB方程式とポートフォリオ選択

状態 X_t が $\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, c_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, c_t)\mathrm{d}W_t$ に従い、制御 c_t を選んで $\mathrm{E}_0\int_0^\infty e^{-\rho t}u(X_t, c_t)\mathrm{d}t$ を最大にする問題を考えます。価値関数 $V(x)$ について、短い時間 Δ のベルマン方程式は

$$V(x) \approx \max_{c}\Big\{u(x,c)\Delta + (1-\rho\Delta)\mathrm{E}\big[V(X_{t+\Delta}) \mid X_t = x\big]\Big\}$$

です。伊藤の補題から $\mathrm{E}[V(X_{t+\Delta}) \mid X_t = x] \approx V(x) + \big(\mu V' + \frac{1}{2}\sigma^2 V''\big)\Delta$（$\mathrm{d}W$ の項は期待値が 0）なので、第6章の発展枠と同じ手順で $V(x)$ を左辺に移し、Δ で割って $\Delta \to 0$ とすると、

$$\rho V(x) = \max_{c}\Big\{u(x,c) + \mu(x,c)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma(x,c)^2 V''(x)\Big\} \tag{14.2}$$

が得られます。これが**確率的なHJB方程式**です。確定的な場合との違いは、最後の $\frac{1}{2}\sigma^2 V''$ の項だけです。V が凹（$V'' < 0$）なら、この項はリスクによる価値の低下を表します。

計算例：連続時間のポートフォリオ選択

富 w の家計が、安全資産（利子率 r）と、収益率が $\mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W$ の危険資産の間で、富の割合 π を危険資産に投資し、消費 c を選びます。富の動きは $\mathrm{d}w = \big[(r + \pi(\mu - r))w - c\big]\mathrm{d}t + \pi\sigma w\,\mathrm{d}W$ で、効用は $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ とします。HJB方程式(14.2)の π についての一階条件は

$$
\begin{aligned}
(\mu - r)wV'(w) + \pi\sigma^2 w^2 V''(w) = 0 \qquad &\text{（}\pi\text{ で微分）}\\
\pi^* = -\frac{V'(w)}{wV''(w)} \cdot \frac{\mu - r}{\sigma^2} \qquad &\text{（}\pi\text{ について解く）}
\end{aligned}
$$

です。$V(w) = Aw^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ と推測すると $-V'/(wV'') = 1/\gamma$ なので

$$
\pi^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}
$$

となります（A は消費の一階条件とHJB方程式から決まり、推測が正しいことも確かめられます）。危険資産への投資割合は、超過収益率 $\mu - r$ に比例し、危険回避度 γ と分散 σ^2 に反比例し、富の水準によりません。

14.7 コルモゴロフの前向き方程式

個々の X_t が(14.1)に従うとき、その分布の密度 $f(t,x)$ は

$$
\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(x) f\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\sigma(x)^2 f\big) \tag{14.3}
$$

に従って変化します。これを**コルモゴロフの前向き方程式**（フォッカー＝プランク方程式）といいます（本書では証明しません。離散時間のマルコフ連鎖の $p_{t+1} = p_t \Pi$ の連続版です）。第1項はドリフトによる分布の移動、第2項は揺れによる分布の広がりを表します。定常分布の密度 $f(x)$ は、左辺を 0 とおいた式の解です。

命題 14.5（平均回帰過程の定常分布）

$\mu(x) = \theta(\bar{x} - x)$、$\sigma(x) = \sigma$ のとき、前向き方程式の定常解（密度）は正規分布 $N\big(\bar{x}, \sigma^2/(2\theta)\big)$ の密度である。

証明　定常解は $0 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\theta(\bar{x} - x)f\big) + \frac{\sigma^2}{2}f''$ を満たします。x で一度積分し、$x \to \pm\infty$ で f

と f' が 0 になる解を探すと積分定数は 0 で、

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{2} f'(x) &= \theta(\bar{x} - x) f(x) && \text{（一度積分する）} \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= -\frac{2\theta}{\sigma^2}(x - \bar{x}) && \text{（f で割る）} \\
f(x) &= C \exp\!\left(-\frac{\theta (x-\bar{x})^2}{\sigma^2}\right) && \text{（積分する）}
\end{aligned}$$

です。これは平均 $\bar{x}$、分散 $\sigma^2/(2\theta)$ の正規分布の密度の形で、C は積分が 1 になるように決まります。前節の計算例の結果と一致します。 □

補足：経済学での使いどころ

連続時間の異質的家計モデル（第12章の発展枠）では、家計の問題をHJB方程式(14.2)で、資産と所得の分布の動きを前向き方程式(14.3)で表し、両者を連立させて定常均衡を求めます。前向き方程式の右辺の作用素は、HJB方程式の $\mu V' + \frac{1}{2}\sigma^2 V''$ の部分の作用素と互いに随伴（転置）の関係にあり、数値計算では一方の行列を転置するだけで他方が得られます。

発展：オプション価格の方程式（ブラック＝ショールズ）

株価が幾何ブラウン運動 $\mathrm{d}S = \mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W$ に従い、安全利子率が r のとき、満期 T に $g(S_T)$ を支払うオプションの価格を $V(t,S)$ とします。伊藤の補題で $\mathrm{d}V$ を計算し、株を V_S 単位だけ空売りした組み合わせ $V - V_S S$ を作ると、$\mathrm{d}W$ の項が打ち消し合い、短い時間では確実な収益になります。裁定機会がないためには、その収益率が r に等しくなければならず、

$$V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} = rV, \qquad V(T,S) = g(S)$$

という偏微分方程式が得られます。株の期待収益率 μ が式から消えている点が重要です。この方程式の解は、株価が μ のかわりに r のドリフトで動くと考えた確率（リスク中立確率）のもとでの、割り引いた期待値 $V(t,S) = e^{-r(T-t)}\hat{\mathrm{E}}[g(S_T)]$ に一致します（ファインマン＝カッツの公式。本書では証明しません）。これは、ミクロ版の「確率と期待効用」の章の「状態価格・リスク中立確率による価格づけ」の連続時間版です。

補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）

- ブラウン運動と確率微分方程式 → 株価・金利・生産性・所得の連続時間のモデル。
- 伊藤の補題 → 対数をとる・比率をとるなどの変数変換、リスクによる平均の補正（$-\sigma^2/2$）、価格の動きの導出。
- 確率的なHJB方程式 → 連続時間のポートフォリオ選択、マクロ金融モデル、連続時間の異質的家計モデル。
- コルモゴロフの前向き方程式 → 富・企業規模・資産の分布の動きと定常分布。

要点

- ブラウン運動は、歩幅 $\sqrt{\Delta}$ のランダムウォークの極限で、増分は独立で $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ です。
- 増分の2乗の和は時間 t に収束し、$(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$ が成り立ちます。これが普通の微積分との唯一の違いです。
- 伊藤の補題は、2次のテイラー展開で $(\mathrm{d}X)^2 = \sigma^2 \mathrm{d}t$ を残したもので、ドリフトに $\frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}$ の項が加わります。
- 確率的なHJB方程式は $\rho V = \max\{u + \mu V' + \frac{1}{2}\sigma^2 V''\}$ で、分布の動きはその随伴であるコルモゴロフの前向き方程式で表されます。

本書の終わりに　これで、本書で予定したすべての道具がそろいました。最後に「おわりに」で、本書全体の流れを振り返ります。

大学院とのつながり　連続時間の確率解析は、資産価格理論（オプション価格、期間構造）、マクロ金融（金融仲介機関の資本と危機の動学）、連続時間の異質的家計モデルの共通言語です。測度論に基づく厳密な理論を学ぶときにも、この章の「離散時間で計算して極限をとる」見方は、計算の正しさを確かめる手がかりになります。

おわりに

この本でたどった道

この本は、1変数の差分方程式 $x_{t+1} = ax_t$ から出発しました。「$|a| < 1$ なら後ろ向きに、$|a| > 1$ なら前向きに解く」というただ一つの原則が、固有値（第2章）、微分方程式（第3章）、線形合理的期待モデル（第10章）へと形を変えながら、最後にはブランシャール＝カーンの定理として、大規模なDSGEモデルの解が一つに決まる条件になりました。

もう一つの柱は、縮小写像の原理（第5章）でした。関数や分布を未知数とする方程式を不動点として解く、というこの考え方は、次のものの存在と一意性をすべて保証しました。

- 価値関数（第6・8章）
- マルコフ連鎖の定常分布（第7章）
- ルーカスの木の資産価格（第8章）
- 異質的家計モデルの分布（第12章）

最適化の条件の側では、離散時間のラグランジュ法（第1章）、ハミルトニアン（第4章）、ベルマン方程式（第6章）が、同じオイラー方程式と横断性条件を別の角度から導くことを見ました。確率を入れると、それは確率的オイラー方程式と確率的割引因子による資産価格の公式 $1 = \mathrm{E}_t[mR]$ になりました（第8章）。連続時間では、HJB方程式と伊藤の補題がその役割を引き継ぎました（第14章）。

2冊を通して

ミクロ版では、存在を示すために、次の道具を学びました。

- コンパクト性・連続性・凸性
- 不動点定理
- 分離超平面定理

この本では、その道具の多くが動学の文脈で再び現れました。

- ベルジュの最大値定理：価値関数の連続性（第6章）
- KKT条件：借入制約のオイラー不等式（第12章）
- 陰関数定理：摂動法の根拠（第9章）

- 中間値の定理：異質的家計モデルの均衡の存在（第12章）
- 状態価格と資産価格の基本定理：確率的割引因子（第8章）

2冊は別々の本ですが、使っている数学は一つながりです。

この先へ

この本は、各章を「入口」に絞りました。この先に進むときに出会う主な話題と、この本との接点を挙げておきます。

- **測度論に基づく確率論**：連続的な状態の確率的動的計画法、確率積分、エルゴード定理の厳密な証明に必要です。この本で「本書では証明しません」とした箇所の多くは、ここで証明されます。
- **非線形の数値解法**：射影法（チェビシェフ多項式による近似）、高次の摂動法、集計ショックのある異質的家計モデル。第6・9・12章の延長です。
- **マクロ計量経済学**：構造VAR、識別、DSGEモデルのベイズ推定の実際。第7・13章の延長です。
- **資産価格理論とマクロ金融**：確率的割引因子による価格づけ、連続時間のモデル、金融摩擦。第8・14章と、ミクロ版の「確率と期待効用」「契約理論の数学」の章の延長です。

新しいモデルに出会ったら、この本の問いを順に当てはめてみてください。

1. 状態変数と選択は何か。
2. 最適化の条件はどう書けるか。
3. 定常状態はどこにあり、そのまわりで固有値はいくつ単位円の外にあるか。
4. 解の存在を保証している不動点は何か。

多くのモデルは、この本の道具の組み合わせとして読み解けるはずです。