# 大学院ミクロのための経済数学

集合・位相から不動点定理・契約理論まで

第1版　2026年11月

作成：@dokugaku_econ

公開：econ-manuals.netlify.app

# 目次

**序　この本の地図** **2**

序.1　学部の数学と大学院の数学 . . . . . 2

序.2　各章の内容と使われる場面 . . . . . 2

序.3　均衡の存在への道筋 . . . . . 3

序.4　この本の3つの部分と、2冊の関係 . . . . . 4

序.5　この本の読み方 . . . . . 5

**1　集合・関係・写像・論理** **6**

1.1　集合と記号 . . . . . 6

1.2　写像・像・逆像 . . . . . 8

1.3　「任意の」と「存在する」 . . . . . 10

1.4　「ならば」と否定の作り方 . . . . . 11

1.5　証明の基本的な型 . . . . . 12

1.6　二項関係と選好 . . . . . 15

1.7　最大元と上限 . . . . . 21

**2　線形代数の基礎と二次形式** **24**

2.1　この章の見取り図 . . . . . 24

2.2　ベクトルと内積 . . . . . 24

2.3　一次独立・基底・次元 . . . . . 25

2.4　行列と線形写像 . . . . . 31

2.5　正則行列と行列式 . . . . . 34

2.6　直交性と対称行列の固有値 . . . . . 38

2.7　二次形式と定符号 . . . . . 44

2.8　制約のもとでの定符号 . . . . . 50

**3　$\mathbb{R}^n$ の位相：開集合・閉集合・コンパクト性** **54**

3.1　この章の見取り図 . . . . . 54

3.2　ノルムと距離 . . . . . 55

3.3 開集合 . . . . . 57
3.4 閉集合 . . . . . 59
3.5 点列と収束 . . . . . 60
3.6 内部・閉包・境界 . . . . . 65
3.7 ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理 . . . . . 69
3.8 コーシー列と完備性 . . . . . 73
3.9 コンパクト性 . . . . . 76

**4 連続性・最大値定理・対応 83**
4.1 この章の見取り図 . . . . . 83
4.2 連続関数 . . . . . 83
4.3 連続関数が作る開集合・閉集合 . . . . . 86
4.4 ワイエルシュトラスの最大値定理 . . . . . 87
4.5 中間値の定理と一様連続性 . . . . . 88
4.6 連続な効用関数の存在 . . . . . 90
4.7 対応とその連続性 . . . . . 93
4.8 点列による特徴づけ . . . . . 94
4.9 ベルジュの最大値定理 . . . . . 97

**5 凸性と分離超平面定理 103**
5.1 この章の見取り図 . . . . . 103
5.2 凸集合 . . . . . 103
5.3 凹関数と凸関数 . . . . . 106
5.4 準凹関数 . . . . . 110
5.5 射影定理 . . . . . 112
5.6 分離超平面定理 . . . . . 115
5.7 ファルカスの補題 . . . . . 119

**6 勾配・陰関数定理・ヘッセ行列・同次関数 123**
6.1 偏微分と勾配 . . . . . 123
6.2 連鎖律・平均値の定理・テイラーの定理 . . . . . 125
6.3 陰関数定理と比較静学 . . . . . 126

6.4 ヘッセ行列と定符号 . . . . . 129
6.5 同次関数とオイラーの定理 . . . . . 133

**7 制約付き最適化：ラグランジュ法・KKT条件・包絡線定理 136**
7.1 等式制約とラグランジュ乗数法 . . . . . 136
7.2 不等式制約とKKT条件 . . . . . 138
7.3 包絡線定理 . . . . . 143

**8 双対性と比較静学 149**
8.1 この章の見取り図 . . . . . 149
8.2 支持関数と双対定理 . . . . . 150
8.3 支出関数とシェパードの補題 . . . . . 152
8.4 効用最大化と支出最小化の双対性 . . . . . 154
8.5 スルツキー方程式とスルツキー行列 . . . . . 155

**9 確率と期待効用 158**
9.1 この章の見取り図 . . . . . 158
9.2 有限状態の確率と期待値 . . . . . 159
9.3 くじと期待効用定理 . . . . . 159
9.4 危険回避 . . . . . 162
9.5 ベイズの定理と信念の更新 . . . . . 164
9.6 状態価格と資産価格の基本定理 . . . . . 165

**10 不動点定理 168**
10.1 この章の見取り図 . . . . . 168
10.2 不動点とは . . . . . 169
10.3 1次元の場合 . . . . . 169
10.4 ブラウワーの不動点定理 . . . . . 170
10.5 単体と重心座標 . . . . . 171
10.6 スペルナーの補題 . . . . . 172
10.7 ブラウワーの不動点定理の証明（単体の場合） . . . . . 175
10.8 一般のコンパクト凸集合への拡張 . . . . . 176
10.9 角谷の不動点定理 . . . . . 177

**11 均衡の存在と厚生経済学の基本定理 182**

11.1 この章の見取り図 . . . . . 182

11.2 交換経済と超過需要 . . . . . 182

11.3 ワルラス均衡の存在 . . . . . 183

11.4 厚生経済学の基本定理 . . . . . 185

11.5 ナッシュ均衡の存在 . . . . . 188

**12 動学ゲームと不完備情報ゲームの数学 192**

12.1 この章の見取り図 . . . . . 192

12.2 展開形ゲームと後ろ向き帰納法 . . . . . 192

12.3 一回逸脱の原理 . . . . . 193

12.4 繰り返しゲーム . . . . . 195

12.5 ベイジアン・ゲーム . . . . . 196

12.6 単調比較静学 . . . . . 197

**13 契約理論の数学 200**

13.1 この章の見取り図 . . . . . 200

13.2 メカニズムと顕示原理 . . . . . 200

13.3 誘因両立性の特徴づけと情報レント . . . . . 201

13.4 スクリーニング問題の解法 . . . . . 203

13.5 モラルハザード . . . . . 206

序章

# この本の地図

> **この章の問い**　大学院のミクロ経済学では、なぜ学部とは違う種類の数学が必要になるのでしょうか。
> **この章で分かること**　この本で学ぶ数学の全体像と、それぞれがミクロ経済学のどこで使われるか。

## 序.1　学部の数学と大学院の数学

学部のミクロ経済学では、主に「微分して0とおく」計算で最適な消費や生産を求めました。大学院でもこの計算は使いますが、それに加えて次のような問いに答える必要が出てきます。

- 最適な消費は、そもそも**存在する**のか（微分して0とおく前に、答えがあるかどうか）。
- 価格が少し変わったとき、最適な消費も**少しだけ**変わるのか（連続性）。
- すべての市場を同時に清算する価格や、ナッシュ均衡は**存在する**のか。
- 市場均衡が効率的であることを、図ではなく**一般の財の数**で示せるか。

これらは「計算」ではなく「存在」や「性質」を問うものです。そのため大学院のミクロでは、集合・位相・凸性・不動点定理といった、計算よりも構造を扱う数学が中心になります。

## 序.2　各章の内容と使われる場面

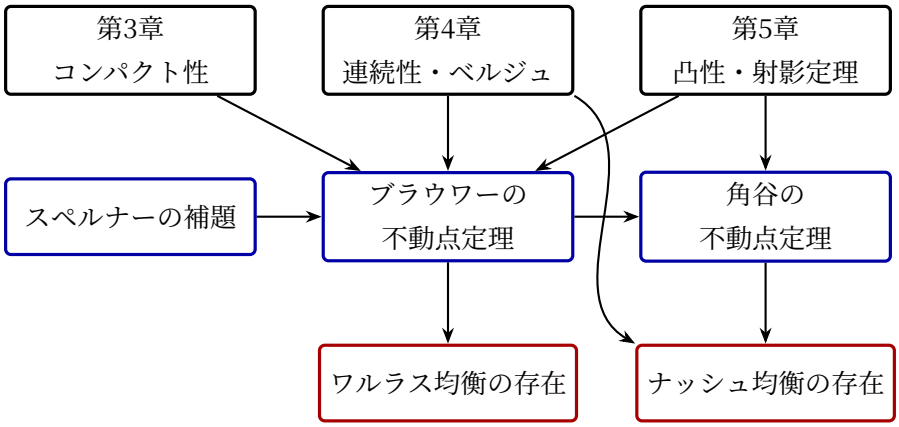
この本は、次の順に道具をそろえていきます。前の章の道具を後の章で使うので、基本的には順番に読むことをおすすめします。

| 章 | 主な道具 | ミクロ経済学で使う場面 |
|---|---|---|
| 第1章 | 集合・関係・写像・論理 | 定義と証明を読むための言葉、選好関係 |
| 第2章 | 行列・行列式・固有値・二次形式 | 比較静学、二階条件、資産のペイオフ |
| 第3章 | 開集合・閉集合・コンパクト性 | 予算集合・価格単体の性質 |
| 第4章 | 連続性・最大値定理・対応・ベルジュの定理 | 需要の存在と連続性 |
| 第5章 | 凸集合・準凹関数・射影定理・分離超平面定理 | 選好の凸性、第二基本定理 |
| 第6章 | 勾配・ヘッセ行列・同次関数・陰関数定理 | 限界代替率、比較静学 |
| 第7章 | ラグランジュ法・KKT条件・包絡線定理 | 効用最大化、乗数の意味 |
| 第8章 | 支持関数・双対定理・スルツキー方程式 | 消費者・生産者理論の双対性、需要の制約 |
| 第9章 | 期待効用定理・危険回避・ベイズの定理・無裁定 | 不確実性下の選択、信念、資産価格 |
| 第10章 | スペルナーの補題・ブラウワーと角谷の不動点定理 | 均衡の存在証明の道具 |
| 第11章 | 均衡の存在・厚生経済学の基本定理 | 一般均衡、ナッシュ均衡 |
| 第12章 | 一回逸脱の原理・ベイジアン・ゲーム・単調比較静学 | 動学ゲーム、不完備情報、戦略的補完性 |
| 第13章 | 顕示原理・包絡線の公式・仮想評価・最適契約 | 逆選択、モラルハザード、金融契約 |

## 序.3　均衡の存在への道筋

この本の中心的な目標は、一般均衡とナッシュ均衡の存在定理を、自分の力で証明できるようになることです。そのために必要な道具は、第3章・第4章・第5章・第10章に分かれていて（存在定理そのものは第11章）、次の図のように積み上がっています。

**図 序.1**　均衡の存在定理への道筋




黒は第3〜5章の道具、青は第10章の不動点定理、赤は経済学の存在定理（第11章）。矢印は「証明でその道具を使う」ことを表す。

**図の読み方**

1. ブラウワーの不動点定理の証明には、スペルナーの補題（組合せ論）に加えて、コンパクト性（近似の極限をとる）、連続性（不等式を極限に持ち越す）、射影定理（一般の凸集合に広げる）のすべてが使われます。
2. 角谷の不動点定理はブラウワーの定理から導かれ、値の凸性（第5章）が鍵になります。
3. ナッシュ均衡の存在には、角谷の定理に加えて、最適反応対応の閉グラフ性を保証するベルジュの最大値定理（第4章）が必要です。

## 序.4　この本の3つの部分と、2冊の関係

この本は、大きく3つの部分からなります。

- **基礎（第1〜5章）**：論理、線形代数、位相、連続性、凸性。存在と性質を示すための言葉と道具です。
- **最適化と双対性（第6〜9章）**：微分、制約付き最適化、双対性、期待効用。消費者理論・生産者理論・不確実性下の選択の計算の道具です。
- **均衡・ゲーム・契約（第10〜13章）**：不動点定理、均衡の存在と厚生定理、動学ゲーム、契約理論。経済全体と戦略的な相互作用の道具です。

この本は「大学院マクロのための経済数学」（マクロ版）と2冊で一組です。この本が静学・存在・最適化を、マクロ版が動学・確率過程・近似を担当します。マクロ版は、この本の位相（完備性）、ベルジュの最大値定理、陰関数定理、KKT条件、包絡線定理を前提にしているので、この本を先に読むことをおすすめします。

## 序.5　この本の読み方

各章では、まず言葉で考え方を説明し、そのあと定義・定理を正確に述べます。定理の証明は、短いものはすべて示し、長いものは「証明のアイデア」で筋道を説明します。長すぎる証明は「本書では証明しません」と明記して主張だけを述べ、使い方を説明します。厳密さを高めた内容や一般化は緑の「発展」の枠にまとめてあるので、最初は飛ばしてもかまいません。各章の冒頭の「前提知識」には、その章で使う前の章の定理を挙げてあります。主な定理の直後の「経済学での使いどころ」は、道具箱として使うときの索引にしてください。

**要点**

- 大学院のミクロでは「計算」に加えて「存在」と「性質」を問うので、構造を扱う数学が必要になります。
- この本の道具は、存在（コンパクト性・連続性・不動点）、性質（凸性・双対性・単調性）、計算（微分・最適化・包絡線定理）、不確実性と情報（期待効用・ベイズの定理・無裁定）に分けられます。

**次の章へ**　まず、定義や定理を読むための共通の言葉である、集合と論理から始めます。

第1章

# 集合・関係・写像・論理

**ここまでの流れ**　序章で、大学院のミクロでは「存在」や「性質」を問う数学が必要になることを見ました。
**前提知識**　高校までの数学（数と式、関数、数列）だけです。この章は、以後のすべての章の前提になります。
**この章の問い**　経済学の定義や定理は、どのような言葉と記号で書かれているのでしょうか。また、「証明する」とは、具体的に何をすることなのでしょうか。
**この章で分かること**　集合の記号、写像と像・逆像、「任意の」「存在する」の読み方と否定の作り方、証明の基本的な型、二項関係としての選好と効用関数による表現、最大元と上限の違い。

## 1.1　集合と記号

集合とは「ものの集まり」で、そこに入っているものを要素（元）といいます。ミクロ経済学では、消費できる財の組の集まり（消費集合）や、買える財の組の集まり（予算集合）が集合の代表例です。

**定義 1.1（集合の基本記号）**
$a \in A$ は「$a$ は集合 $A$ の要素である」ことを、$A \subseteq B$ は「$A$ の要素はすべて $B$ の要素である」（$A$ は $B$ の部分集合）ことを表す。$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ のとき $A = B$ と書く。また

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x : x \in A \text{ または } x \in B\} && \text{（和集合）} \\
A \cap B &= \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\} && \text{（共通部分）} \\
A \setminus B &= \{x : x \in A \text{ かつ } x \notin B\} && \text{（差集合）} \\
A \times B &= \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\} && \text{（直積）}
\end{aligned}
$$

と定める。要素を一つも含まない集合を空集合といい $\emptyset$ で表す。考えている全体の集合 $X$ が決まっているとき、$A \subseteq X$ に対して $X \setminus A$ を $A$ の補集合といい、$A^c$ とも書く。

**数式の読み方**

- $\{x : \text{条件}\}$ は「条件を満たす $x$ をすべて集めた集合」と読みます。コロン「:」は「ただし」の意味で、縦棒「|」で書く本もあります。
- 数学の「または」は、両方が成り立つ場合も含みます。$A \cup B$ には、$A$ と $B$ の両方に入っている要素も入ります。
- $A = B$ の定義は、そのまま証明の方法になります。2つの集合が等しいことを示すには、「$A$ の要素は $B$ に入る」と「$B$ の要素は $A$ に入る」の両方を示します。
- 直積 $A \times B$ は「$A$ から1つ、$B$ から1つ選んだ組」の集まりです。$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ は平面、$n$ 個の直積 $\mathbb{R}^n$ は $n$ 次元の空間です。

集合がたくさんあるときは、番号をつけて $A_1, A_2, \ldots$ や $A_i$（$i \in I$）と書きます。このとき、和集合と共通部分は次のように定めます。

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \text{ある } i \in I \text{ について } x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \text{すべての } i \in I \text{ について } x \in A_i\}.$$

直積も同じように、$X_1 \times \cdots \times X_N = \{(x_1, \ldots, x_N) : x_i \in X_i \ (i = 1, \ldots, N)\}$ と定めます。

**補足：経済学での使いどころ　直積と「自分以外」の記号**

$N$ 人のプレーヤーがそれぞれ戦略の集合 $S_i$ をもつゲームでは、全員の戦略の組は直積 $S = S_1 \times \cdots \times S_N$ の要素 $s = (s_1, \ldots, s_N)$ です。プレーヤー $i$ 以外の戦略の組を $s_{-i}$ と書き、$s = (s_i, s_{-i})$ と表します。交換経済の配分 $x = (x_1, \ldots, x_I)$（消費者 $i$ の消費が $x_i$）も、消費集合の直積の要素です。

経済学で特によく使う集合を、記号とともにまとめておきます。財が $L$ 種類あるとき、財の組は $L$ 個の数を並べたベクトル $x = (x_1, \ldots, x_L)$ で表します。

$$\mathbb{R}^L_+ = \{x \in \mathbb{R}^L : x_\ell \geq 0 \ (\ell = 1, \ldots, L)\} \tag{1.1}$$

$$\mathbb{R}^L_{++} = \{x \in \mathbb{R}^L : x_\ell > 0 \ (\ell = 1, \ldots, L)\} \tag{1.2}$$

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\} \tag{1.3}$$

**数式の読み方：消費集合と予算集合**

- $\mathbb{R}^L_+$ はすべての成分が0以上のベクトルの集まりで、消費集合として使います（マイナスの消費はできない）。$\mathbb{R}^L_{++}$ はすべての成分が正のベクトルで、価格ベクトル $p$ によく使います。
- $p \cdot x = p_1 x_1 + \cdots + p_L x_L$ は内積で、財の組 $x$ を価格 $p$ で買ったときの支出額です（内積は第2章で詳しく扱います）。
- 式 (1.3) の $B(p, w)$ は予算集合で、「所得 $w$ で買える財の組をすべて集めたもの」です。

**補足：ベクトルの大小**

ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^L$ について、$x \geq y$ はすべての成分で $x_\ell \geq y_\ell$、$x \gg y$ はすべての成分で $x_\ell > y_\ell$ であることを表します。$p \gg 0$ は $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ と同じ意味です。数の大小と違って、$x \geq y$ も $y \geq x$ も成り立たない組（例えば $(2,1)$ と $(1,2)$）があることに注意してください。

## 1.2 写像・像・逆像

関数 $f(x)$ は、「数を入れると数が1つ出てくる」ものでした。大学院では入るものも出るものもベクトルや集合の要素になるので、より一般的に「写像」という言葉を使います。

**定義 1.2（写像）**

集合 $X$ の各要素 $x$ に対して、集合 $Y$ の要素をちょうど1つ対応させる規則 $f$ を、$X$ から $Y$ への写像といい、$f : X \to Y$ と書く。$X$ を定義域、$Y$ を終域という。値が実数である写像（$Y = \mathbb{R}$）を、特に関数と呼ぶことが多い。

**定義 1.3（像と逆像）**

写像 $f : X \to Y$ と $A \subseteq X$、$C \subseteq Y$ について、

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \qquad (A \text{ の像})$$
$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\} \qquad (C \text{ の逆像})$$

と定める。定義域全体の像 $f(X)$ を $f$ の値域という。

**数式の読み方：逆像の例**

- 逆像 $f^{-1}(C)$ は「出てくる値が $C$ に入るような入力をすべて集めたもの」です。逆関数が存在しなくても定義できる点に注意してください。
- 効用関数 $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ について、$u^{-1}\big([\bar{u}, \infty)\big) = \{x : u(x) \geq \bar{u}\}$ は「効用が $\bar{u}$ 以上になる財の組の集まり」です。これは第5章で選好の凸性を考えるときに主役になります。

**定義 1.4（単射・全射・合成・逆写像）**

写像 $f : X \to Y$ について、

1. $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ であるとき、$f$ は単射であるという。
2. $f(X) = Y$、つまりどの $y \in Y$ にも $f(x) = y$ となる $x \in X$ があるとき、$f$ は全射であるという。
3. 単射かつ全射であるとき全単射であるという。このとき、各 $y \in Y$ に $f(x) = y$ となるただ一つの $x$ を対応させる写像 $f^{-1} : Y \to X$ が定まり、これを逆写像という。
4. $g : Y \to Z$ も写像のとき、$x$ に $g\big(f(x)\big)$ を対応させる写像を合成写像といい、$g \circ f : X \to Z$ と書く。

**数式の読み方：単射・全射の読み方**

- 単射は「違う入力からは違う出力が出る」、全射は「終域のどの値も、何かの入力から出てくる」という性質です。
- 狭義単調増加の関数は単射です。効用関数に狭義単調増加の関数 $g$ を合成した $g \circ u$ が同じ選好を表す（1.6節）のは、$g$ が大小関係を保ったまま値を付け替えるからです。
- 逆像の記号 $f^{-1}(C)$ と逆写像の記号 $f^{-1}$ は同じ形ですが、逆像は全単射でなくても定義できます。かっこの中が集合なら逆像です。

**補足：経済学での使いどころ　「何から何への写像か」を必ず確かめる**

大学院ミクロでは、同じ $x$ という文字が、文脈によって違う写像を表します。新しい関数が出てきたら、まず「定義域（何を入れるか）」と「終域（何が出てくるか）」を確かめる習慣をつけてください。

- マーシャル需要 $x : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^L_+$ は「価格と所得」を入れて「財の組」を返します。
- ヒックス需要 $h : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^L_+$ は「価格と効用水準」を入れて「財の組」を返します。
- 間接効用関数 $v : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ と支出関数 $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は数を返します。

消費者理論で多くの人が混乱するのは、これらの写像の「入力」の違いを意識しないまま式を読んでしまうからです。逆に、入力と出力を確かめるだけで、双対性の式 $h(p,u) = x(p, e(p,u))$ が「所得の場所に支出関数を代入している」、つまり合成写像であると自然に読めるようになります。

## 1.3　「任意の」と「存在する」

定義や定理には、「すべての〜について」と「ある〜が存在して」という2つの言い回しが繰り返し出てきます。記号ではそれぞれ $\forall$（任意の）と $\exists$（存在する）で表します。

> **定義 1.5（量化子）**
>
> 「$\forall x \in X,\ P(x)$」は「$X$ のすべての要素 $x$ について $P(x)$ が成り立つ」ことを、「$\exists x \in X,\ P(x)$」は「$P(x)$ を満たす $x \in X$ が少なくとも1つある」ことを表す。

量化子が2つ以上並ぶときは、**順番**が意味を決めます。第4章の連続性の定義を先取りして、次の2つの文を比べてみます。

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.4}$$

$$\exists \delta > 0,\ \forall \varepsilon > 0 :\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.5}$$

**数式の読み方：順番で意味が変わる**

- 式 (1.4) は「どんなに小さな誤差 $\varepsilon$ を指定されても、それに応じて $\delta$ を選べる」という意味で、$\delta$ は $\varepsilon$ に応じて変えてよいのです。これが連続性の定義です。
- 式 (1.5) は「ある一つの $\delta$ が、すべての $\varepsilon$ に対して同時に使える」という意味で、$x_0$ の近くで $f$ が一定であることを要求する、ずっと強い条件になります。
- 一般に、「$\exists\forall$」の形の文が成り立てば「$\forall\exists$」の形の文も成り立ちますが、逆は成り立ちません。「全員に、それぞれ好きな財がある」と「全員が好きな財が一つある」の違いです。

## 1.4 「ならば」と否定の作り方

定理の多くは「$P$ ならば $Q$」（$P \Rightarrow Q$）の形をしています。この文は、「$P$ が成り立つのに $Q$ が成り立たない」という場合がないことを主張しています。したがって、$P$ が成り立たない場合については何も主張していません。

**定義 1.6（逆・対偶・同値）**

「$P \Rightarrow Q$」に対して、「$Q \Rightarrow P$」を逆、「$Q$ でない $\Rightarrow P$ でない」を対偶という。$P \Rightarrow Q$ と $Q \Rightarrow P$ の両方が成り立つとき、$P$ と $Q$ は同値であるといい、$P \iff Q$ と書く。

**数式の読み方：逆と対偶**

- 対偶は、もとの文と必ず真偽が一致します。どちらも「$P$ であって $Q$ でない場合はない」と言っているからです。
- 逆は、もとの文が正しくても正しいとは限りません。「効用最大化の解ならば一階条件を満たす」が正しくても、「一階条件を満たせば効用最大化の解である」は、追加の仮定（凹性など）がなければ成り立ちません。

背理法では「定理の結論が成り立たない」と仮定するので、文の否定を正しく作れることが大切です。規則は次の3組です。$\neg P$ は「$P$ でない」を表します。

$$\neg\big(P \text{ かつ } Q\big) \iff \neg P \text{ または } \neg Q, \qquad \neg\big(P \text{ または } Q\big) \iff \neg P \text{ かつ } \neg Q,$$

$$\neg\big(\forall x,\ P(x)\big) \iff \exists x,\ \neg P(x), \qquad \neg\big(\exists x,\ P(x)\big) \iff \forall x,\ \neg P(x),$$

$$\neg\big(P \Rightarrow Q\big) \iff P \text{ かつ } \neg Q.$$

量化子を含む文では、$\forall$ と $\exists$ を入れ替え、最後の条件を否定すればよいことになります。

**計算例：局所非飽和性の否定**

選好 $\succsim$ の局所非飽和性は

$$\forall x \in \mathbb{R}^L_+,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in \mathbb{R}^L_+ :\ \|y - x\| < \varepsilon \text{ かつ } y \succ x$$

と書けます。この否定は、規則を順に当てはめて

$$\exists x \in \mathbb{R}^L_+,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^L_+ :\ \|y - x\| < \varepsilon \Rightarrow y \succ x \text{ でない}$$

となります。最後の部分は、「$\|y - x\| < \varepsilon$ かつ $y \succ x$」の否定「$\|y - x\| \geq \varepsilon$ または $y \succ x$ でない」を、「ならば」の形に書き直したものです。言葉にすると「ある財の組 $x$ のまわりに、$x$ より好ましい組が一つもない小さな範囲がある」、つまり $x$ が（その近くで）飽和点であるということです。

**補足：経済学での使いどころ　パレート効率性の否定**

否定の作り方が最も効いてくるのが、厚生経済学の定理の証明です。配分 $x$ がパレート効率的であるとは

$$\neg\exists x' \text{（実行可能）} :\ \left(\forall i,\ x'_i \succsim_i x_i\right) \text{ かつ } \left(\exists i,\ x'_i \succ_i x_i\right)$$

のことです。この否定（「効率的でない」）は、「全員が少なくとも同じだけ好み、少なくとも一人は厳密に好む実行可能な配分 $x'$ が存在する」となります。厚生経済学の第一基本定理の証明は、まさにこの否定を仮定して矛盾を導く背理法です。「全員」と「少なくとも一人」が入れ替わらないように、量化子を一つずつ確認する習慣が、証明を読み書きするときの最大の武器になります。

## 1.5　証明の基本的な型

大学院のミクロで使う証明は、ほとんどが次の4つの型の組み合わせです。

**定義 1.7（証明の4つの型）**

「$P$ ならば $Q$」を示すとき、

1. （直接証明）$P$ を仮定し、式変形や定義を使って $Q$ を導く。
2. （対偶による証明）「$Q$ でないならば $P$ でない」を示す。
3. （背理法）$P$ かつ「$Q$ でない」を仮定し、矛盾を導く。

また、自然数 $n$ に関する命題 $P(n)$ をすべての $n \geq 1$ について示すとき、

4. （数学的帰納法）$P(1)$ が成り立つことと、「$P(n)$ が成り立つならば $P(n+1)$ も成り立つ」ことを示す。

**補足：必要条件と十分条件**

$P \Rightarrow Q$ が成り立つとき、$P$ は $Q$ の十分条件、$Q$ は $P$ の必要条件といいます。第7章で学ぶKKT条件は、最適解であるための（一定の条件のもとでの）**必要条件**で、凹性などを仮定すると**十分条件**にもなります。どちらの向きの主張なのかを常に意識すると、定理が読みやすくなります。

型に加えて、主張の形ごとに決まった「示し方」があります。以後の章で繰り返し使うので、ここでまとめておきます。

| 示したいこと | 示し方 |
|---|---|
| $A \subseteq B$ | $A$ の要素 $x$ を任意にとり、$x \in B$ を示す |
| $A = B$ | $A \subseteq B$ と $B \subseteq A$ の両方を示す |
| $P \iff Q$ | $P \Rightarrow Q$ と $Q \Rightarrow P$ の両方を示す |
| $\forall x,\ P(x)$ | $x$ を任意に一つ固定し、その $x$ について $P(x)$ を示す |
| $\exists x,\ P(x)$ | $P(x)$ を満たす $x$ を具体的に作る（または存在定理を使う） |
| ただ一つ存在する | 存在を示し、次に「2つあれば等しい」ことを示す |

最初の練習として、集合の等式を2つ証明します。どちらも、後の章で開集合と閉集合を行き来するときに使います。

**命題 1.8（ド・モルガンの法則）**

$X$ の部分集合 $A_i$（$i \in I$）について、次が成り立つ。

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

**証明**

**方針**　$x$ がそれぞれの集合に入る条件を言葉で書き、否定の規則を使います。

$x \in X$ を任意にとります。1つ目の等式について、

$$
\begin{aligned}
x \in \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c &\iff \neg\big(\exists i \in I,\ x \in A_i\big) && \text{（和集合と補集合の定義）}\\
&\iff \forall i \in I,\ x \notin A_i && \text{（}\exists\text{ の否定）}\\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c && \text{（補集合と共通部分の定義）}
\end{aligned}
$$

です。両辺の集合は同じ要素からなるので、等しくなります。2つ目の等式は、$\exists$ と $\forall$ を入れ替えれば同じように示せます。 □

---

**命題 1.9（逆像は集合の演算を保つ）**

写像 $f : X \to Y$ と $C, D \subseteq Y$ について、次が成り立つ。

1. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$、$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$。
2. $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$。

---

**証明**　$x \in X$ を任意にとります。1 の和集合については、

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \text{ または } f(x) \in D && \text{（逆像と和集合の定義）}\\
&\iff x \in f^{-1}(C) \text{ または } x \in f^{-1}(D) && \text{（逆像の定義）}\\
&\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) && \text{（和集合の定義）}
\end{aligned}
$$

です。共通部分は「または」を「かつ」に変えれば同じです。2 については、$x \in f^{-1}(Y \setminus C)$ は $f(x) \notin C$ と同じで、これは $x \notin f^{-1}(C)$ と同じです。 □

**補足：像についての注意**

像については、$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ は成り立ちますが、共通部分は $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ までしか言えません。例えば $f(x) = x^2$、$A = \{-1\}$、$B = \{1\}$ とすると、$A \cap B = \emptyset$ なので左辺は空集合ですが、右辺は $\{1\}$ です。逆像の方が扱いやすいので、第4章では連続性を逆像の言葉で特徴づけます。

**数式の読み方：大学院ミクロの証明はどの型か**

- **直接証明**：オイラーの定理、ロイの恒等式、スルツキー方程式など、式変形で結論にたどりつくもの。
- **対偶**：「$A$ が閉集合でないならば、外へ抜け出す点列がある」（第3章）のように、否定の側の方が具体的なものを作りやすいときに使います。
- **背理法**：ワルラス法則（予算を使い切る）、第一基本定理、需要の一意性など、「もし〜でなければ、より良い選択肢が作れてしまう」という形の議論の多くがこれです。経済学では「最適性に矛盾する」という形で現れるので、「どの最適性に矛盾したのか」を読み取ることが理解の鍵です。
- **数学的帰納法**：財の数、消費者の数、行列の大きさなど、自然数についての主張を一般の場合に広げるときに使います。次の節と第2章に例があります。

## 1.6 二項関係と選好

ミクロ経済学の出発点は、消費者の好みを表す「選好」です。選好は、選択肢の集合 $X$ の2つの要素を比べる関係として定義されます。ここまでに準備した言葉を使って、選好を正確に定義し、基本的な性質を証明しましょう。

**定義 1.10（二項関係）**

集合 $X$ 上の二項関係 $R$ とは、$X$ の要素の順序のついた組 $(x, y)$ のそれぞれについて、「$x\ R\ y$ が成り立つ」か「成り立たない」かを定めたものである。二項関係 $R$ について、次の性質を考える。

1. （反射性）すべての $x \in X$ について $x\ R\ x$。
2. （対称性）$x\ R\ y$ ならば $y\ R\ x$。
3. （推移性）$x\ R\ y$ かつ $y\ R\ z$ ならば $x\ R\ z$。
4. （完備性）すべての $x, y \in X$ について、$x\ R\ y$ または $y\ R\ x$。

**数式の読み方：身近な二項関係**

- 実数の大小 $\geq$ は、反射性・推移性・完備性を満たしますが、対称性は満たしません。
- 等号 $=$ は、反射性・対称性・推移性を満たしますが、完備性は満たしません。
- ベクトルの大小 $x \geq y$（すべての成分で以上）は、反射性・推移性を満たしますが、完備性を満たしません（$(2,1)$ と $(1,2)$ は比べられない）。
- 完備性の条件で $y = x$ とすると $x \ R \ x$ が得られるので、完備ならば反射的です。

**定義 1.11（選好関係）**

集合 $X$ 上の二項関係 $\succsim$ を選好関係といい、$x \succsim y$ を「$x$ を $y$ と少なくとも同じくらい好む」と読む。$\succsim$ から、次の2つの関係を定める。

$$x \succ y \iff x \succsim y \text{ かつ } \neg(y \succsim x) \qquad (x \text{ を } y \text{ より厳密に好む})$$

$$x \sim y \iff x \succsim y \text{ かつ } y \succsim x \qquad (x \text{ と } y \text{ は無差別})$$

$\succsim$ が完備性と推移性を満たすとき、$\succsim$ は合理的であるという。

**数式の読み方：完備性と推移性の意味**

- 完備性は「どんな2つの選択肢も比べられる」という仮定です。「分からない」「比べられない」という答えを認めません。
- 推移性は「好みが循環しない」という仮定です。$x \succsim y$、$y \succsim z$ なのに $z \succ x$ であれば、$z$ から $y$、$y$ から $x$、$x$ から $z$ へと交換を繰り返すたびに少しずつお金を取られても応じてしまうことになります。
- 「合理的」という言葉は、この2つの性質を満たすという意味の専門用語で、「賢い」「利己的」といった日常の意味は含みません。

**命題 1.12（合理的な選好の基本性質）**

$\succsim$ を $X$ 上の合理的な選好関係とする。このとき、次が成り立つ。

1. $\sim$ は反射性・対称性・推移性を満たす。
2. $\succ$ は推移性を満たし、どの $x$ についても $x \succ x$ は成り立たない。
3. $x \succ y$ かつ $y \succsim z$ ならば $x \succ z$。
4. 任意の $x, y \in X$ について、$x \succ y$、$y \succ x$、$x \sim y$ のうち、ちょうど一つが成り立つ。

**証明**

**方針**　$\succ$ と $\sim$ を定義に戻して $\succsim$ の言葉で書き、完備性と推移性を使います。

**ステップ1**　$\sim$ の性質

反射性から確かめます。完備性より $x \succsim x$ なので、$x \sim x$ です。対称性は、$\sim$ の定義が $x$ と $y$ について対称であることから明らかです。推移性を示すために、$x \sim y$ かつ $y \sim z$ とします。$x \succsim y$ と $y \succsim z$ から、推移性より $x \succsim z$ です。同じく $z \succsim y$ と $y \succsim x$ から $z \succsim x$ です。したがって $x \sim z$ です。

**ステップ2**　3 の証明

先に 3 を示します。$x \succ y$ かつ $y \succsim z$ とします。$x \succsim y$ と $y \succsim z$ から、推移性より $x \succsim z$ です。あとは $z \succsim x$ でないことを示せば十分です。背理法で、$z \succsim x$ と仮定します。すると $y \succsim z$ と $z \succsim x$ から、推移性より $y \succsim x$ となります。これは $x \succ y$（特に $y \succsim x$ でない）に矛盾します。

**ステップ3**　$\succ$ の性質

$x \succ y$ かつ $y \succ z$ とします。$y \succ z$ ならば $y \succsim z$ なので、3 より $x \succ z$ です。これで推移性が示せました。また、$x \succ x$ は「$x \succsim x$ かつ $x \succsim x$ でない」を意味するので、成り立つことはありません。

**ステップ4**　4 の証明

$x, y$ を任意にとります。「$x \succsim y$ が成り立つか」と「$y \succsim x$ が成り立つか」の組み合わせは4通りありますが、完備性より「どちらも成り立たない」場合はありません。残りの3通りは、定義からそれぞれ $x \succ y$（前者のみ）、$y \succ x$（後者のみ）、$x \sim y$（両方）に対応し、同時に2つが起こることはありません。　□

反射性・対称性・推移性を満たす二項関係を**同値関係**といいます。命題 1.12 の 1 は、無差別の関係 $\sim$ が同値関係であることを述べています。同値関係があると、集合を「互いに同値なものどうしのグループ」に分けることができます。

**命題 1.13（無差別集合による分割）**

$\succsim$ を $X$ 上の合理的な選好関係とし、$x \in X$ について $I(x) = \{y \in X : y \sim x\}$ を $x$ の無差別集合とする。このとき、

1. すべての $x$ について $x \in I(x)$。
2. $x \sim y$ ならば $I(x) = I(y)$。
3. $x \sim y$ でないならば $I(x) \cap I(y) = \emptyset$。

したがって、$X$ のどの要素も、ちょうど一つの無差別集合に属する。

**証明**　1 は $\sim$ の反射性そのものです。

2 を示します。$x \sim y$ とし、$z \in I(x)$ を任意にとります。$z \sim x$ と $x \sim y$ から、推移性より $z \sim y$、つまり $z \in I(y)$ です。これで $I(x) \subseteq I(y)$ が示せました。対称性より $y \sim x$ でもあるので、$x$ と $y$ を入れ替えた議論から $I(y) \subseteq I(x)$ も成り立ちます。

3 は対偶を示します。$I(x) \cap I(y)$ が空でないとして、その要素 $z$ をとります。$z \sim x$ と対称性から $x \sim z$ で、これと $z \sim y$ から、推移性より $x \sim y$ です。 □

**補足：経済学での使いどころ　無差別曲線は交わらない**

財が2種類のとき、無差別集合 $I(x)$ を図に描いたものが無差別曲線です。命題 1.13 の 3 は「異なる無差別曲線は交わらない」こと、全体としては「どの点もちょうど1本の無差別曲線の上にある」ことを述べています。学部では図で説明されるこの性質は、完備性と推移性だけから導かれる結論です。

選好関係は「比べる」ことしかできないので、最適な選択を計算で求めるには不便です。そこで、選好を数の大小に置きかえる関数を考えます。

**定義 1.14（効用関数による表現）**

関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が選好関係 $\succsim$ を表現するとは、すべての $x, y \in X$ について

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y) \tag{1.6}$$

が成り立つことをいう。このとき $u$ を $\succsim$ の効用関数という。

**数式の読み方：効用の数値に意味はあるか**

- 式 (1.6) が要求しているのは大小関係だけです。$u$ が $\succsim$ を表現するなら、狭義単調増加の関数 $g$ を合成した $g \circ u$ も、$u(x) \geq u(y) \iff g\big(u(x)\big) \geq g\big(u(y)\big)$ なので、同じ $\succsim$ を表現します。
- したがって、効用の値そのものや、効用の差の大きさには意味がありません。意味があるのは順序だけです（序数的効用）。
- $u$ が $\succsim$ を表現するとき、$x \succ y \iff u(x) > u(y)$、$x \sim y \iff u(x) = u(y)$ も成り立ちます。

効用関数で表現できる選好は、どんな選好でしょうか。まず、合理的であることが必要です。

**命題 1.15（表現できる選好は合理的）**

選好関係 $\succsim$ を表現する効用関数が存在するならば、$\succsim$ は合理的である。

**証明**　$u$ が $\succsim$ を表現するとします。任意の $x, y$ について、実数 $u(x)$ と $u(y)$ は $u(x) \geq u(y)$ または $u(y) \geq u(x)$ を満たすので、式 (1.6) より $x \succsim y$ または $y \succsim x$ です（完備性）。また、$x \succsim y$ かつ $y \succsim z$ ならば $u(x) \geq u(y) \geq u(z)$ なので、$u(x) \geq u(z)$、つまり $x \succsim z$ です（推移性）。 □

逆に、選択肢が有限個であれば、合理的な選好は必ず効用関数で表現できます。

**命題 1.16（有限集合上の効用関数の存在）**

$X$ を有限集合、$\succsim$ を $X$ 上の合理的な選好関係とする。このとき、

$$u(x) = \big(x \succsim y \text{ を満たす } y \in X \text{ の個数}\big)$$

で定めた関数 $u : X \to \mathbb{R}$ は、$\succsim$ を表現する。

**証明のアイデア**

「自分以下の選択肢がいくつあるか」を効用の値にします。より好ましい選択肢ほど、それ以下の選択肢を多くもつはずです。このことを保証するのが推移性です。

**証明**　$L(x) = \{y \in X : x \succsim y\}$ とおくと、$u(x)$ は $L(x)$ の要素の個数です。式 (1.6) の両方

向を示します。

**ステップ1**　$x \succsim y$ ならば $u(x) \geq u(y)$

$x \succsim y$ とします。$z \in L(y)$ を任意にとると、$y \succsim z$ なので、推移性より $x \succsim z$、つまり $z \in L(x)$ です。したがって $L(y) \subseteq L(x)$ で、要素の個数を比べると $u(y) \leq u(x)$ です。

**ステップ2**　$u(x) \geq u(y)$ ならば $x \succsim y$

対偶を示します。$x \succsim y$ でないとします。完備性より $y \succsim x$ なので、ステップ1で $x$ と $y$ を入れ替えると $L(x) \subseteq L(y)$ です。さらに、完備性より $y \succsim y$ なので $y \in L(y)$ ですが、$x \succsim y$ でないので $y \notin L(x)$ です。したがって $L(y)$ は $L(x)$ より少なくとも1つ多くの要素をもち、$u(y) > u(x)$ です。つまり $u(x) \geq u(y)$ は成り立ちません。　□

数学的帰納法の例として、有限集合の上では最も好ましい選択肢が必ず存在することも示しておきます。

---

**命題 1.17（有限集合上の最良の選択肢）**

$X$ を空でない有限集合、$\succsim$ を $X$ 上の合理的な選好関係とする。このとき、すべての $y \in X$ について $x^* \succsim y$ となる $x^* \in X$ が存在する。

---

**証明**

**方針**　$X$ の要素の個数 $n$ についての数学的帰納法で示します。

**ステップ1**　$n = 1$ の場合

$X = \{x\}$ のとき、完備性より $x \succsim x$ なので、$x^* = x$ とすれば成り立ちます。

**ステップ2**　$n$ で成り立てば $n+1$ でも成り立つ

要素が $n$ 個の集合では主張が成り立つと仮定し、$X$ の要素が $n+1$ 個であるとします。$X$ から要素 $a$ を一つ取り除いた集合 $X'$ は要素が $n$ 個なので、仮定より、すべての $y \in X'$ について $x' \succsim y$ となる $x' \in X'$ があります。完備性より、$x' \succsim a$ または $a \succsim x'$ です。

$x' \succsim a$ の場合は、$x'$ が $X$ 全体でも条件を満たすので、$x^* = x'$ とします。

$a \succsim x'$ の場合は、任意の $y \in X'$ について $a \succsim x'$ と $x' \succsim y$ から、推移性より $a \succsim y$ です。完備性より $a \succsim a$ でもあるので、$x^* = a$ とします。　□

**補足：選択肢が無限にあるとき**

命題 1.16 と命題 1.17 は、$X$ が無限集合になると、そのままでは成り立ちません。消費集合 $\mathbb{R}^L_+$ は無限集合なので、「効用関数は存在するか」「最適な消費は存在するか」という問いに答えるには、新しい道具が必要です。その道具が、次の章以降で学ぶ位相（閉集合・コンパクト性）と連続性です。次の節で、最良の選択肢が存在しない簡単な例を見ておきます。

## 1.7　最大元と上限

有限個の数の中には必ず最大のものがありますが、無限個の数の集まりでは、そうとは限りません。この違いを正確に述べるための言葉を準備します。

**定義 1.18（上界・最大元・上限）**

$S$ を空でない実数の集合とする。

1. すべての $x \in S$ について $x \leq b$ となる実数 $b$ を、$S$ の上界という。上界が存在するとき、$S$ は上に有界であるという。
2. $S$ の要素であって、$S$ の上界でもある数を、$S$ の最大元といい $\max S$ と書く。
3. $S$ の上界のうち最小のものを、$S$ の上限といい $\sup S$ と書く。

不等号の向きを逆にして、下界・下に有界・最小元 $\min S$・下限 $\inf S$ を同じように定める。

**数式の読み方：最大元と上限の違い**

- 開区間 $S = (0, 1)$ を考えます。$1$ は上界で、$1$ より小さいどの数 $b$ も上界ではありません（$b$ と $1$ の間に $S$ の要素がある）。したがって $\sup S = 1$ です。
- しかし $1 \notin S$ なので、$1$ は最大元ではありません。$S$ のどの要素 $x$ についても、それより大きい $(x+1)/2 \in S$ があるので、$S$ に最大元はありません。
- 閉区間 $[0, 1]$ では $\max[0, 1] = \sup[0, 1] = 1$ です。一般に、最大元があればそれは上限でもあります。違いが生じるのは、上限が集合に入っていないときだけです。

**命題 1.19（上限の特徴づけ）**

$S$ を空でない実数の集合、$s$ を実数とする。$s = \sup S$ であることと、次の2つが成り立つことは同値である。

1. すべての $x \in S$ について $x \leq s$。
2. すべての $\varepsilon > 0$ について、$x > s - \varepsilon$ となる $x \in S$ が存在する。

**証明**　条件 1 は「$s$ は上界である」ことです。条件 2 は「$s$ より小さい数 $s - \varepsilon$ は、どれも上界でない」ことを述べています。実際、「$s - \varepsilon$ は上界である」の否定は、量化子の否定の規則から「$x > s - \varepsilon$ となる $x \in S$ が存在する」です。したがって、1 と 2 を合わせたものは「$s$ は上界で、$s$ より小さい上界はない」、つまり「$s$ は最小の上界である」ことと同じです。 □

**補足：経済学での使いどころ　「最大化問題に解がある」とは**

最大化問題 $\max_{x \in X} f(x)$ に解があるとは、値の集合 $S = \{f(x) : x \in X\}$ に最大元があることです。例えば、「1 未満の量しか消費できない」という集合 $X = [0, 1)$ の上で $f(x) = x$ を最大化する問題には、解がありません。$\sup S = 1$ ですが、それを実現する $x$ が $X$ にないからです。予算集合を $p \cdot x < w$ ではなく $p \cdot x \leq w$ と等号つきで定義するのは、このような事態を避けるためです。どのような集合と関数なら解が存在するのかは、第4章のワイエルシュトラスの最大値定理が答えます。なお、上に有界な集合が必ず上限をもつことは実数の基本的な性質で、第3章で公理として述べます。

**発展：効用関数で表現できない合理的な選好**

$X = \mathbb{R}^2_+$ 上の辞書式選好を、「$x_1 > y_1$、または（$x_1 = y_1$ かつ $x_2 \geq y_2$）」のとき $x \succsim y$、と定めます。辞書の単語の並べ方と同じで、まず第1財の量で比べ、同じときだけ第2財で比べます。この選好は合理的ですが、効用関数では表現できません。

その理由には、無限集合の「大きさ」の違いが関わります。集合 $A$ から自然数の集合への単射があるとき、$A$ は可算であるといいます。有理数の集合は可算ですが、実数の集合や区間 $[0, \infty)$ は可算でないことが知られています（カントールの対角線論法。本書では証明しません）。

辞書式選好を表現する $u$ があったとします。各 $a \geq 0$ について $(a, 1) \succ (a, 0)$ なので、$u(a, 0) < u(a, 1)$ で、この間に有理数 $q(a)$ がとれます。$a < b$ ならば $(b, 0) \succ (a, 1)$ なので、$q(a) < u(a, 1) < u(b, 0) < q(b)$ です。したがって $a \mapsto q(a)$ は $[0, \infty)$ から有理数の集合への単射で、有理数の集合が可算であることから $[0, \infty)$ も可算になります。これは矛盾です。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- 集合の記号：予算集合 $B(p,w)$、生産集合、価格の集合、戦略の組の集合など、ミクロ経済学の対象はほとんどが集合として定義されます。
- 写像の定義域と終域：需要関数・間接効用関数・支出関数の区別、ゲーム理論の最適反応。
- 量化子と否定：選好の公理と局所非飽和性、パレート効率性とコア。
- 証明の型：ワルラス法則と第一基本定理（背理法）、スルツキー方程式（直接証明）。
- 二項関係：消費者の選好、不確実性のもとでのくじの上の選好、社会的選択。
- 最大元と上限：最適解の存在、価値関数の定義。

**要点**

- 集合の等式は「両方向の包含」で、同値は「両方向の『ならば』」で示します。否定は、$\forall$ と $\exists$、「かつ」と「または」を入れ替えて作ります。
- 逆像 $f^{-1}(C)$ は「値が $C$ に入る入力の集まり」で、逆写像がなくても定義でき、集合の演算を保ちます。
- 合理的な選好（完備性と推移性）から、無差別集合が交わらないことや、有限集合の上での効用関数と最良の選択肢の存在が導かれます。
- 上限は最大元と違い、集合に属するとは限りません。「最適解が存在するか」は、値の集合に最大元があるかという問いです。

**次の章へ**　次の章では、財の組や価格を表すベクトルと、多くの変数の関係をまとめて扱う行列を学びます。そのあと第3章で、「近い」「境界を含む」「範囲が限られている」といった性質を集合の言葉で表す、$\mathbb{R}^n$ の位相に進みます。

**大学院とのつながり**　消費者理論は、この章で定義した合理的な選好から出発します。選択肢が無限にあるときに効用関数と最適解が存在するための条件を調べることが、次章以降の大きな目標の一つです。

第2章

# 線形代数の基礎と二次形式

**ここまでの流れ**　前の章で、定義や定理を読み書きするための言葉（集合・写像・量化子・証明の型）を準備しました。

**前提知識**　第1章の集合と写像の記号、背理法と数学的帰納法。高校で学ぶ連立1次方程式、2次方程式の解の公式。2.6節の一か所だけ、複素数（$a+b\mathrm{i}$ の形の数）を使います。

**この章の問い**　財や価格がたくさんあるとき、多くの式をまとめて扱うにはどうすればよいでしょうか。また、「どの方向に動いても目的関数が下がる」という最大点の条件は、どう確かめればよいでしょうか。

**この章で分かること**　ベクトルと内積、一次独立・基底・次元、行列とランク、逆行列と行列式、クラメルの公式、対称行列の固有値と対角化（スペクトル定理の証明）、二次形式の定符号とその判定法（証明）、制約のもとでの定符号。

## 2.1　この章の見取り図

大学院の経済学では、変数が2つや3つではなく、一般に $n$ 個ある問題を扱います。財が $L$ 種類あれば、需要も価格も $L$ 個の数の組になり、市場の均衡条件は $L$ 本の連立方程式になります。このような問題を、変数の数によらない一つの書き方で扱う道具が線形代数です。

この章には2つの山があります。1つ目は、連立1次方程式 $Ax=b$ が「いつ、ただ一つの解をもつか」という問いです。その答えは、一次独立・ランク・行列式という3つの言葉で、互いに同値な形で述べられます（2.2〜2.5節）。2つ目は、$x^{\top}Ax$ という2次式が「どんな $x$ についても正（または負）になるのはいつか」という問いです。その答えは、対称行列の固有値から得られます（2.6〜2.8節）。1つ目は比較静学の計算を、2つ目は最適化の二階条件を支えます。

## 2.2　ベクトルと内積

$n$ 個の実数を並べたものを $n$ 次元のベクトルといい、その全体が $\mathbb{R}^n$ です。この本では、ベクトルは縦に並べたもの（列ベクトル）とし、横に並べたいときは転置の記号 $\top$ をつけて $x^{\top}=(x_1,\dots,x_n)$ と書きます。

**定義 2.1（ベクトルの演算）**

$x=(x_1,\dots,x_n)^\top$、$y=(y_1,\dots,y_n)^\top\in\mathbb{R}^n$ と実数 $c$ について、和とスカラー倍を成分ごとに

$$x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)^\top,\qquad cx=(cx_1,\dots,cx_n)^\top$$

と定める。すべての成分が 0 のベクトルを零ベクトルといい、$0$ と書く。

**定義 2.2（内積・ノルム・直交）**

$x,y\in\mathbb{R}^n$ について、内積を

$$x\cdot y=x^\top y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

と定め、$\|x\|=\sqrt{x\cdot x}$ を $x$ のノルム（長さ）という。$x\cdot y=0$ のとき、$x$ と $y$ は直交するという。

**数式の読み方：内積の性質**

- 内積は、どちらのベクトルについても「和とスカラー倍をばらせる」性質をもちます：$(ax+by)\cdot z=a(x\cdot z)+b(y\cdot z)$。また $x\cdot y=y\cdot x$ です。
- $x\cdot x=x_1^2+\cdots+x_n^2\geq 0$ で、等号は $x=0$ のときだけ成り立ちます。
- 平面や空間では、$x\cdot y=\|x\|\,\|y\|\cos\theta$（$\theta$ は2つのベクトルのなす角）です。直交するとは、なす角が直角であることです。

**補足：経済学での使いどころ**

価格ベクトル $p$ と財の組 $x$ の内積 $p\cdot x$ は支出額です。各資産の保有量を並べたベクトル $\theta$ と資産価格のベクトル $q$ の内積 $q\cdot\theta$ は、ポートフォリオの購入費用です。予算線の上で消費を $x$ から $x'$ に変えると $p\cdot(x'-x)=0$ なので、「予算線に沿った変化は価格ベクトルと直交する」と言えます。

## 2.3　一次独立・基底・次元

いくつかのベクトルを、スカラー倍して足し合わせることで、どれだけのベクトルを作れるでしょうか。この問いが、連立方程式の解の存在と一意性を決めます。

**定義 2.3（一次結合・張る空間・部分空間）**

ベクトル $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ と実数 $c_1, \ldots, c_k$ について、$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k$ を $v_1, \ldots, v_k$ の一次結合という。一次結合の全体

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k) = \{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k : c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

を、$v_1, \ldots, v_k$ が張る空間という。また、$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 $V$ が、和とスカラー倍について閉じている（$x, y \in V$、$c \in \mathbb{R}$ ならば $x + y \in V$、$cx \in V$）とき、$V$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間という。

**定義 2.4（一次独立）**

ベクトル $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ が一次独立であるとは、

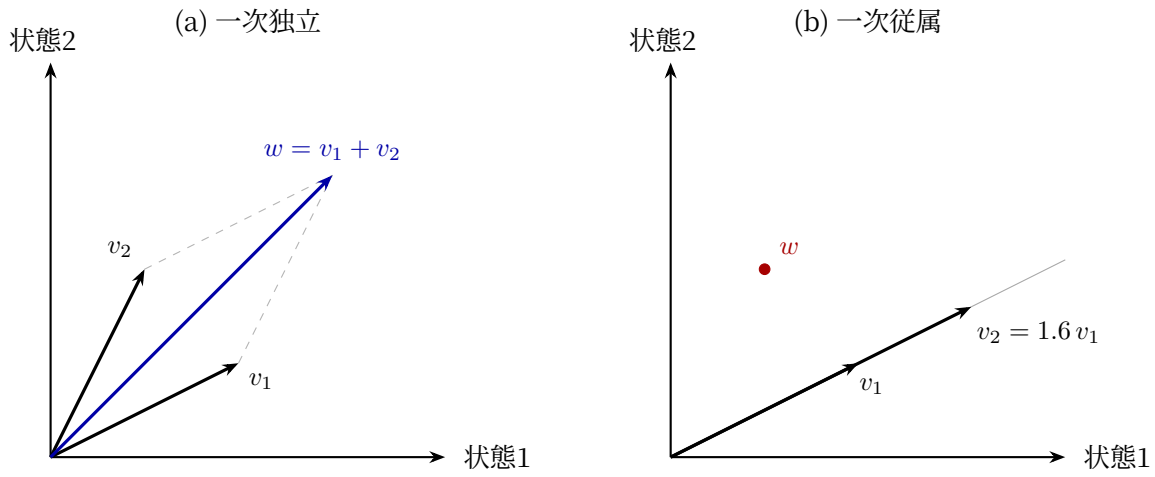
$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0 \quad \text{ならば} \quad c_1 = \cdots = c_k = 0$$

が成り立つことをいう。一次独立でないとき、一次従属であるという。

**数式の読み方：一次独立の意味**

- 一次従属とは、すべてが 0 ではない係数で $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0$ とできることです。例えば $c_1 \neq 0$ なら $v_1 = -(c_2/c_1)v_2 - \cdots - (c_k/c_1)v_k$ と書けるので、「どれか一つが、残りの一次結合で作れてしまう」ことを意味します。
- 一次独立とは、その逆で、「どのベクトルも、残りからは作れない」、つまり無駄なベクトルがないということです。
- 張る空間は必ず部分空間になります。一次結合どうしの和も、一次結合のスカラー倍も、また一次結合だからです。

**図 2.1**　2つのベクトルが張る空間：資産のペイオフの例




横軸は状態1での受け取り、縦軸は状態2での受け取り。(a) $v_1 = (2,1)$、$v_2 = (1,2)$。(b) $v_1 = (2,1)$、$v_2 = (3.2, 1.6)$。灰色の直線は $v_1$ と $v_2$ が張る空間 $\{(2t,t)\}$。

**図の読み方**

1. 将来の状態が2つあり、2つの資産があるとします。ベクトル $v_1, v_2$ は、各資産を1単位もったときの、状態ごとの受け取り（ペイオフ）です。資産を $c_1$ 単位と $c_2$ 単位もつと、受け取りは一次結合 $c_1 v_1 + c_2 v_2$ になります。

2. (a) では $v_1$ と $v_2$ が一次独立で、平面上のどの点も一次結合で作れます。例えば両方を1単位ずつもてば、青の $w = (3,3)$（どちらの状態でも同じ額を受け取る）が得られます。

3. (b) では $v_2$ が $v_1$ の定数倍で、一次従属です。どう組み合わせても、受け取りは灰色の直線の上にしか作れず、赤の点 $w = (1,2)$ は実現できません。2つ目の資産は、1つ目の資産で代用できる「余分な資産」です。

一次独立なベクトルは、いくつまでとれるでしょうか。次の補題が、この節のすべての結果の土台になります。

**補題 2.5（次元より多いベクトルは一次従属）**

$n > m$ ならば、$\mathbb{R}^m$ の $n$ 個のベクトル $a_1, \dots, a_n$ は一次従属である。言い換えると、未知数の数 $n$ が式の数 $m$ より多い連立方程式 $x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0$ は、$x = 0$ 以外の解をもつ。

**証明のアイデア**

連立方程式を解くときの「1つの式を使って1つの未知数を消去する」操作を、そのまま証明にします。式を1本使うと、式も未知数も1つずつ減るので、「未知数の方が多い」という関係は保たれます。これを数学的帰納法の形に整理します。

**証明**

**方針**　式の数 $m$ についての数学的帰納法で示します。

**ステップ1**　$m = 1$ の場合

このとき $a_1, \dots, a_n$ は実数で、$n \geq 2$ です。$a_1 = 0$ なら $x = (1, 0, \dots, 0)$ が、$a_1 \neq 0$ なら $x = (-a_2, a_1, 0, \dots, 0)$ が、$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0$ を満たす $0$ でない解です。

**ステップ2**　$m - 1$ で成り立てば $m$ でも成り立つ

$\mathbb{R}^{m-1}$ については主張が成り立つと仮定し、$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$（$n > m$）をとります。各 $a_j$ の第 $m$ 成分を $\alpha_j$ と書きます。

すべての $\alpha_j$ が $0$ の場合は、各 $a_j$ から第 $m$ 成分を取り除いたベクトル $a'_j \in \mathbb{R}^{m-1}$ を考えます。$n > m - 1$ なので、仮定より、すべてが $0$ ではない $x_1, \dots, x_n$ で $\sum_j x_j a'_j = 0$ となるものがあります。取り除いた成分はもともと $0$ なので、$\sum_j x_j a_j = 0$ も成り立ちます。

そうでない場合は、番号をつけ替えて $\alpha_n \neq 0$ とします。$j = 1, \dots, n-1$ について

$$b_j = a_j - \frac{\alpha_j}{\alpha_n} a_n$$

とおくと、$b_j$ の第 $m$ 成分は $\alpha_j - (\alpha_j/\alpha_n)\alpha_n = 0$ です。$b_j$ から第 $m$ 成分を取り除いたベクトルは $\mathbb{R}^{m-1}$ の $n-1$ 個のベクトルで、$n - 1 > m - 1$ なので、仮定より、すべてが $0$ ではない $c_1, \dots, c_{n-1}$ で $\sum_{j=1}^{n-1} c_j b_j = 0$ となるものがあります。$b_j$ の定義を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{n-1} c_j \Big( a_j - \frac{\alpha_j}{\alpha_n} a_n \Big) && (b_j \text{ の定義を代入}) \\ &= c_1 a_1 + \cdots + c_{n-1} a_{n-1} - \Big( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j \alpha_j}{\alpha_n} \Big) a_n && (a_n \text{ の項をまとめる}) \end{aligned}$$

です。係数 $c_1, \dots, c_{n-1}$ のどれかは $0$ でないので、$a_1, \dots, a_n$ は一次従属です。　□

**定義 2.6（基底・次元）**

部分空間 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ のベクトル $v_1, \dots, v_k$ が、一次独立で、かつ $V$ を張る（$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) = V$）とき、$v_1, \dots, v_k$ を $V$ の基底という。基底をなすベクトルの個数を $V$ の次元といい、$\dim V$ と書く。零ベクトルだけからなる部分空間 $\{0\}$ の次元は 0 と定める。

第 $i$ 成分だけが 1 で他が 0 のベクトルを $e_i$ と書くと、$e_1, \dots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底です（標準基底）。どの $x$ も $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ とただ一通りに書けるからです。次元の定義が意味をもつためには、基底が存在し、その個数がとり方によらないことを確かめる必要があります。

---

**定理 2.7（基底の存在と次元）**

$V$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間で、$V \neq \{0\}$ とする。

1. $v_1, \dots, v_k$ が $V$ を張り、$w_1, \dots, w_l \in V$ が一次独立ならば、$l \leq k$ である。
2. $V$ の一次独立なベクトル $w_1, \dots, w_l$ は、ベクトルを付け加えて $V$ の基底に広げられる。特に $V$ は基底をもつ。
3. $V$ のどの基底も同じ個数のベクトルからなり、その個数は $n$ 以下である。

---

**証明**

**ステップ1**　1 の証明

背理法で示すために、$l > k$ と仮定します。$v_1, \dots, v_k$ が $V$ を張るので、各 $w_j$ は $w_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij} v_i$ と書けます。係数を並べたベクトル $c_j = (c_{1j}, \dots, c_{kj})^{\top} \in \mathbb{R}^k$ は $l$ 個あり、$l > k$ なので、補題 2.5 より、すべてが 0 ではない $x_1, \dots, x_l$ で $\sum_j x_j c_j = 0$ となるものがあります。すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{l} x_j w_j &= \sum_{j=1}^{l} x_j \sum_{i=1}^{k} c_{ij} v_i && (w_j \text{ を } v_i \text{ で表す}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big( \sum_{j=1}^{l} c_{ij} x_j \Big) v_i && (\text{和の順序を入れ替える}) \\
&= 0 && (\textstyle\sum_j x_j c_j = 0 \text{ の第 } i \text{ 成分})
\end{aligned}
$$

となり、$w_1, \dots, w_l$ が一次独立であることに矛盾します。

**ステップ2**　2 の証明

まず、次のことを確かめます。$w_1, \dots, w_l$ が一次独立で、$v \notin \mathrm{span}(w_1, \dots, w_l)$ ならば、$w_1, \dots, w_l, v$ も一次独立です。実際、$c_1 w_1 + \cdots + c_l w_l + c v = 0$ とすると、$c \neq 0$ な

ら $v$ が $w_1, \ldots, w_l$ の一次結合で書けてしまうので $c = 0$ で、すると $w_1, \ldots, w_l$ の一次独立性から残りの係数も 0 です。

そこで、$w_1, \ldots, w_l$ が $V$ を張らないかぎり、張る空間に入らない $V$ のベクトルを一つずつ付け加えていきます。一次独立性は保たれます。$\mathbb{R}^n$ は $e_1, \ldots, e_n$ で張られるので、1 より、一次独立なベクトルは $n$ 個を超えられません。したがって、この操作は必ず止まり、止まったときのベクトルは一次独立で $V$ を張るので、基底です。$V \neq \{0\}$ なので、0 でないベクトル1つ（これは一次独立です）から始めれば、基底が得られます。

**ステップ3**　3 の証明

$v_1, \ldots, v_k$ と $w_1, \ldots, w_l$ がともに $V$ の基底だとします。前者が $V$ を張り、後者が一次独立なので、1 より $l \leq k$ です。役割を入れ替えると $k \leq l$ なので、$k = l$ です。$n$ 以下であることは、ステップ2で見たとおりです。 □

---

**系 2.8**

$V \subseteq W$ がともに $\mathbb{R}^n$ の部分空間ならば $\dim V \leq \dim W$ で、等号が成り立つのは $V = W$ のときに限る。特に、$\mathbb{R}^n$ の $n$ 個の一次独立なベクトルは、$\mathbb{R}^n$ の基底である。

---

**証明**　$V = \{0\}$ の場合は明らかなので、$V \neq \{0\}$ とします。$V$ の基底は $W$ の一次独立なベクトルなので、定理 2.7 の 2 より $W$ の基底に広げられます。したがって $\dim V \leq \dim W$ です。等号が成り立つなら、付け加えるベクトルはなく、$V$ の基底がそのまま $W$ の基底なので、$V = W$ です。後半は、$n$ 個の一次独立なベクトルが張る空間 $V$ と $W = \mathbb{R}^n$ にこの結果を当てはめれば得られます。 □

**補足：経済学での使いどころ　完備市場と余分な資産**

将来の状態が $S$ 個あるとき、資産のペイオフは $\mathbb{R}^S$ のベクトルです。資産の組み合わせでどんなペイオフでも作れる（市場が完備である）とは、資産のペイオフのベクトルが $\mathbb{R}^S$ を張ることです。定理 2.7 と系 2.8 から、そのためには一次独立な資産がちょうど $S$ 個必要で、それで十分です。一次独立な資産が $S$ 個より少なければ、作れないペイオフが残ります（不完備市場）。他の資産の一次結合で書ける資産は、価格が他の資産の価格から決まってしまう資産で、デリバティブの価格づけはこの考え方に基づいています。

## 2.4 行列と線形写像

**定義 2.9（行列とその演算）**

実数を縦 $m$ 行、横 $n$ 列に並べたものを $m \times n$ 行列という。$A$ の第 $i$ 行・第 $j$ 列の成分を $a_{ij}$ と書き、$A$ の第 $j$ 列を並べたベクトルを $a_j \in \mathbb{R}^m$ と書く。

1. $m \times n$ 行列 $A$ と $x \in \mathbb{R}^n$ の積を、$Ax = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \in \mathbb{R}^m$ と定める。その第 $i$ 成分は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ である。
2. $m \times n$ 行列 $A$ と $n \times k$ 行列 $B$ の積 $AB$ を、第 $j$ 列が $Ab_j$（$b_j$ は $B$ の第 $j$ 列）である $m \times k$ 行列と定める。その成分は $(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$ である。
3. 行と列を入れ替えた $n \times m$ 行列を $A$ の転置行列といい、$A^\top$ と書く（$(A^\top)_{ij} = a_{ji}$）。
4. $n \times n$ 行列を正方行列という。対角成分が 1 で他が 0 の正方行列を単位行列といい $I$ と書く。$A^\top = A$ を満たす正方行列を対称行列という。

**数式の読み方：行列の積の読み方**

- $Ax$ は「$A$ の列を、$x$ の成分を係数として一次結合したもの」です。したがって、連立方程式 $Ax = b$ に解があるとは、$b$ が $A$ の列の張る空間に入っていることです。
- 積について、$(AB)C = A(BC)$、$A(B+C) = AB + AC$、$AI = IA = A$ が成り立ちます。しかし $AB = BA$ は一般には成り立ちません。
- 転置については $(AB)^\top = B^\top A^\top$ と、順番が入れ替わります。特に、内積について $(Ax) \cdot y = (Ax)^\top y = x^\top A^\top y = x \cdot (A^\top y)$ です。

行列は、単に数を並べた表ではなく、ベクトルをベクトルに移す写像を表しています。

**定義 2.10（線形写像）**

写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が、すべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ について $f(x+y) = f(x) + f(y)$、$f(cx) = cf(x)$ を満たすとき、$f$ を線形写像という。

**命題 2.11（線形写像と行列）**

$m \times n$ 行列 $A$ について、$f(x) = Ax$ は線形写像である。逆に、任意の線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して、$f(x) = Ax$ となる $m \times n$ 行列 $A$ がただ一つ存在し、その第 $j$ 列は $f(e_j)$ である。

**証明**　前半は、$A(x+y)=\sum_j (x_j+y_j)a_j = Ax+Ay$、$A(cx)=\sum_j cx_j a_j = cAx$ から分かります。後半を示します。$f$ が線形写像なら、$x=\sum_j x_j e_j$ に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= f\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) && (x \text{ を標準基底で表す}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) && (\text{線形性}) \end{aligned}$$

です。これは、第 $j$ 列が $f(e_j)$ である行列 $A$ を使って $Ax$ と書けます。また、$f(x)=Ax$ ならば $f(e_j)=Ae_j=a_j$ なので、このような $A$ は一つに決まります。　□

**数式の読み方：合成と積**

線形写像 $g(y)=Ay$ と $f(x)=Bx$ の合成は $g\big(f(x)\big)=A(Bx)=(AB)x$ です。行列の積は、「写像を続けて行う」ことを表すように定義されています。積の順番を入れ替えられないのは、写像を行う順番を入れ替えると結果が変わるからです。

**定義 2.12（像・核・ランク）**

$m\times n$ 行列 $A$ について、

$$\operatorname{Im} A = \{Ax : x\in\mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m, \qquad \operatorname{Ker} A = \{x\in\mathbb{R}^n : Ax=0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

をそれぞれ $A$ の像、核という。像の次元を $A$ のランク（階数）といい、$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A$ と書く。

像は $A$ の列が張る空間で、核は方程式 $Ax=0$ の解の全体です。どちらも部分空間です。ランクは「$A$ の列のうち、一次独立なものは最大でいくつあるか」を表します。像と核の大きさの間には、次の関係があります。

**定理 2.13（次元定理）**

$m\times n$ 行列 $A$ について、$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$ が成り立つ。

**証明のアイデア**

$\mathbb{R}^n$ の $n$ 個の「方向」のうち、$A$ によって 0 につぶされる方向が核で、つぶされずに残る方向の数がランクです。核の基底を $\mathbb{R}^n$ の基底に広げ、付け加えたベクトルの行き先が、ちょうど像の基底になることを示します。

**証明**　$k=\dim \operatorname{Ker} A$ とし、核の基底を $u_1,\dots,u_k$ とします（$k=0$ のときは、このベクトルはないものとして読んでください）。定理 2.7 の 2 より、ベクトル $w_1,\dots,w_r$ を付け加

えて $\mathbb{R}^n$ の基底にできます。$\mathbb{R}^n$ の基底は $n$ 個なので、$k+r=n$ です。$Aw_1,\dots,Aw_r$ が像の基底であることを示せば、$\operatorname{rank} A = r = n-k$ が得られます。

**ステップ1**　像を張ること

像の要素 $Ax$ を任意にとります。$x=\sum_i \alpha_i u_i + \sum_j \beta_j w_j$ と書くと、$Au_i=0$ なので、

$$Ax = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Au_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j Aw_j = \sum_{j=1}^{r} \beta_j Aw_j$$

となり、$Ax$ は $Aw_1,\dots,Aw_r$ の一次結合です。

**ステップ2**　一次独立であること

$\sum_j \beta_j Aw_j = 0$ とします。左辺は $A\left(\sum_j \beta_j w_j\right)$ なので、$\sum_j \beta_j w_j$ は核の要素で、核の基底を使って

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j w_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$$

と書けます。右辺を移項すると、$u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_r$ の一次結合が 0 になります。これらは一次独立なので、すべての係数が 0 です。特に $\beta_1=\cdots=\beta_r=0$ です。　□

---

**定理 2.14（行のランクと列のランク）**

任意の行列 $A$ について、$\operatorname{rank} A^\top = \operatorname{rank} A$ が成り立つ。つまり、一次独立な行の最大個数と、一次独立な列の最大個数は等しい。

---

**証明**

**方針**　$A$ を「列の数がランクに等しい行列」と別の行列の積に分解します。

$A$ を $m\times n$ 行列、$r=\operatorname{rank} A$ とします。$r=0$ なら $A$ のすべての成分が 0 で、主張は明らかなので、$r\geq 1$ とします。像の基底 $c_1,\dots,c_r\in\mathbb{R}^m$ をとり、これを列とする $m\times r$ 行列を $C$ とします。$A$ の各列 $a_j$ は像に属するので、あるベクトル $d_j\in\mathbb{R}^r$ を使って $a_j=Cd_j$ と書けます。$d_1,\dots,d_n$ を列とする $r\times n$ 行列を $D$ とすると、$A=CD$ です。

転置をとると $A^\top = D^\top C^\top$ なので、$A^\top y = D^\top(C^\top y)$ は $D^\top$ の像に属します。$D^\top$ の列は $r$ 個なので、その像の次元は $r$ 以下です（定理 2.7 の 1）。系 2.8 より、$\operatorname{rank} A^\top \leq r = \operatorname{rank} A$ が得られます。

この不等式はどんな行列についても成り立つので、$A$ の代わりに $A^\top$ に当てはめると、$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^\top)^\top \leq \operatorname{rank} A^\top$ です。2つの不等式を合わせて、等号が成り立ちます。　□

**補足：経済学での使いどころ**

ランクは「実質的に異なる式がいくつあるか」を数えます。$L$ 個の市場の均衡条件は、ワルラス法則のために $L$ 本のうち1本が残りから導かれ、独立な式は高々 $L-1$ 本です。そのため、決まるのは価格の比だけになります。第7章のKKT条件では、有効な制約の勾配ベクトルが一次独立であること（制約を並べた行列のランクが制約の数に等しいこと）が、乗数が存在するための条件として現れます。

## 2.5 正則行列と行列式

この節では、正方行列だけを考えます。$n$ 本の式と $n$ 個の未知数からなる連立方程式 $Ax=b$ が、どんな $b$ に対してもただ一つの解をもつのは、どんなときでしょうか。

**定義 2.15（逆行列・正則）**

$n\times n$ 行列 $A$ に対して、$AB=BA=I$ を満たす $n\times n$ 行列 $B$ が存在するとき、$A$ は正則であるという。この $B$ を $A$ の逆行列といい、$A^{-1}$ と書く。

逆行列は、存在すれば一つに決まります。$B$ と $B'$ がともに逆行列なら、$B=BI=B(AB')=(BA)B'=B'$ だからです。$A$ が正則なら、$Ax=b$ の両辺に左から $A^{-1}$ をかけて、解が $x=A^{-1}b$ と求まります。

**定理 2.16（正則であるための条件）**

$n\times n$ 行列 $A$ について、次の5つは同値である。

1. $A$ は正則である。
2. $Ax=0$ ならば $x=0$（$\operatorname{Ker}A=\{0\}$）。
3. $A$ の $n$ 個の列は一次独立である。
4. $\operatorname{rank}A=n$。
5. どんな $b\in\mathbb{R}^n$ に対しても、$Ax=b$ はただ一つの解をもつ。

**証明**

**方針**　$1\Rightarrow 2\Rightarrow 3\Rightarrow 4\Rightarrow 5\Rightarrow 1$ の順に示します。

**ステップ1**　$1\Rightarrow 2$

$Ax=0$ の両辺に左から $A^{-1}$ をかけると、$x=A^{-1}Ax=A^{-1}0=0$ です。

**ステップ2**　$2\Rightarrow 3$

$Ax=x_1a_1+\cdots+x_na_n$ なので、「$Ax=0$ ならば $x=0$」は、列 $a_1,\dots,a_n$ が一次独立で

あることの定義そのものです。

**ステップ3**　$3 \Rightarrow 4$

列は像を張るので、一次独立ならば像の基底です。したがって $\operatorname{rank} A = n$ です。

**ステップ4**　$4 \Rightarrow 5$

像は $\mathbb{R}^n$ の部分空間で、次元が $n$ なので、系 2.8 より $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^n$ です。したがって、どんな $b$ にも $Ax = b$ の解があります。また、次元定理（定理 2.13）より $\dim \operatorname{Ker} A = n - n = 0$ なので、$Ax = b$ かつ $Ax' = b$ ならば、$A(x - x') = 0$ から $x = x'$ です。

**ステップ5**　$5 \Rightarrow 1$

各 $j$ について、$Ab_j = e_j$ のただ一つの解 $b_j$ をとり、これらを列とする行列を $B$ とします。$AB$ の第 $j$ 列は $Ab_j = e_j$ なので、$AB = I$ です。あとは $BA = I$ を示します。$A(BA - I) = (AB)A - A = A - A$ なので、$BA - I$ の各列 $y$ は $Ay = 0$ を満たします。$Ax = 0$ の解は $x = 0$ だけ（$b = 0$ の場合の一意性）なので、$y = 0$、つまり $BA = I$ です。　□

正則かどうかを一つの数で判定するのが行列式です。行列式は、小さい行列の行列式を使って、順に定義します。

**定義 2.17（行列式）**

$1 \times 1$ 行列 $(a)$ の行列式を $a$ とする。$n \geq 2$ のとき、$n \times n$ 行列 $A$ の行列式 $\det A$ を

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \tag{2.1}$$

と定める。ここで $A_{1j}$ は、$A$ から第 1 行と第 $j$ 列を取り除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列である。$\det A$ を $|A|$ とも書く。

**数式の読み方：小さい行列の行列式**

- $2 \times 2$ では、$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ です。
- $3 \times 3$ では、第1行の各成分に、その行と列を除いた $2 \times 2$ の行列式を、符号 $+, -, +$ をつけてかけて足します。
- 図形的には、$\det A$ の絶対値は、$A$ の列ベクトルが作る平行四辺形の面積（$n = 2$）や平行六面体の体積（$n = 3$）です。列が一次従属なら図形がつぶれて、体積が 0 になります。

行列式の性質のうち、この本で使うものを定理としてまとめます。証明は、行列式の定義（式 (2.1)）に基づく数学的帰納法の計算で、どれも考え方は難しくありませんが、添字

の扱いが長くなります。本書では証明を省き、結果だけを使います。

---

**定理 2.18（行列式の基本性質）**

$n \times n$ 行列 $A, B$ について、次が成り立つ。

1. （列についての線形性）第 $j$ 列が $\alpha u + \beta v$ である行列の行列式は、第 $j$ 列を $u$、$v$ に置きかえた行列の行列式の、$\alpha$ 倍と $\beta$ 倍の和に等しい。
2. （交代性）2つの列を入れ替えると、行列式は $-1$ 倍になる。したがって、2つの列が等しい行列の行列式は $0$ である。
3. （転置）$\det A^{\top} = \det A$。したがって、1 と 2 は「列」を「行」に変えても成り立つ。
4. （積）$\det(AB) = \det A \cdot \det B$。
5. （三角行列）対角成分より下（または上）の成分がすべて $0$ である行列の行列式は、対角成分の積に等しい。特に $\det I = 1$。

---

**定理 2.19（正則性と行列式）**

$n \times n$ 行列 $A$ が正則であることと、$\det A \neq 0$ であることは同値である。

---

**証明**　$A$ が正則なら、$AA^{-1} = I$ の両辺の行列式をとって、性質 4 と 5 より $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ です。したがって $\det A \neq 0$ です。

逆は対偶を示します。$A$ が正則でないとすると、定理 2.16 より列が一次従属なので、ある列が残りの列の一次結合で書けます。番号をつけ替えて $a_n = \sum_{k<n} c_k a_k$ とします。性質 1 より、$\det A$ は「第 $n$ 列を $a_k$ に置きかえた行列の行列式」の $c_k$ 倍の和です。そのどれも、第 $k$ 列と第 $n$ 列が等しいので、性質 2 より $0$ です。したがって $\det A = 0$ です。　□

---

**定理 2.20（クラメルの公式）**

$n \times n$ 行列 $A$ が $\det A \neq 0$ を満たすとき、$Ax = b$ のただ一つの解は

$$x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

で与えられる。ここで $A_j(b)$ は、$A$ の第 $j$ 列を $b$ に置きかえた行列である。

---

**証明**　$x$ を解とすると、$b = Ax = \sum_k x_k a_k$ です。これを $A_j(b)$ の第 $j$ 列に代入すると、性質 1 より

$$\det A_j(b) = \sum_{k=1}^{n} x_k \det A_j(a_k)$$

です。$k \neq j$ のとき、$A_j(a_k)$ は第 $j$ 列と第 $k$ 列がともに $a_k$ なので、性質 2 より行列式は 0 です。$k = j$ のとき $A_j(a_j) = A$ です。したがって $\det A_j(b) = x_j \det A$ で、$\det A \neq 0$ で割れば結論が得られます。 □

**計算例：$2 \times 2$ の逆行列**

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $ad - bc \neq 0$ のとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

です。実際にかけ算をすると $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ が確かめられます。「対角成分を入れ替え、残りの符号を変え、行列式で割る」と覚えます。

**計算例：2つの市場の比較静学**

2つの財の市場の均衡が、超過需要関数を使って $z_1(p_1, p_2, a) = 0$、$z_2(p_1, p_2) = 0$ で決まるとします。$a$ は財1の需要を増やす要因（$\partial z_1 / \partial a > 0$）です。$a$ が変化したときの価格の変化を求めるために、2本の式を全微分します（微分の計算は第6章で改めて扱います）。$z_{ij} = \partial z_i / \partial p_j$ と書くと、

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}p_1 \\ \mathrm{d}p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial z_1}{\partial a}\,\mathrm{d}a \\ 0 \end{pmatrix}$$

です。自分の価格が上がると超過需要は減り（$z_{11} < 0$、$z_{22} < 0$）、2財は代替財で（$z_{12} > 0$、$z_{21} > 0$）、自分の価格の効果の方が強い（$D = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} > 0$）とします。クラメルの公式より

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} -\partial z_1/\partial a & z_{12} \\ 0 & z_{22} \end{pmatrix} = \frac{-z_{22}}{D} \frac{\partial z_1}{\partial a} > 0 \qquad \text{（第1列を置きかえ）}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} z_{11} & -\partial z_1/\partial a \\ z_{21} & 0 \end{pmatrix} = \frac{z_{21}}{D} \frac{\partial z_1}{\partial a} > 0 \qquad \text{（第2列を置きかえ）}$$

となります。財1の需要が増えると、財1の価格だけでなく、代替財である財2の価格も上がります。関数の具体的な形を知らなくても、符号の仮定だけで結論が出ることがポイントです。

**補足：経済学での使いどころ**

均衡条件や一階条件を全微分すると、変化分についての連立1次方程式 $A\,\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}a$ が得られます。比較静学とは、この方程式を解くことです。$\det A \neq 0$ は「均衡が、パラメータの変化に対してただ一通りに動く」ための条件で、第6章の陰関数定理の仮定として現れます。また、$\det A$ の符号は、多くの場合、二階条件や安定性の条件から決まります。

## 2.6 直交性と対称行列の固有値

ここからは、この章の2つ目の山に向かいます。経済学に現れる行列の中で特に重要なのが、対称行列です。関数の2階の偏微分を並べたヘッセ行列、消費者理論のスルツキー行列、資産の収益率の分散共分散行列は、どれも対称行列です。対称行列は、座標軸をうまくとり直すと、対角成分だけの単純な行列になります。そのための準備として、互いに直交するベクトルを軸にすることを考えます。

**定義 2.21（正規直交系・直交行列）**

ベクトル $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}^n$ が、$q_i \cdot q_j = 0$（$i \neq j$）かつ $\|q_i\| = 1$ を満たすとき、正規直交系であるという。$\mathbb{R}^n$ の基底であって正規直交系でもあるものを、正規直交基底という。$n \times n$ 行列 $Q$ が $Q^\top Q = I$ を満たすとき、$Q$ を直交行列という。

**命題 2.22（正規直交系と直交行列の性質）**

1. 正規直交系は一次独立である。
2. $n \times n$ 行列 $Q$ が直交行列であることと、$Q$ の列が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることは同値である。このとき $Q$ は正則で、$Q^{-1} = Q^\top$、$QQ^\top = I$ である。
3. $Q$ が直交行列ならば、任意の $x$ について $\|Qx\| = \|x\|$。また、直交行列の積は直交行列である。

**証明**　1 を示します。$c_1 q_1 + \cdots + c_k q_k = 0$ とし、両辺と $q_i$ との内積をとると、$i \neq j$ の項は消えて $c_i \|q_i\|^2 = c_i = 0$ です。

2 を示します。$Q^\top Q$ の第 $i$ 行・第 $j$ 列の成分は $q_i \cdot q_j$ なので、$Q^\top Q = I$ は「列が正規直交系である」ことと同じです。$n$ 個の正規直交系は、1 と系 2.8 より基底です。また、$Qx = 0$ ならば $x = Q^\top Q x = 0$ なので、定理 2.16 より $Q$ は正則です。$Q^\top Q = I$ の両辺に右から $Q^{-1}$ をかけると $Q^\top = Q^{-1}$ で、したがって $QQ^\top = I$ です。

3 を示します。$\|Qx\|^2 = (Qx)^\top (Qx) = x^\top Q^\top Q x = x^\top x = \|x\|^2$ です。$Q, P$ が直交行列なら、$(QP)^\top (QP) = P^\top Q^\top Q P = P^\top P = I$ です。　□

**命題 2.23（正規直交基底への拡張）**

$\|v_1\| = 1$ を満たす任意の $v_1 \in \mathbb{R}^n$ に対して、$v_1$ を含む $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $v_1, q_2, \ldots, q_n$ が存在する。

**証明**

**方針**　基底を一つとり、前のベクトルと直交するように順に作り直します（グラム＝シュミットの直交化）。

定理2.7の2より、$v_1$ にベクトルを付け加えて $\mathbb{R}^n$ の基底 $v_1, w_2, \ldots, w_n$ を作れます。$q_1 = v_1$ とし、$k = 2, \ldots, n$ の順に

$$u_k = w_k - \sum_{i=1}^{k-1} (q_i \cdot w_k)\, q_i, \qquad q_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

と定めます。作り方から、$q_1, \ldots, q_{k-1}$ はそれぞれ $v_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ の一次結合です。もし $u_k = 0$ なら、$w_k$ が $v_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ の一次結合になり、基底の一次独立性に反します。したがって $u_k \neq 0$ で、$q_k$ が定まります。$j < k$ について、$q_1, \ldots, q_{k-1}$ が正規直交系であることを使うと

$$\begin{aligned} q_j \cdot u_k &= q_j \cdot w_k - \sum_{i=1}^{k-1} (q_i \cdot w_k)(q_j \cdot q_i) && (u_k \text{ の定義}) \\ &= q_j \cdot w_k - q_j \cdot w_k = 0 && (i = j \text{ の項だけが残る}) \end{aligned}$$

なので、$q_k$ は $q_1, \ldots, q_{k-1}$ と直交します。これを $k = n$ まで繰り返すと、$n$ 個の正規直交系が得られ、命題 2.22 よりこれは基底です。　□

**定義 2.24（固有値・固有ベクトル）**

$n \times n$ 行列 $A$ について、0 でないベクトル $x$ と数 $\lambda$ が $Ax = \lambda x$ を満たすとき、$\lambda$ を $A$ の固有値、$x$ を $\lambda$ に対する固有ベクトルという。

**数式の読み方：固有値の意味と求め方**

- 行列 $A$ をかけると、ベクトルはふつう向きも長さも変わります。固有ベクトルは、向きが変わらず、長さだけが $\lambda$ 倍になる特別な方向です。
- $Ax = \lambda x$ は $(A - \lambda I)x = 0$ と書けます。これが $0$ でない解をもつのは、$A - \lambda I$ が正則でないとき、つまり $\det(A - \lambda I) = 0$ のときです（定理 2.16、定理 2.19）。この $\lambda$ についての $n$ 次方程式を特性方程式といいます。
- $2 \times 2$ 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の特性方程式は $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ です。

**計算例：対称行列の固有値と固有ベクトル**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の特性方程式は $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ で、固有値は $\lambda = 3, 1$ です。$\lambda = 3$ のとき $(A - 3I)x = 0$ は $-x_1 + x_2 = 0$ なので、固有ベクトルは $(1, 1)^\top$ の定数倍です。$\lambda = 1$ のとき $x_1 + x_2 = 0$ なので、$(1, -1)^\top$ の定数倍です。2つの固有ベクトルは直交しています。長さを $1$ にそろえて並べた $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ は直交行列で、$Q^\top A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となります。

この例で起きたこと（固有値が実数で、固有ベクトルが直交し、直交行列で対角行列に直せること）は、すべての対称行列で成り立ちます。これが、この章で最も重要な定理です。

**定理 2.25（スペクトル定理：対称行列の対角化）**

$A$ を $n \times n$ の対称行列とする。このとき、実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ と直交行列 $Q$ が存在して、

$$Q^\top A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{すなわち} \qquad A = Q \Lambda Q^\top \tag{2.2}$$

が成り立つ。$Q$ の第 $i$ 列 $q_i$ は固有値 $\lambda_i$ に対する固有ベクトルで、$q_1, \dots, q_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である。

**証明のアイデア**

証明は2つの部分からなります。まず、対称行列が実数の固有値を少なくとも一つもつことを示します。次に、その固有ベクトルを1本目の軸にとると、行列が「固有値」と「サイズが1つ小さい対称行列」に分かれることを示します。小さい方の行列に同じ操作を繰り返せば、最後には対角行列になります。対称性は、両方の部分で決定的な役割を果たします。

**証明**

**ステップ1**　実数の固有値が存在すること

この部分でだけ、複素数を使います。$\det(A-\lambda I)$ は $\lambda$ の $n$ 次多項式なので、代数学の基本定理（複素数を係数とする1次以上の多項式は、複素数の範囲に必ず根をもつ。本書では証明しません）より、$\det(A-\lambda I)=0$ となる複素数 $\lambda$ があります。定理 2.16 と定理 2.19 は成分が複素数でも同じ証明で成り立つので、$Az=\lambda z$ を満たす、0 でない複素数のベクトル $z$ があります。

$z$ の各成分を共役複素数に変えたベクトルを $\bar{z}$ と書き、数 $\bar{z}^\top Az$ を2通りに計算します。まず $Az=\lambda z$ より

$$\bar{z}^\top Az=\lambda\,\bar{z}^\top z=\lambda\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$$

です。一方、$A$ の成分は実数で $A^\top=A$ なので、

$$\begin{aligned}\overline{\bar{z}^\top Az}&=z^\top A\bar{z} && \text{（共役をとる。}A\text{ は実行列）}\\ &=(z^\top A\bar{z})^\top && \text{（数は転置しても変わらない）}\\ &=\bar{z}^\top A^\top z=\bar{z}^\top Az && \text{（転置の規則と }A^\top=A\text{）}\end{aligned}$$

となります。共役をとっても変わらないので、$\bar{z}^\top Az$ は実数です。$\sum_i|z_i|^2$ は正の実数なので、$\lambda$ は実数です。

$\lambda$ が実数なら、$A-\lambda I$ は成分が実数の行列で、行列式が 0 です。したがって定理 2.19 と定理 2.16 より、$(A-\lambda I)x=0$ を満たす 0 でない実数のベクトル $x$ があります。

**ステップ2**　$n$ についての数学的帰納法

$n=1$ のときは、$Q=(1)$ とすれば成り立ちます。$(n-1)\times(n-1)$ の対称行列については定理が成り立つと仮定し、$A$ を $n\times n$ の対称行列とします。ステップ1より、実数の固有値 $\lambda_1$ と固有ベクトルがあります。固有ベクトルを長さで割って、$\|v_1\|=1$、$Av_1=\lambda_1 v_1$ とします。命題 2.23 より、$v_1$ を含む正規直交基底 $v_1,q_2,\dots,q_n$ があります。$q_2,\dots,q_n$ を列とする $n\times(n-1)$ 行列を $U$ とし、$Q_1=(v_1\ U)$ とおくと、$Q_1$ は直交行列です。

**ステップ3**　行列が2つのブロックに分かれること

$Q_1^\top A Q_1$ を、ブロックに分けて計算します。

$$Q_1^\top A Q_1 = \begin{pmatrix} v_1^\top A v_1 & v_1^\top A U \\ U^\top A v_1 & U^\top A U \end{pmatrix}.$$

左上は $v_1^\top A v_1 = \lambda_1 v_1^\top v_1 = \lambda_1$ です。左下は $U^\top A v_1 = \lambda_1 U^\top v_1$ で、$U$ の列は $v_1$ と直交するので 0 です。右上は、$A$ が対称なので $v_1^\top A U = (U^\top A^\top v_1)^\top = (U^\top A v_1)^\top = 0$ です。右下の $B = U^\top A U$ は $(n-1)\times(n-1)$ 行列で、$B^\top = U^\top A^\top U = B$ なので対称です。したがって

$$Q_1^\top A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

となります。

**ステップ4**　帰納法の仮定を使う

仮定より、$(n-1)\times(n-1)$ の直交行列 $P$ と対角行列 $\Lambda'$ があって、$P^\top B P = \Lambda'$ です。そこで

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

とおきます。$Q_2^\top Q_2$ をブロックごとに計算すると単位行列になるので、$Q_2$ は直交行列で、$Q = Q_1 Q_2$ も直交行列です（命題 2.22）。すると

$$\begin{aligned} Q^\top A Q &= Q_2^\top (Q_1^\top A Q_1) Q_2 && (Q = Q_1 Q_2 \text{ を代入}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} && (\text{ステップ3}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & P^\top B P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda' \end{pmatrix} && (\text{ブロックごとに積をとる}) \end{aligned}$$

で、対角行列になります。これを $\Lambda$ とおきます。

最後に、$Q^\top A Q = \Lambda$ の両辺に左から $Q$ をかけると $AQ = Q\Lambda$ です。両辺の第 $i$ 列を比べると $A q_i = \lambda_i q_i$ なので、$Q$ の列は固有ベクトルです。　□

**数式の読み方：$A = Q\Lambda Q^\top$ の読み方**

- $y = Q^\top x$ は、$x$ を固有ベクトルの方向 $q_1, \dots, q_n$ を軸とする座標で表したものです（$y_i = q_i \cdot x$）。直交行列なので、長さも角度も変わりません。
- 新しい座標では、$A$ をかけることは「第 $i$ 軸の方向を $\lambda_i$ 倍する」だけの操作になります。変数どうしが絡み合った問題が、$n$ 個の独立な1変数の問題に分かれます。
- 対称でない行列では、固有値が複素数になったり、固有ベクトルが直交しなかったりします。そのような行列の固有値は、動学システムの安定性を調べるときに必要になります。

正方行列 $A$ の対角成分の和を、$A$ のトレースといい、$\operatorname{tr} A$ と書きます。

**系 2.26（固有値とトレース・行列式）**

対称行列 $A$ の固有値を、式 (2.2) のとおり $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると、

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \qquad \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

**証明**　行列式については、定理 2.18 の性質 3〜5 より $\det Q^\top \det Q = \det(Q^\top Q) = 1$ なので、

$$\det A = \det Q \cdot \det \Lambda \cdot \det Q^\top = \det \Lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

です。トレースについては、まず一般に $\operatorname{tr}(CD) = \sum_i \sum_j c_{ij} d_{ji} = \operatorname{tr}(DC)$ が成り立つことに注意します。これを使うと、$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}\big(Q(\Lambda Q^\top)\big) = \operatorname{tr}\big((\Lambda Q^\top) Q\big) = \operatorname{tr} \Lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ です。 □

**補足：経済学での使いどころ**

多数の資産の収益率の分散共分散行列にスペクトル定理を当てはめると、収益率の変動を、互いに相関のない $n$ 個の方向（固有ベクトル）に分解できます。固有値は各方向の分散で、固有値の大きい少数の方向が変動の大部分を説明することが多く、これが資産価格のファクター・モデルや主成分分析の出発点です。また、次の節で見るように、固有値の符号は、最適化の二階条件を判定する最も基本的な道具です。

**発展：最大化問題としての固有値**

対称行列 $A$ の最大の固有値は、最大化問題の値として

$$\lambda_{\max} = \max\{x^\top A x : \|x\| = 1\}$$

と表せます。$x = Qy$ とおくと $x^\top A x = \sum_i \lambda_i y_i^2$、$\|y\| = 1$ なので、これは $\lambda_i$ の加重平均で、最大の固有値に対応する $y_i$ だけを 1 にしたとき最大になるからです。逆にこの見方から出発して、「単位球面はコンパクトで $x^\top A x$ は連続だから最大点が存在し（第4章）、その点での一階条件 $Ax = \lambda x$（第7章）が固有ベクトルの式になる」という形で、複素数を使わずにスペクトル定理を証明することもできます。固有値は、最適化と深く結びついた概念です。

## 2.7 二次形式と定符号

1変数の関数 $f$ が点 $x^*$ で最大になるための二階条件は、$f''(x^*) \le 0$ でした。変数が $n$ 個になると、2階の微分は $n \times n$ の対称行列（ヘッセ行列）$H$ になり、条件は「どの方向 $h$ に動いても $h^\top H h \le 0$」に変わります（第6章）。この節では、このような条件を確かめる方法を学びます。

**定義 2.27（二次形式）**

$n \times n$ の対称行列 $A$ に対して、関数

$$Q_A(x) = x^\top A x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

を、$A$ が定める二次形式という。

**数式の読み方：二次形式の形**

- $n = 2$、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ のとき、$x^\top A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$ です。対角成分が2乗の項の係数、非対角成分が積の項の係数（の半分）になります。
- 対称でない行列 $M$ についても $x^\top M x$ は計算できますが、$x^\top M x = x^\top\big(\frac{1}{2}(M + M^\top)\big)x$ なので、対称行列 $\frac{1}{2}(M + M^\top)$ で置きかえても値は変わりません。そのため、二次形式では初めから対称行列だけを考えます。

**定義 2.28（定符号）**

$n \times n$ の対称行列 $A$ について、

1. すべての $x \neq 0$ について $x^\top Ax > 0$ のとき、$A$ は正定値であるという。
2. すべての $x$ について $x^\top Ax \geq 0$ のとき、$A$ は半正定値であるという。
3. すべての $x \neq 0$ について $x^\top Ax < 0$ のとき、$A$ は負定値であるという。
4. すべての $x$ について $x^\top Ax \leq 0$ のとき、$A$ は負半定値であるという。
5. $x^\top Ax > 0$ となる $x$ も、$y^\top Ay < 0$ となる $y$ もあるとき、$A$ は不定値であるという。

定義から、$A$ が負定値であることと $-A$ が正定値であることは同じです。また、正定値ならば半正定値です。定符号は、固有値を見ればすぐに判定できます。

---

**定理 2.29（固有値による定符号の判定）**

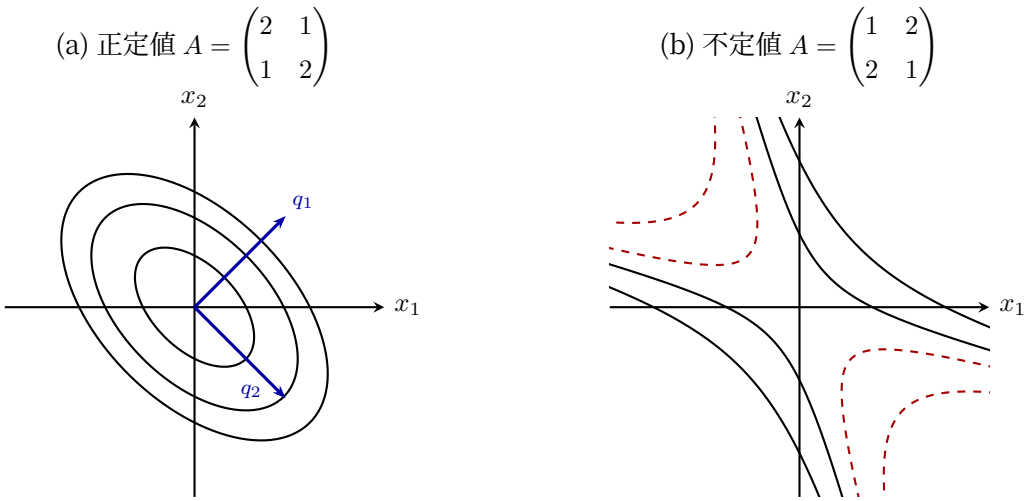
$n \times n$ の対称行列 $A$ の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とし、そのうち最小のものを $\lambda_{\min}$、最大のものを $\lambda_{\max}$ とする。

1. すべての $x \in \mathbb{R}^n$ について、$\lambda_{\min}\|x\|^2 \leq x^\top Ax \leq \lambda_{\max}\|x\|^2$。
2. $A$ が正定値 $\iff$ すべての固有値が正。$A$ が半正定値 $\iff$ すべての固有値が 0 以上。
3. $A$ が負定値 $\iff$ すべての固有値が負。$A$ が負半定値 $\iff$ すべての固有値が 0 以下。
4. $A$ が不定値 $\iff$ 正の固有値と負の固有値の両方がある。

---

証明の前に、$2 \times 2$ の例で、この定理の意味を図で確かめておきます。

**図 2.2**　二次形式の等高線：正定値と不定値




(a) $x^\top Ax = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1, 3, 5$ の等高線。青の矢印は固有ベクトル $q_1$（固有値 3）と $q_2$（固有値 1）の方向。(b) $x^\top Ax = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ の等高線で、黒の実線は値が $1, 4$、赤の点線は値が $-1, -4$。固有ベクトル方向の座標 $y_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$、$y_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$ を使うと、(a) は $3y_1^2 + y_2^2$、(b) は $3y_1^2 - y_2^2$ と書ける。

**図の読み方**

1. (a) の正定値の場合、等高線は原点を中心とする楕円です。どの方向に進んでも値は増えるので、原点は「お椀の底」（最小点）です。楕円の軸は固有ベクトルの方向（青の矢印）で、固有値が大きい $q_1$ の方向ほど値が急に増えるので、その方向には楕円が縮んでいます。

2. (b) の不定値の場合（固有値は 3 と $-1$）、等高線は双曲線になります。$(1, 1)$ の方向に進むと値は増え（黒）、$(1, -1)$ の方向に進むと減ります（赤）。原点は、ある方向では最小、別の方向では最大になる「馬の鞍」の形で、最大点でも最小点でもありません。

3. 負定値の場合は、(a) の上下を逆にした「山の頂上」になります。最大化問題の二階条件が負定値（または負半定値）であるのは、このためです。

**証明**

**方針**　スペクトル定理で座標をとり直し、二次形式を「2乗の和」の形にします。

定理 2.25 の $Q$ をとり、$y = Q^\top x$ とおきます。$x = Qy$ なので

$$\begin{aligned} x^\top Ax &= (Qy)^\top A(Qy) && (x = Qy \text{ を代入}) \\ &= y^\top (Q^\top AQ)y && (\text{転置の規則}) \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 && (Q^\top AQ = \Lambda) \end{aligned} \tag{2.3}$$

です。また、$Q^\top$ も直交行列なので、命題 2.22 より $\|y\| = \|x\|$ です。

1 を示します。各 $\lambda_i$ を $\lambda_{\max}$ で置きかえると、式 (2.3) の右辺は $\lambda_{\max}(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_{\max}\|x\|^2$ 以下です。$\lambda_{\min}$ についても同じです。

2 を示します。すべての固有値が正なら、$x \neq 0$ のとき 1 より $x^\top Ax \geq \lambda_{\min}\|x\|^2 > 0$ です。逆に $A$ が正定値なら、固有ベクトル $q_i$ について $0 < q_i^\top Aq_i = \lambda_i\|q_i\|^2 = \lambda_i$ です。半正定値の場合は、不等号に等号を含めれば同じ議論が成り立ちます。3 は、2 を $-A$（固有値は $-\lambda_i$）に当てはめれば得られます。

4 を示します。$\lambda_i > 0 > \lambda_j$ となる固有値があれば、$q_i^\top Aq_i = \lambda_i > 0$、$q_j^\top Aq_j = \lambda_j < 0$ なので不定値です。逆に、正の固有値と負の固有値の両方があるのでなければ、すべての固有値が 0 以上か、すべてが 0 以下で、2 と 3 より $A$ は半正定値か負半定値となり、不定値ではありません。 □

固有値を求めるには $n$ 次方程式を解かなければならず、文字式のままの行列では実行できないことがよくあります。経済学では、関数の形を特定しないまま符号だけを判定したいので、行列式だけで判定できる次の定理が使われます。対称行列 $A$ の左上の $k \times k$ の部分を $A_k$ とし、$D_k = \det A_k$ を $k$ 次の首座小行列式といいます。

**定理 2.30（首座小行列式による判定）**

$A$ を $n \times n$ の対称行列とする。

1. $A$ が正定値 $\iff$ $D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ \ldots,\ D_n > 0$。
2. $A$ が負定値 $\iff$ $(-1)^k D_k > 0$（$k = 1, \ldots, n$）、つまり $D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0, \ldots$ と符号が交互に変わる。

**証明のアイデア**

「行列式は固有値の積である」ことを使います。正定値なら固有値がすべて正なので、行列式は正です。難しいのは逆向きで、行列式が正でも、負の固有値が偶数個あるかもしれません。しかし、負の固有値が2つあると、その2つの固有ベクトルが張る平面の上では二次形式がつねに負になります。この平面の中には最後の成分が 0 のベクトルがあり、そこでは1つ小さいサイズの行列 $A_{n-1}$ の二次形式を計算していることになります。$A_{n-1}$ が正定値であれば、これは矛盾です。

**証明**

**ステップ1**　1 の「⇒」

$A$ が正定値であるとします。0 でない $y \in \mathbb{R}^k$ に対して、後ろに 0 を並べたベクトル $x = (y, 0) \in \mathbb{R}^n$ を考えると、$y^\top A_k y = x^\top Ax > 0$ です。したがって $A_k$ は正定値で、定理

2.29 よりその固有値はすべて正です。系 2.26 より、$D_k = \det A_k$ は固有値の積なので正です。

**ステップ2**　1 の「$\Leftarrow$」

$n$ についての数学的帰納法で示します。$n = 1$ のときは $A = (a)$、$D_1 = a > 0$ なので明らかです。$n-1$ のとき成り立つと仮定し、$n \times n$ の対称行列 $A$ が $D_1, \dots, D_n > 0$ を満たすとします。$A_{n-1}$ の首座小行列式は $D_1, \dots, D_{n-1}$ なので、仮定より $A_{n-1}$ は正定値です。

背理法で、$A$ が正定値でないと仮定します。$A$ の固有値の積は $D_n > 0$ なので、0 の固有値はなく、負の固有値の個数は偶数です。$A$ は正定値でないので負の固有値が少なくとも1つあり、したがって2つ以上あります。それらを $\lambda_i, \lambda_j < 0$（$i \neq j$）とし、対応する正規直交な固有ベクトルを $q_i, q_j$ とします。

$q_i$ と $q_j$ の第 $n$ 成分をそれぞれ $\alpha, \beta$ とします。$\alpha = \beta = 0$ のときは $(a, b) = (1, 0)$、そうでないときは $(a, b) = (\beta, -\alpha)$ とすると、$(a, b) \neq (0, 0)$ で、$x = aq_i + bq_j$ の第 $n$ 成分は $a\alpha + b\beta = 0$ です。$q_i, q_j$ は一次独立なので $x \neq 0$ です。このとき

$$
\begin{aligned}
x^\top A x &= (aq_i + bq_j)^\top (a\lambda_i q_i + b\lambda_j q_j) && (Aq_i = \lambda_i q_i、\ Aq_j = \lambda_j q_j) \\
&= \lambda_i a^2 + \lambda_j b^2 && (\text{正規直交性}) \\
&< 0 && (\lambda_i, \lambda_j < 0、\ (a, b) \neq (0, 0))
\end{aligned}
$$

です。一方、$x$ の第 $n$ 成分は 0 なので、$x = (y, 0)$、$y \neq 0$ と書けて、$x^\top A x = y^\top A_{n-1} y > 0$ です。これは矛盾です。

**ステップ3**　2 の証明

$A$ が負定値であることは、$-A$ が正定値であることと同じです。$-A$ の $k$ 次の首座小行列式は、$k$ 個の行をそれぞれ $-1$ 倍しているので、定理 2.18 の性質 1（行について）より $(-1)^k D_k$ です。したがって、1 を $-A$ に当てはめれば 2 が得られます。　□

**補足：半定値の判定には注意が必要**

「$D_1 \geq 0, \dots, D_n \geq 0$ ならば半正定値」は成り立ちません。例えば $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は $D_1 = 0$、$D_2 = 0$ ですが、$x = (0, 1)^\top$ で $x^\top A x = -1 < 0$ です。半正定値であるための必要十分条件は、左上に限らず、同じ番号の行と列を選んで作ったすべての小行列式（主小行列式）が 0 以上であることです（本書では証明しません）。半定値かどうかを確かめるときは、固有値を調べるか、二次形式を直接「2乗の和」の形に変形する方が確実です。

**計算例：$2\times 2$ の場合**

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について、定理 2.30 より

$$\text{正定値} \iff a>0 \text{ かつ } ac-b^2>0,$$
$$\text{負定値} \iff a<0 \text{ かつ } ac-b^2>0$$

です。どちらの場合も $ac>b^2\geq 0$ なので、$c$ の符号は $a$ と同じになります。$ac-b^2<0$ なら、固有値の積が負なので不定値です。2変数の関数の最大化で、二階条件が「$f_{11}<0$ かつ $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$」と書かれるのは、ヘッセ行列が負定値であるという条件です。

経済学では、次の形で半正定値の行列が現れることがよくあります。

**命題 2.31（$B^\top B$ は半正定値）**

任意の $m\times n$ 行列 $B$ について、$B^\top B$ は半正定値の対称行列である。さらに、$B$ の列が一次独立ならば、$B^\top B$ は正定値である。

**証明**　$(B^\top B)^\top=B^\top B$ なので対称です。任意の $x\in\mathbb{R}^n$ について $x^\top B^\top Bx=(Bx)^\top(Bx)=\|Bx\|^2\geq 0$ なので、半正定値です。列が一次独立なら、$x\neq 0$ のとき $Bx\neq 0$ なので $\|Bx\|^2>0$ となり、正定値です。 □

**補足：経済学での使いどころ　分散共分散行列とポートフォリオ**

$n$ 個の資産の収益率の分散共分散行列を $\Sigma$、各資産への投資比率を並べたベクトルを $w$ とすると、ポートフォリオの収益率の分散は二次形式 $w^\top\Sigma w$ です。分散は負にならないので、$\Sigma$ は必ず半正定値です。2資産の場合、標準偏差を $\sigma_1,\sigma_2$、相関係数を $\rho$ とすると

$$\Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},\qquad \det\Sigma=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

なので、$\Sigma$ が正定値であるのは $|\rho|<1$ のときです。$\rho=\pm 1$ のときは、分散が 0 になる投資比率 $w\neq 0$ があり、2つの資産を組み合わせてリスクを完全に消すことができます。$\Sigma$ が正定値であること（リスクのない組み合わせを作れないこと）は、分散を最小にするポートフォリオがただ一つに決まるための条件になります。

## 2.8　制約のもとでの定符号

予算制約のもとでの効用最大化のように、制約のある最適化では、すべての方向ではなく、制約を満たしたまま動ける方向だけを考えれば十分です。そこで、「$b \cdot x = 0$ を満たす $x$ に限れば負定値」という、弱い条件を考えます。

**定義 2.32（制約のもとでの定符号）**

$A$ を $n \times n$ の対称行列、$b \in \mathbb{R}^n$ を $0$ でないベクトルとする。$b \cdot x = 0$ を満たすすべての $x \neq 0$ について $x^\top A x < 0$ であるとき、$A$ は制約 $b \cdot x = 0$ のもとで負定値であるという。$x^\top A x > 0$ であるとき、制約 $b \cdot x = 0$ のもとで正定値であるという。

$A$ が負定値なら、どんな制約のもとでも負定値です。しかし逆は成り立ちません。この条件は、$A$ の外側に $b$ を付け加えた行列（縁付き行列）の行列式で判定できます。

**命題 2.33（縁付き行列式による判定：2変数の場合）**

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$、$b = (b_1, b_2)^\top \neq 0$ とし、

$$\bar{D} = \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、$A$ が制約 $b \cdot x = 0$ のもとで負定値であることと $\bar{D} > 0$ は同値であり、正定値であることと $\bar{D} < 0$ は同値である。

**証明**

**方針**　制約を満たす $x$ を具体的に書き、二次形式の値と $\bar{D}$ を直接比べます。

$b \neq 0$ なので、$b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$ を満たす $x$ は、実数 $t$ を使って $x = t\,(b_2, -b_1)^\top$ と書けるものに限られます（$b$ と直交するベクトルの全体は、次元定理より1次元の部分空間です）。このとき

$$x^\top A x = t^2\bigl(a_{11} b_2^2 - 2 a_{12} b_1 b_2 + a_{22} b_1^2\bigr) \qquad (x_1 = t b_2、\ x_2 = -t b_1 \text{ を代入})$$

です。一方、$\bar{D}$ を第1行について展開すると

$$\begin{aligned}
\bar{D} &= -b_1 \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} + b_2 \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{11} \\ b_2 & a_{12} \end{pmatrix} && \text{（式 (2.1)）} \\
&= -b_1(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + b_2(b_1 a_{12} - b_2 a_{11}) && \text{（2 × 2 の行列式）} \\
&= -\left(a_{11} b_2^2 - 2 a_{12} b_1 b_2 + a_{22} b_1^2\right) && \text{（整理）}
\end{aligned}$$

です。したがって $x^\top A x = -t^2 \bar{D}$ となります。$x \neq 0$ は $t \neq 0$ と同じなので、制約のもとで負定値であることは $\bar{D} > 0$ と、正定値であることは $\bar{D} < 0$ と同値です。 □

**計算例：負定値でなくても、制約のもとでは負定値になる例**

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は、$x^\top A x = 2x_1 x_2$ なので不定値です。$b = (1, 1)^\top$ とすると、

$$\bar{D} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot (0 - 1) + 1 \cdot (1 - 0) = 2 > 0$$

なので、制約 $x_1 + x_2 = 0$ のもとでは負定値です。実際、$x_2 = -x_1$ を代入すると $2x_1 x_2 = -2x_1^2 < 0$ です。これは、効用関数 $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ のヘッセ行列と、価格が等しいときの予算線の方向にあたります。$u$ は凹関数ではありませんが、予算線に沿って動くかぎり、効用は最適点から離れるほど下がります。

**補足：経済学での使いどころ　準凹性と二階条件**

効用関数に必要なのは、多くの場合、凹性ではなく、無差別曲線が原点に向かって凸であること（準凹性、第5章）です。これは「ヘッセ行列が、勾配ベクトルと直交する方向、つまり無差別曲線に沿った方向について負定値（または負半定値）である」という条件に対応し、$b$ を勾配ベクトル $\nabla u$ とした縁付き行列式で判定します。制約付き最大化の二階の十分条件も、同じ形になります（第6章、第7章）。

**発展：変数が $n$ 個の場合**

$n$ 変数で制約が1本の場合は、縁付き行列 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & b^\top \\ b & A \end{pmatrix}$ の左上の $(k+1)\times(k+1)$ の部分の行列式を $\bar{D}_k$ とすると、$b_1 \neq 0$ のとき、$A$ が制約 $b\cdot x = 0$ のもとで負定値であることと、$(-1)^k\bar{D}_k > 0$（$k = 2,\dots,n$）、つまり $\bar{D}_2 > 0,\ \bar{D}_3 < 0,\dots$ は同値です。正定値であることは、$\bar{D}_k < 0$（$k = 2,\dots,n$）と同値です。証明は、制約を使って変数を1つ消去し、残りの $n-1$ 個の変数についての二次形式に定理 2.30 を当てはめることで得られます。本書では、この結果を証明なしで使います。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- 一次独立・基底・次元：完備市場と資産の複製、制約想定、独立な均衡条件の数。
- 逆行列・行列式・クラメルの公式：多くの変数が同時に決まるモデルの比較静学。
- スペクトル定理：ヘッセ行列・スルツキー行列・分散共分散行列の性質を、固有値で調べる。
- 定符号の判定：凹関数の判定と最適化の二階条件、支出関数の凹性から導かれる需要の性質、ポートフォリオの分散。
- 制約のもとでの定符号：準凹性の判定、制約付き最適化の二階条件。

**要点**

- $n\times n$ 行列 $A$ について、「正則」「列が一次独立」「ランクが $n$」「$Ax = b$ がつねにただ一つの解をもつ」「$\det A \neq 0$」はすべて同値です。
- 対称行列は、固有値がすべて実数で、直交行列 $Q$ によって $Q^\top AQ = \Lambda$ と対角化できます（スペクトル定理）。
- 二次形式 $x^\top Ax$ の符号は固有値の符号で決まり、正定値・負定値は首座小行列式の符号で判定できます。
- 制約 $b\cdot x = 0$ のもとでの定符号は、縁付き行列式で判定します。

**次の章へ**　この章で定義した内積とノルムを使うと、2つのベクトルの「近さ」を測ることができます。次の章では、近さの概念から出発して、開集合・閉集合・コンパクト性という、最適解の存在を保証するための言葉を作ります。

**大学院とのつながり**　定符号の判定は、消費者理論・生産者理論の二階条件と比較静学で繰り返し使います。対称でない行列の固有値や、行列を使った動学の分析は、マクロ経済学の数学で扱います。

第3章

# $\mathbb{R}^n$ の位相：開集合・閉集合・コンパクト性

**ここまでの流れ**　第1章で、集合・写像・量化子という、定義や定理を読むための言葉を準備し、第2章で、ベクトルの内積とノルムを定義しました。
**前提知識**　第1章の量化子とその否定、ド・モルガンの法則（命題 1.8）、上限の特徴づけ（命題 1.19）、背理法と対偶による証明、数学的帰納法。第2章の内積とノルムの定義。
**この章の問い**　予算集合が「境界線を含む」「どこまでも広がってはいない」という性質は、数学的にどう表せるでしょうか。そして、それはなぜ「最適な消費が存在する」ことにつながるのでしょうか。
**この章で分かること**　ノルムと距離（コーシー＝シュワルツの不等式と三角不等式）、開集合と閉集合とその基本性質、点列の収束と極限の性質、閉集合の点列による特徴づけ、内部・閉包・境界の基本性質、ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理、コーシー列と $\mathbb{R}^n$ の完備性、コンパクト性とハイネ＝ボレルの定理、直積のコンパクト性、予算集合・単体・実行可能な配分の集合のコンパクト性。この章の定理は、すべて証明します（最後の発展枠の開被覆についての主張を除きます）。

## 3.1　この章の見取り図

均衡の存在定理は、どれも「ある集合がコンパクトで、ある写像が連続なら、何かが存在する」という形をしています。この章はその前半、つまり「コンパクト」とは何かを、ゼロから組み立てる章です。

道筋は次のとおりです。まず2点の「近さ」を測る距離を決め（3.2節）、それを使って「境界を含まない集合（開集合）」と「境界を含む集合（閉集合）」を定めます（3.3〜3.4節）。次に「点列が近づいていく」ことを定義し、閉集合を「点列の極限を逃さない集合」として特徴づけます（3.5節）。この見方を使って、集合の内部・閉包・境界の性質を整理します（3.6節）。そのうえで、実数の「すき間のなさ」から、「有界な点列は必ずどこかに集まる」こと（3.7節）と、「互いに近づいていく点列は必ず収束する」こと（3.8節）を証明します。最後に、「どんな点列も集合の中のどこかに集まる」という性質としてコンパクト性を定義し、それが「有界かつ閉」と同じであることを示して、経済学に出てくる集合に当てはめます（3.9節）。

## 3.2　ノルムと距離

「近い」を扱うには、まず2点の間の距離を決める必要があります。

第2章で、内積 $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ とノルム（長さ）$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ を定義しました。定義から、$\|x\| \geq 0$ で、$\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときだけです。また、実数 $c$ について $\|cx\| = \sqrt{c^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = |c|\,\|x\|$ です。距離は、このノルムを使って測ります。

> **定義 3.1（距離）**
>
> $x, y \in \mathbb{R}^n$ について、$\|x - y\|$ を2点 $x, y$ の距離という。

ノルムについて最も重要なのが、次の2つの不等式です。どちらも以後の証明で何度も使います。

---

**定理 3.2（コーシー＝シュワルツの不等式）**

任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ について、$|x \cdot y| \leq \|x\|\,\|y\|$ が成り立つ。

---

**証明**

**方針**　$t$ の2次式 $\|x + ty\|^2$ が決して負にならないことを使います。

$y = 0$ なら両辺とも 0 なので、$y \neq 0$ とします。任意の実数 $t$ について

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \|x + ty\|^2 && \text{（ノルムの2乗は非負）} \\
&= \|x\|^2 + 2t\,x \cdot y + t^2\|y\|^2 && \text{（内積を展開）}
\end{aligned}
$$

です。$\|y\|^2 > 0$ なので、これは $t$ の2次式で、すべての $t$ で 0 以上です。したがって、判別式は 0 以下です。

$$
\begin{aligned}
\left(2\,x \cdot y\right)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 &\leq 0 && \text{（判別式} \leq 0\text{）} \\
(x \cdot y)^2 &\leq \|x\|^2\|y\|^2 && \text{（4 で割る）}
\end{aligned}
$$

両辺の平方根をとると結論が得られます。　□

**補足：経済学での使いどころ**

$p$ を価格、$x$ を財の組とすると、$p\cdot x$ は支出額です。$x$ を組の変化 $y-x$ に置きかえると、$|p\cdot(y-x)|\le\|p\|\,\|y-x\|$、つまり「組を少しだけ変えれば、支出も少しだけしか変わらない」ことが分かります。消費者理論でワルラス法則を示すときの「予算に余りがあれば、少し多く買ってもまだ予算内に収まる」という議論は、この不等式そのものです。

**定理 3.3（三角不等式）**

任意の $x,y\in\mathbb{R}^n$ について、$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ が成り立つ。したがって、任意の $x,y,z$ について $\|x-z\|\le\|x-y\|+\|y-z\|$ である。

**証明**

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\,x\cdot y + \|y\|^2 && \text{（展開）}\\
&\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 && \text{（定理 3.2）}\\
&= \bigl(\|x\|+\|y\|\bigr)^2 && \text{（平方の形にまとめる）}
\end{aligned}
$$

両辺は 0 以上なので、平方根をとると最初の不等式です。2つ目は、$x-z=(x-y)+(y-z)$ に最初の不等式を当てはめれば得られます。 □

**数式の読み方：三角不等式の意味**

- 「$x$ から $z$ へ直接行く距離は、途中で $y$ に寄り道する距離より長くない」という意味です。三角形の2辺の和は残りの1辺より長い、という性質です。
- この不等式は「近い点の近くにある点は、やはり近い」ことを保証するので、開集合や収束の議論の基礎になります。

**定義 3.4（開球（$\varepsilon$ 近傍）・有界）**

点 $x\in\mathbb{R}^n$ と $\varepsilon>0$ について、$B_\varepsilon(x)=\{y\in\mathbb{R}^n:\|y-x\|<\varepsilon\}$ を、$x$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の開球（$\varepsilon$ 近傍）という。集合 $A\subseteq\mathbb{R}^n$ が有界であるとは、ある実数 $M$ があって、すべての $x\in A$ で $\|x\|\le M$ となることをいう。

## 3.3　開集合

**定義 3.5（内点・開集合）**

集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ と点 $x \in \mathbb{R}^n$ について、ある $\varepsilon > 0$ で $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ となるとき、$x$ を $A$ の内点という。$A$ のすべての点が内点であるとき、$A$ を開集合という。$A$ の内点全体を $A$ の内部といい $\operatorname{int} A$ と書く。

$x \in B_\varepsilon(x)$ なので、内点はつねに $A$ の点です。したがって $\operatorname{int} A \subseteq A$ です。

**数式の読み方**

- 開集合とは「どの点にも、まわりに少しだけ余裕がある」集合です。どの点から出発しても、十分小さく動く限り集合から出ません。
- 経済学では、「価格を少し変えても、ある性質（たとえば需要が正であること）が保たれる」ような価格の集合が開集合になる、という形でよく使われます。

名前に「開」とつく開球が本当に開集合であることは、当たり前に見えますが、三角不等式を使って確かめる必要があります。

**命題 3.6（開球は開集合）**

任意の $x$ と $\varepsilon > 0$ について、$B_\varepsilon(x)$ は開集合である。

**証明**

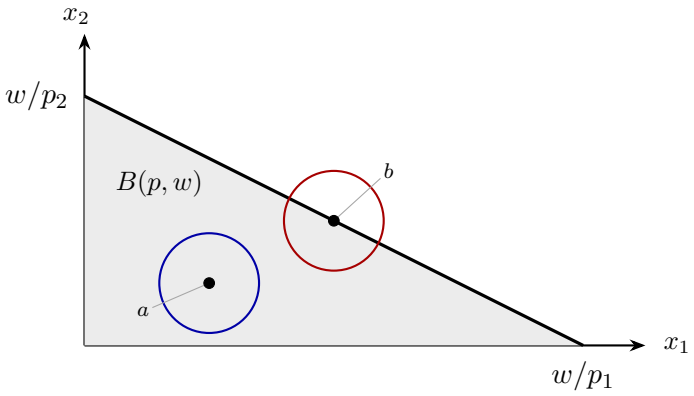
**方針**　開球の任意の点 $y$ について、$y$ を中心とする小さな開球が $B_\varepsilon(x)$ に含まれることを示します。

$y \in B_\varepsilon(x)$ とし、$r = \varepsilon - \|y - x\|$ とおきます。$y$ が開球の点であることから $r > 0$ で、これは $y$ から開球の「縁」までの余裕を表します。$z \in B_r(y)$ ならば

$$\begin{aligned} \|z - x\| &\leq \|z - y\| + \|y - x\| && \text{（定理 3.3）} \\ &< r + \|y - x\| = \varepsilon && \text{（}\|z - y\| < r \text{ と } r \text{ の定義）} \end{aligned}$$

なので $z \in B_\varepsilon(x)$ です。よって $B_r(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$ で、$y$ は内点です。　□

**図 3.1**　内点と境界点




予算線 $x_1 + 2x_2 = 8$（$p = (1,2)$、$w = 8$）。$a = (2,1)$、$b = (4,2)$、どちらの円も半径 0.8。

**図の読み方**

1. 灰色の三角形（境界の線を含む）が予算集合 $B(p,w)$、黒い直線が予算線です。
2. 点 $a$ のまわりの青い円は、まるごと予算集合の中に入っています。したがって $a$ は内点です。
3. 予算線上の点 $b$ のまわりの赤い円は、どれだけ小さくしても予算線の外側（買えない組）にはみ出します。$b$ は内点ではありません。
4. 予算集合は内点でない点 $b$ を含むので、開集合ではありません。

**命題 3.7（開集合の基本性質）**

1. $\mathbb{R}^n$ と $\emptyset$ は開集合である。
2. 開集合をいくつ（無限個でも）合併しても、開集合である。
3. 有限個の開集合の共通部分は、開集合である。

**証明**

**ステップ1**　性質1

$\mathbb{R}^n$ はどの開球も含みます。$\emptyset$ には点がないので、「すべての点が内点」は（確かめる点がなく）自動的に成り立ちます。

**ステップ2**　性質2

$U_\lambda$（$\lambda \in \Lambda$）を開集合とします。$x \in \bigcup_\lambda U_\lambda$ なら、ある $U_\lambda$ に $x$ が入ります。$U_\lambda$ は開集合なので、ある $\varepsilon > 0$ で $B_\varepsilon(x) \subseteq U_\lambda \subseteq \bigcup_\lambda U_\lambda$ です。

**ステップ3**　性質3

$U_1, \ldots, U_m$ を開集合とします。$x \in U_1 \cap \cdots \cap U_m$ なら、各 $U_k$ が開集合であることから、$B_{\varepsilon_k}(x) \subseteq U_k$ となる $\varepsilon_k > 0$ があります。$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ とすると、有限個の正の数の最小値なので $\varepsilon > 0$ です。$\varepsilon \leq \varepsilon_k$ より $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_k}(x) \subseteq U_k$ がすべての $k$ で成り立つので、$B_\varepsilon(x) \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_m$ です。 □

**補足：無限個の共通部分は開集合とは限らない**

性質3で「有限個」が必要なのは、最小値 min が正であることを使ったからです。無限個だと最小値の代わりの下限が 0 になりえます。実際、開区間 $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$（$k = 1, 2, \ldots$）はどれも開集合ですが、その共通部分は1点 $\{0\}$ で、開集合ではありません。

**補足：経済学での使いどころ　なぜ $\mathbb{R}^L_{++}$ で考えるのか**

価格を $p \in \mathbb{R}^L_{++}$（すべて正）に制限するのは、$\mathbb{R}^L_{++}$ が開集合だからでもあります。開集合の点では、どの方向にも少しだけ価格を動かせるので、需要や間接効用を価格で微分できます。$\mathbb{R}^L_{+}$ の境界（ある価格が 0）では、価格を下げる方向には動けず、需要が無限大になることもあります。「内点では微分、境界では特別な扱い」というのは、端点解（第7章のKKT条件）や一般均衡の存在証明での境界条件（第11章）でも繰り返し現れる考え方です。

## 3.4　閉集合

**定義 3.8（閉集合）**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ の補集合 $\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合であるとき、$A$ を閉集合という。

補集合をとると「合併」と「共通部分」が入れ替わる（ド・モルガンの法則）ので、開集合の性質から、閉集合の性質が導かれます。

**命題 3.9（閉集合の基本性質）**

1. $\mathbb{R}^n$ と $\emptyset$ は閉集合である。
2. 閉集合をいくつ（無限個でも）共通部分をとっても、閉集合である。
3. 有限個の閉集合の合併は、閉集合である。

**証明**

**方針**　補集合が開集合であることを、ド・モルガンの法則（命題 1.8）と開集合の基本性

質（命題 3.7）で確かめます。以下、補集合は $\mathbb{R}^n$ の中でとり、$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ と書きます。

**ステップ1**　性質1

$\mathbb{R}^n$ の補集合は $\emptyset$、$\emptyset$ の補集合は $\mathbb{R}^n$ で、命題 3.7 の性質1より、どちらも開集合です。

**ステップ2**　性質2

$F_\lambda$（$\lambda \in \Lambda$）を閉集合とします。

$$\Big(\bigcap_{\lambda} F_\lambda\Big)^c = \bigcup_{\lambda} F_\lambda^c \qquad \text{（命題 1.8）}$$

で、各 $F_\lambda^c$ は（閉集合の定義より）開集合なので、右辺は命題 3.7 の性質2より開集合です。

**ステップ3**　性質3

$F_1, \dots, F_m$ を閉集合とします。

$$\big(F_1 \cup \cdots \cup F_m\big)^c = F_1^c \cap \cdots \cap F_m^c \qquad \text{（命題 1.8）}$$

で、右辺は有限個の開集合の共通部分なので、命題 3.7 の性質3より開集合です。　□

**数式の読み方：開と閉は反対語ではない**

- 「開集合でない」ことは「閉集合である」ことを意味しません。$[0,1)$ は、内点でない $0$ を含むので開集合でなく、補集合 $(-\infty,0)\cup[1,\infty)$ が内点でない $1$ を含むので閉集合でもありません。
- 逆に、$\mathbb{R}^n$ と $\emptyset$ は開集合でも閉集合でもあります。
- 無限個の閉集合の合併は、閉集合とは限りません。閉区間 $[\frac{1}{k}, 1]$（$k = 1, 2, \dots$）の合併は $(0,1]$ で、閉集合ではありません。性質3の「有限個」は、命題 3.7 の性質3の「有限個」を、補集合を通して受け継いだものです。

## 3.5　点列と収束

閉集合かどうかを補集合で確かめるのは不便です。点列を使った特徴づけが、実際の証明ではずっと役に立ちます。この節では、まず点列の収束とその基本的な性質を整理します。

**定義 3.10（点列の収束）**

$\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ が点 $x$ に収束するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 $K$ が存在し、$k \geq K$ ならば $\|x^k - x\| < \varepsilon$ となることをいう。このとき $x^k \to x$ と書き、$x$ を極限という。点列 $\{x^k\}$ が有界であるとは、集合 $\{x^k : k = 1, 2, \dots\}$ が有界であることをいう。

---

**命題 3.11（収束の基本性質）**

1. （成分ごとの収束）$x^k \to x$ であることと、各成分 $i$ で数列 $x_i^k \to x_i$ であることは同値である。
2. （極限の一意性）$x^k \to x$ かつ $x^k \to y$ ならば $x = y$。
3. （収束する点列は有界）$x^k \to x$ ならば、$\{x^k\}$ は有界である。

---

**証明**

**ステップ1**　性質1

各成分について $|x_i^k - x_i| = \sqrt{(x_i^k - x_i)^2} \leq \|x^k - x\|$ なので、$x^k \to x$ なら各成分も収束します。逆に、各成分が収束するとし、$\varepsilon > 0$ をとります。各 $i$ について、$k \geq K_i$ ならば $|x_i^k - x_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$ となる番号 $K_i$ があります。$K = \max\{K_1, \dots, K_n\}$ とすると、$k \geq K$ で

$$\begin{aligned} \|x^k - x\| &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n (x_i^k - x_i)^2} && \text{（ノルムの定義）} \\ &< \sqrt{n \cdot \varepsilon^2/n} = \varepsilon && \text{（各項が } \varepsilon^2/n \text{ 未満）} \end{aligned}$$

です。

**ステップ2**　性質2

$\varepsilon > 0$ をとります。$x^k \to x$ と $x^k \to y$ から、十分大きな $k$ で $\|x^k - x\| < \varepsilon/2$ かつ $\|x^k - y\| < \varepsilon/2$ です。そのような $k$ について

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|x - x^k\| + \|x^k - y\| && \text{（定理 3.3）} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

です。$\|x - y\| \geq 0$ はどんな正の数より小さいので $0$ で、$x = y$ です。

**ステップ3**　性質3

収束の定義で $\varepsilon = 1$ とすると、$k \geq K$ ならば $\|x^k - x\| < 1$ となる $K$ があります。そのような $k$ では、三角不等式（定理 3.3）より $\|x^k\| \leq \|x^k - x\| + \|x\| < 1 + \|x\|$ です。$M = \max\{\|x^1\|, \dots, \|x^{K-1}\|, 1 + \|x\|\}$ とおくと、有限個の数の最大値なので実数で、

すべての $k$ で $\|x^k\| \leq M$ です。 □

存在証明では、点列そのものではなく、その一部を取り出した列を考えることがよくあります。

> **定義 3.12（部分列）**
> 点列 $\{x^k\}$ と、狭義に増加する自然数の列 $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ について、点列 $\{x^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ を $\{x^k\}$ の部分列という。

---

**補題 3.13（部分列はもとと同じ極限に収束する）**

$k_1 < k_2 < \cdots$ を狭義に増加する自然数の列とすると、すべての $j$ で $k_j \geq j$ である。したがって、$x^k \to x$ ならば、その任意の部分列も $x^{k_j} \to x$ を満たす。

---

**証明**

**ステップ1**　$k_j \geq j$

$j$ についての数学的帰納法で示します。$k_1$ は自然数なので $k_1 \geq 1$ です。$k_j \geq j$ とすると、$k_{j+1} > k_j$ で両辺が自然数なので、$k_{j+1} \geq k_j + 1 \geq j + 1$ です。

**ステップ2**　部分列の収束

$\varepsilon > 0$ をとり、$x^k \to x$ の定義から、$k \geq K$ で $\|x^k - x\| < \varepsilon$ となる $K$ をとります。$j \geq K$ ならば、ステップ1より $k_j \geq j \geq K$ なので、$\|x^{k_j} - x\| < \varepsilon$ です。 □

極限をとる操作が、和・定数倍・内積と両立し、弱い不等式を保つことも確かめておきます。実数の数列は $n = 1$ の点列なので、上の定義と結果がそのまま当てはまります。

---

**補題 3.14（極限と演算・不等式）**

$x^k \to x$、$y^k \to y$（$\mathbb{R}^n$ の点列）、$c \in \mathbb{R}$、$p \in \mathbb{R}^n$ とする。

1. $x^k + y^k \to x + y$、$cx^k \to cx$。
2. $p \cdot x^k \to p \cdot x$（実数の数列として）。
3. 実数の数列 $a_k \to a$、$b_k \to b$ について、すべての $k$ で $a_k \leq b_k$ ならば $a \leq b$。特に、すべての $k$ で $a_k \leq c$ ならば $a \leq c$ である（$b_k = c$ とおく）。

---

**証明**

**ステップ1**　和と定数倍

$\varepsilon > 0$ をとり、$k \geq K$ ならば $\|x^k - x\| < \varepsilon/2$ かつ $\|y^k - y\| < \varepsilon/2$ となる $K$ をとります（2

つの番号の大きい方をとる）。$k \geq K$ で

$$\|(x^k + y^k) - (x + y)\| \leq \|x^k - x\| + \|y^k - y\| < \varepsilon \qquad \text{（定理 3.3）}$$

です。定数倍は、$\|cx^k - cx\| = |c|\,\|x^k - x\|$ から、$c = 0$ なら明らかで、$c \neq 0$ なら $\|x^k - x\| < \varepsilon/|c|$ となる番号以降で $\|cx^k - cx\| < \varepsilon$ です。

**ステップ2**　内積

内積は各変数について1次式なので $p \cdot x^k - p \cdot x = p \cdot (x^k - x)$ で、

$$\left|p \cdot x^k - p \cdot x\right| = \left|p \cdot (x^k - x)\right| \leq \|p\|\,\|x^k - x\| \qquad \text{（定理 3.2）}$$

です。$p = 0$ なら明らかで、$p \neq 0$ なら $\|x^k - x\| < \varepsilon/\|p\|$ となる番号以降で左辺は $\varepsilon$ より小さくなります。

**ステップ3**　弱い不等式

背理法で示すために、$a > b$ と仮定し、$\varepsilon = (a - b)/2 > 0$ とおきます。十分大きな $k$ で $|a_k - a| < \varepsilon$ かつ $|b_k - b| < \varepsilon$ なので、そのような $k$ で

$$a_k > a - \varepsilon = \frac{a + b}{2} = b + \varepsilon > b_k$$

となり、$a_k \leq b_k$ に矛盾します。　□

**補足：強い不等式は保たれない**

すべての $k$ で $a_k > 0$ でも、極限では $a = 0$ になりえます（例：$a_k = 1/k$）。極限で保たれるのは弱い不等式「$\leq$」「$\geq$」だけです。この違いが、次の定理の「閉集合」と、のちに第4章で学ぶ「連続関数 $\leq$ 定数の形の条件で定まる集合は閉集合、連続関数 $<$ 定数の形の条件で定まる集合は開集合」という事実の背後にあります。

ここから、この節の主定理です。

**定理 3.15（閉集合の点列による特徴づけ）**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ について、次の2つは同値である。

1. $A$ は閉集合である。
2. $A$ の点からなる点列が $x \in \mathbb{R}^n$ に収束するならば、必ず $x \in A$ である。

**証明のアイデア**

「閉じている」とは「外側（補集合）がどの点のまわりにも余裕をもつ」ことでした。外側の点 $x$ のまわりに $A$ と交わらない開球があれば、$A$ の点列はそこに入れず、$x$ に近づけません。逆に、外側のある点のまわりのどんな小さな開球にも $A$ の点があれば、半径を $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ と縮めながら点を一つずつ選ぶことで、外側の点に収束する $A$ の点列が作れます。

**証明**

**ステップ1**　1ならば2

$A$ が閉集合で、$x^k \in A$、$x^k \to x$ なのに $x \notin A$ だと仮定します（背理法）。$x$ は $\mathbb{R}^n \setminus A$ の点で、これは閉集合の定義より開集合なので、ある $\varepsilon > 0$ で $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ です。一方、収束の定義から、ある番号以降は $\|x^k - x\| < \varepsilon$、つまり $x^k \in B_\varepsilon(x)$ で、したがって $x^k \notin A$ となります。これは $x^k \in A$ に矛盾します。

**ステップ2**　2ならば1

対偶を示します。$A$ が閉集合でない、つまり $\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合でないとすると、$\mathbb{R}^n \setminus A$ の点 $x$ で内点でないものがあります。内点の定義の否定（量化子の否定の規則）から、どんな $\varepsilon > 0$ についても $B_\varepsilon(x) \not\subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$、つまり $B_\varepsilon(x)$ は $A$ の点を含みます。$\varepsilon = 1/k$（$k = 1, 2, \ldots$）として、$x^k \in B_{1/k}(x) \cap A$ を一つずつ選びます。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $1/K < \varepsilon$ となる自然数 $K$ をとれば（アルキメデスの性質。3.7節で上限公理から導きます）、$k \geq K$ で $\|x^k - x\| < 1/k \leq 1/K < \varepsilon$ なので $x^k \to x$ です。しかし $x \notin A$ なので、条件2は成り立ちません。　□

**数式の読み方：ステップ2の作り方**

- 「どんな半径の円にも $A$ の点が入っている」という否定の形の情報から、半径を $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ と小さくしながら1つずつ点を選び、収束する点列を作りました。
- 「否定の情報 → 半径 $1/k$ ごとに点を選ぶ → 点列を作る」という手順は、この先の証明で何度も現れる定番の技法です。

**補足：経済学での使いどころ　「閉集合」を経済学の言葉で読む**

- 「実行可能な計画の列が、ある計画に近づいていくなら、その極限の計画も実行可能」というのが、閉集合の経済学的な意味です。
- 予算集合が閉集合であることは「予算ちょうどの組も買える」こと、生産集合が閉集合であることは「生産可能な計画の極限も生産可能」であること、選好が連続である（上方集合が閉集合）ことは「より好ましい組の極限は、少なくとも同じくらい好ましい」ことです。
- 閉集合でないと、最適解に近づくことはできても、最適解そのものが集合の外にあって手に入らない、ということが起こります。存在定理で閉集合性が必ず仮定されるのはこのためです。

**命題 3.16（予算集合は閉集合）**

任意の $p \in \mathbb{R}^L$ と $w \in \mathbb{R}$ について、$B(p,w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\}$ は閉集合である。

**証明**

**方針**　定理 3.15 の条件2を確かめます。

$x^k \in B(p,w)$、$x^k \to x$ とします。

- 各財 $\ell$ について、命題 3.11 の性質1より $x^k_\ell \to x_\ell$ で、すべての $k$ で $x^k_\ell \geq 0$ なので、補題 3.14 の3より $x_\ell \geq 0$ です。
- 補題 3.14 の2より $p \cdot x^k \to p \cdot x$ で、すべての $k$ で $p \cdot x^k \leq w$ なので、補題 3.14 の3より $p \cdot x \leq w$ です。

よって $x \in B(p,w)$ で、定理 3.15 から $B(p,w)$ は閉集合です。　□

## 3.6　内部・閉包・境界

集合には「境界を含まない部分」と「境界まで含めた全体」があります。前者が内部、後者が閉包です。分離超平面定理（第5章）では、点が集合の内部にあるか境界にあるかで議論が分かれるので、ここでその性質を整理しておきます。

**定義 3.17（閉包・境界）**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ を含む閉集合すべての共通部分を $A$ の閉包といい $\mathrm{cl}\, A$ と書く。どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $B_\varepsilon(x)$ が $A$ の点と $A$ の外の点の両方を含むような点 $x \in \mathbb{R}^n$ の集合を、$A$ の境界といい $\partial A$ と書く。

$\mathbb{R}^n$ は $A$ を含む閉集合なので、閉包の定義の共通部分は空でない集合族についてとられています。

---

**命題 3.18（内部・閉包・境界の基本性質）**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする。

1. $\operatorname{int} A$ は開集合で、$A$ に含まれる開集合のうち最大のものである。$A$ が開集合であることと $A = \operatorname{int} A$ は同値である。
2. $\operatorname{cl} A$ は $A$ を含む閉集合で、$A$ を含む閉集合のうち最小のものである。$A$ が閉集合であることと $A = \operatorname{cl} A$ は同値である。
3. 点 $x \in \mathbb{R}^n$ について、次の3つは同値である。
   (a) $x \in \operatorname{cl} A$。
   (b) すべての $\varepsilon > 0$ について、$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$。
   (c) $A$ の点からなる点列で $x$ に収束するものがある。
4. $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int} A = \operatorname{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$。
5. $\partial A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$ であり、$\partial A$ は閉集合である。

---

**証明のアイデア**

中心は性質3です。「閉包の点」は「どんなに小さな開球も $A$ と交わる点」であり、「$A$ の点列の極限」でもあります。つまり閉包とは、$A$ の点でいくらでもよく近似できる点の集合です。性質4は、内部と閉包が補集合を通して互いに入れ替わることを述べ、性質5はそこから「境界＝閉包から内部を除いたもの」を導きます。

**証明**

**ステップ1**　性質1

$x \in \operatorname{int} A$ とし、$B_\varepsilon(x) \subseteq A$ となる $\varepsilon > 0$ をとります。$y \in B_\varepsilon(x)$ ならば、命題 3.6 より $B_\varepsilon(x)$ は開集合なので、$B_r(y) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq A$ となる $r > 0$ があり、$y \in \operatorname{int} A$ です。よって $B_\varepsilon(x) \subseteq \operatorname{int} A$ で、$\operatorname{int} A$ は開集合です。次に、$U \subseteq A$ を開集合とすると、$U$ の各点 $x$ について $B_\varepsilon(x) \subseteq U \subseteq A$ となる $\varepsilon$ があるので $x \in \operatorname{int} A$、つまり $U \subseteq \operatorname{int} A$ です。したがって $\operatorname{int} A$ は $A$ に含まれる最大の開集合です。最後に、$A$ が開集合ならすべての点が内点なので $A \subseteq \operatorname{int} A$ で、$\operatorname{int} A \subseteq A$ と合わせて $A = \operatorname{int} A$ です。逆に $A = \operatorname{int} A$ なら、いま示したとおり $\operatorname{int} A$ は開集合です。

**ステップ2**　性質2

$\mathrm{cl}\,A$ は閉集合の共通部分なので、命題 3.9 の性質2より閉集合です。共通部分をとった集合はどれも $A$ を含むので、$A \subseteq \mathrm{cl}\,A$ です。$F$ を $A$ を含む任意の閉集合とすると、$F$ は共通部分をとった集合の一つなので $\mathrm{cl}\,A \subseteq F$ です。したがって $\mathrm{cl}\,A$ は $A$ を含む最小の閉集合です。$A$ が閉集合なら、$A$ 自身が「$A$ を含む閉集合」なので $\mathrm{cl}\,A \subseteq A$ で、$A = \mathrm{cl}\,A$ です。逆に $A = \mathrm{cl}\,A$ なら、$A$ は閉集合です。

**ステップ3**　性質3の (a) ならば (b)

対偶を示します。ある $\varepsilon > 0$ で $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ とします。$F = \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)$ は、補集合 $B_\varepsilon(x)$ が開集合（命題 3.6）なので閉集合で、$B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ より $A \subseteq F$ です。性質2より $\mathrm{cl}\,A \subseteq F$ で、$x \in B_\varepsilon(x)$ より $x \notin F$ なので、$x \notin \mathrm{cl}\,A$ です。

**ステップ4**　性質3の (b) ならば (c)

各 $k$ について $B_{1/k}(x) \cap A$ は空でないので、その点 $x^k$ を選びます。$\|x^k - x\| < 1/k$ なので、定理 3.15 の証明のステップ2と同じく $x^k \to x$ です。

**ステップ5**　性質3の (c) ならば (a)

$x^k \in A$、$x^k \to x$ とします。$A \subseteq \mathrm{cl}\,A$（性質2）なので $x^k \in \mathrm{cl}\,A$ で、$\mathrm{cl}\,A$ は閉集合（性質2）なので、定理 3.15 より $x \in \mathrm{cl}\,A$ です。

**ステップ6**　性質4

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について、次の同値が成り立ちます。

$$
\begin{aligned}
x \notin \mathrm{int}\,A &\iff \forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \not\subseteq A && \text{（内点の定義の否定）}\\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset && \text{（}A\text{ に含まれない＝外の点を含む）}\\
&\iff x \in \mathrm{cl}\,(\mathbb{R}^n \setminus A) && \text{（性質3の (a)⇔(b)）}
\end{aligned}
$$

**ステップ7**　性質5

境界の定義の「$B_\varepsilon(x)$ が $A$ の点を含む」は性質3より $x \in \mathrm{cl}\,A$ と、「$B_\varepsilon(x)$ が $A$ の外の点を含む」は同じく性質3より $x \in \mathrm{cl}\,(\mathbb{R}^n \setminus A)$ と同値です。後者は性質4より $x \notin \mathrm{int}\,A$ と同値です。よって $\partial A = \mathrm{cl}\,A \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}\,A) = \mathrm{cl}\,A \setminus \mathrm{int}\,A$ です。$\mathrm{cl}\,A$ は閉集合で、$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}\,A$ は、補集合 $\mathrm{int}\,A$ が開集合（性質1）なので閉集合です。2つの閉集合の共通部分なので、命題 3.9 の性質2より $\partial A$ は閉集合です。　□

**計算例：予算集合の内部・境界と、「予算に余りのある組」の閉包**

$p \in \mathbb{R}^L_{++}$、$w > 0$ とし、$B = B(p,w)$、$U = \{x \in \mathbb{R}^L :\ x_\ell > 0\ (\text{すべての } \ell),\ p \cdot x < w\}$（すべての財を正の量だけ買い、しかも予算に余りがある組）とおきます。

1. $U \subseteq \operatorname{int} B$。 $x \in U$ について $r = \min\{x_1, \dots, x_L,\ (w - p\cdot x)/\|p\|\} > 0$ とおきます。$y \in B_r(x)$ ならば、各 $\ell$ で $|y_\ell - x_\ell| \le \|y - x\| < r \le x_\ell$ なので $y_\ell > 0$ です。また、

$$\begin{aligned} p\cdot y &= p\cdot x + p\cdot(y-x) && \text{（内積は1次式）}\\ &\le p\cdot x + \|p\|\,\|y-x\| && \text{（定理 3.2）}\\ &< p\cdot x + (w - p\cdot x) = w && \text{（}\|y-x\| < r \text{ と } r \text{ の定義）} \end{aligned}$$

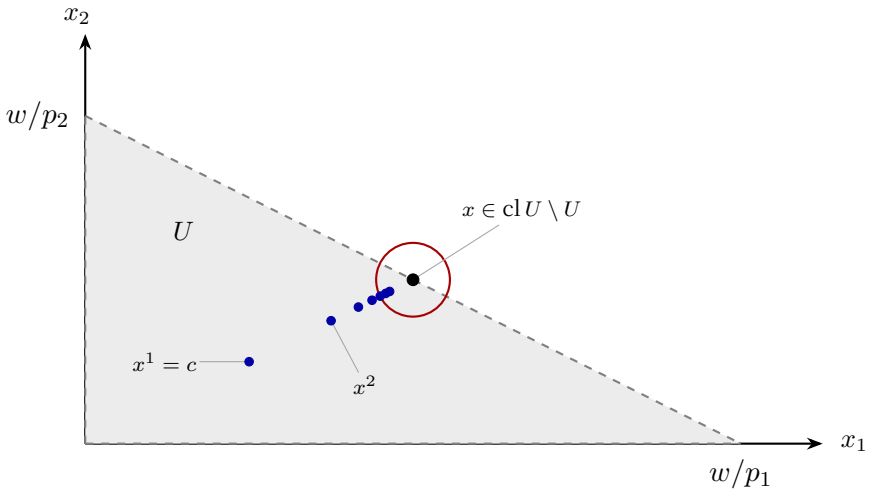
   なので $y \in B$ です。よって $B_r(x) \subseteq B$ です。

2. $\operatorname{int} B \subseteq U$。 $x \in B \setminus U$ とすると、ある $x_\ell = 0$ か、$p\cdot x = w$ です。前者なら、どんな $t > 0$ についても $x - te_\ell$（$e_\ell$ は第 $\ell$ 財だけが 1 のベクトル）は第 $\ell$ 成分が負で $B$ の外にあり、$x$ からの距離は $t$ です。後者なら、$x + te_1$ は $p\cdot(x + te_1) = w + tp_1 > w$ で $B$ の外にあり、距離は $t$ です。どちらの場合も、どんな開球 $B_\varepsilon(x)$ も $B$ の外の点を含むので、$x$ は内点ではありません。

3. $\operatorname{cl} U = B$。 $B$ は閉集合（命題 3.16）で $U \subseteq B$ なので、命題 3.18 の性質2より $\operatorname{cl} U \subseteq B$ です。逆に $x \in B$ とし、$U$ の点 $c$（たとえば $c_\ell = w/(2Lp_\ell)$、このとき $p\cdot c = w/2 < w$）を一つ固定して、$x^k = (1 - \frac{1}{k})x + \frac{1}{k}c$ とおきます。$x \ge 0$、$c_\ell > 0$ より $x^k_\ell > 0$ で、$p\cdot x^k = (1-\frac{1}{k})p\cdot x + \frac{1}{k}p\cdot c < w$ なので $x^k \in U$ です。$\|x^k - x\| = \frac{1}{k}\|c - x\| \to 0$ なので、命題 3.18 の性質3より $x \in \operatorname{cl} U$ です。

したがって $\operatorname{int} B = U$、$\operatorname{cl}(\operatorname{int} B) = B$ で、境界 $\partial B = B \setminus U$ は、予算線上の組と、ある財の量が 0 の組からなります。

**図 3.2**　閉包の点は、集合の点列の極限




$p = (1, 2)$、$w = 8$、$c = (2, 1)$、$x = (4, 2)$。青い点は $x^k = (1 - \frac{1}{k})x + \frac{1}{k}c$（$k = 1, \ldots, 7$）。赤い円は $x$ のまわりの小さな開球。

**図の読み方**

1. 灰色の領域が $U$（予算に余りがあり、どの財も正の量だけ買う組）です。破線の境界は $U$ に含まれません。
2. 予算線上の点 $x$ は $U$ の点ではありませんが、$U$ の中の青い点列 $x^k$ が $x$ に近づいていくので、$x$ は $U$ の閉包の点です（命題 3.18 の性質3の (c)）。
3. 赤い円のように、$x$ のまわりにどんなに小さな開球をとっても、その中に $U$ の点があります（性質3の (b)）。同時に、開球は予算線の外側の点も含むので、$x$ は境界の点です。

**補足：経済学での使いどころ**

- 支持超平面定理（第5章）は、凸集合の境界の点を扱う定理です。その証明では、境界の点に外側から近づく点列をとります。境界の点が「内部の点ではないが、閉包の点である」ことを、この節の性質で使い分けます。
- 「$x$ は集合 $U$ の閉包の点である」とは、「$x$ は $U$ の点でいくらでもよく近似できる」ことです。消費者理論では、「予算に余りのある組で近似できるので、予算線上の組でも結論が成り立つ」という形の議論（上の計算例の3）が、需要の連続性や支出最小化との双対性を示すときに使われます。

## 3.7　ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理

コンパクト性の核心は、「有界な点列は、必ずどこかに集まる部分列をもつ」という定理です。これは実数の「すき間のなさ」から生まれる性質なので、まずそれを公理として確

認します。

**定義 3.19（実数の完備性（上限公理））**

上に有界な空でない実数の集合 $S$ は、上限 $\sup S$（$S$ のすべての要素以上である数のうち最小のもの）をもつ。

**数式の読み方：なぜ公理が必要か**

- 有理数だけの世界では、$\{q : q^2 < 2\}$ は上に有界ですが、有理数の上限をもちません（$\sqrt{2}$ は有理数でないため）。点列も「$\sqrt{2}$ の位置」に近づくのに、行き先が存在しません。
- 上限公理は、実数にはこのような「穴」がないことを要請するもので、存在定理はすべてこの性質に支えられています。本書では、この性質を実数の公理として認め、証明はしません。
- 上限公理からは、「どんな実数 $a$ に対しても、$a$ より大きな自然数がある」という**アルキメデスの性質**が導かれます。自然数の集合 $\mathbb{N}$ が上に有界だとすると、上限公理より $s = \sup \mathbb{N}$ があり、$s-1$ は上界でないので（命題 1.19）、$n > s-1$ となる自然数 $n$ があります。すると $n+1 > s$ で、$n+1$ も自然数なので $s$ が上界であることに矛盾します。特に、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $1/K < \varepsilon$ となる自然数 $K$ があります（$K > 1/\varepsilon$ ととる）。この事実は、3.5節ですでに使いました。

**補題 3.20（単調収束定理）**

上に有界な単調増加数列 $a_1 \le a_2 \le \cdots$ は収束し、その極限は $\sup_k a_k$ である。下に有界な単調減少数列も同様に収束し、その極限は $\inf_k a_k$ である。

**証明**

**ステップ1**　増加の場合

集合 $\{a_k\}$ は空でなく上に有界なので、上限公理より $s = \sup_k a_k$ が存在します。$\varepsilon > 0$ をとります。上限の特徴づけ（命題 1.19 の2）より、$a_K > s - \varepsilon$ となる $K$ があります。$k \ge K$ ならば、単調増加であることと $s$ が上界であること（命題 1.19 の1）から $s - \varepsilon < a_K \le a_k \le s$、つまり $|a_k - s| < \varepsilon$ です。

**ステップ2**　減少の場合

$\{a_k\}$ が下に有界な単調減少数列なら、$\{-a_k\}$ は上に有界な単調増加数列なので、ステップ1より $-a_k \to \sup_k(-a_k)$ です。補題 3.14 の1（定数倍 $c = -1$）より $a_k \to -\sup_k(-a_k)$ で、これが下限 $\inf_k a_k$ です。 □

**補題 3.21（単調部分列の存在）**

任意の実数列は、単調（増加または減少）な部分列をもつ。

**証明**

**方針**　「それより後ろに、それより大きい項がない項」（山頂）の個数で場合分けします。

番号 $m$ が山頂であるとは、すべての $k > m$ で $a_k \leq a_m$ となることとします。

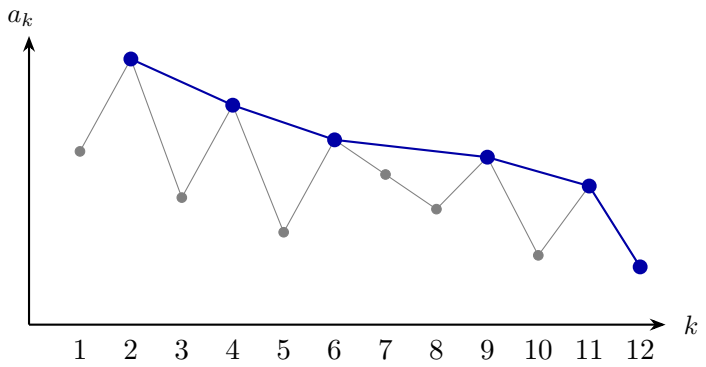
**ステップ1**　山頂が無限個ある場合

山頂を小さい順に $m_1 < m_2 < \cdots$ とすると、$m_j$ が山頂で $m_{j+1} > m_j$ なので、山頂の定義より $a_{m_{j+1}} \leq a_{m_j}$ です。部分列 $a_{m_j}$ は単調減少です。

**ステップ2**　山頂が有限個の場合

最後の山頂より後ろの番号 $k_1$ をとります（山頂が一つもなければ $k_1 = 1$ とします）。$k_1$ は山頂でないので、山頂の定義の否定から、$k_2 > k_1$ で $a_{k_2} > a_{k_1}$ となる番号があります。$k_2$ も最後の山頂より後ろなので山頂でなく、$k_3 > k_2$ で $a_{k_3} > a_{k_2}$ となる番号があります。これを続けると、単調増加な部分列 $a_{k_j}$ が得られます。　□

**図 3.3**　単調部分列の取り出し方（山頂の議論）




ある数列の最初の12項。青い点は「それより後ろの項がどれも自分以下」となっている山頂で、それを順につなぐと単調減少な部分列になる（この図は有限個の項で考え方を示したもの）。

**図の読み方**

1. 灰色の折れ線は、上下に揺れながら進む数列です。数列そのものは単調ではありません。
2. 青い点は「そこから右を見て、自分より高い点がない」項（山頂）です。山頂を左から順にたどると、高さは下がる一方なので、単調減少な部分列になります。
3. 山頂が有限個しかないときは、最後の山頂より右では「右側に必ず自分より高い点がある」ので、それをたどって単調増加な部分列を作ります。

**定理 3.22（ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理）**

$\mathbb{R}^n$ の有界な点列は、収束する部分列をもつ。

**証明のアイデア**

1次元では、どんな数列からも単調な部分列が取り出せ（補題 3.21）、有界で単調な数列は上限公理によって収束します（補題 3.20）。多次元では、成分ごとにこれを行います。山場は、第2成分のために部分列を取り直しても、第1成分の収束が壊れないことで、それを保証するのが補題 3.13 です。

**証明**

**ステップ1**　$n = 1$ の場合

$\{a_k\}$ を有界な実数列とします。補題 3.21 より単調な部分列 $\{a_{k_j}\}$ があります。この部分列ももとの数列の値をとるので有界で、補題 3.20 より収束します。

**ステップ2**　一般の $n$ の場合

$\{x^k\}$ を有界な点列とし、$\|x^k\| \leq M$ とします。各成分は $|x_i^k| \leq \|x^k\| \leq M$ を満たすので、成分ごとの数列も有界です。

- 第1成分の数列 $\{x_1^k\}$ に、ステップ1を使います。収束する部分列をとり、その番号の集まりを $N_1$ とします。
- 番号を $N_1$ に制限した第2成分の数列も有界なので、ステップ1から、$N_1$ の中から番号をさらに選んで、第2成分が収束するようにできます。その番号の集まりを $N_2 \subseteq N_1$ とします。番号を $N_2$ に制限した第1成分は、$N_1$ に沿った収束する数列の部分列なので、補題 3.13 より同じ極限に収束したままです。
- これを第 $n$ 成分まで繰り返すと、番号の集まり $N_n$ に沿って、すべての成分が収束します。

命題 3.11 の性質1（成分ごとの収束）より、$N_n$ に沿った部分列は $\mathbb{R}^n$ で収束します。　□

**補足：経済学での使いどころ　「部分列をとる」という技法**

この定理は、この本のすべての存在証明の心臓部です。存在証明はたいてい次の3段階でできています。

1. 「近似的な解」の列を作る（最大値に近づく点列、細かい分割での近似的な不動点、など）。
2. その列は有界なので、ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理から収束する部分列がとれる。
3. 極限で近似が正確になることを、連続性や閉集合性で確かめる。

ワイエルシュトラスの最大値定理とベルジュの最大値定理（第4章）、支持超平面定理（第5章）、ブラウワーと角谷の不動点定理（第10章）の証明で、この流れが繰り返されます。証明を読むときに「いまどの段階か」を意識すると、長い証明でも迷子になりません。

## 3.8　コーシー列と完備性

収束の定義には、極限 $x$ がはじめから登場します。しかし、反復計算で近似解を作っていく場面などでは、極限が何であるかは分からないまま、「列の項どうしが互いに近づいていく」ことだけが分かる、ということがよくあります。そのような列が必ず収束するかどうかを問うのが、完備性です。

**定義 3.23（コーシー列）**

$\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^k\}$ がコーシー列であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 $K$ が存在し、$k, m \geq K$ ならば $\|x^k - x^m\| < \varepsilon$ となることをいう。

**数式の読み方：定義の読み方**

- 収束の定義が「項が極限 $x$ に近づく」ことなのに対し、コーシー列の定義は「十分先の項どうしが互いに近づく」ことです。極限を名指しせずに述べられているのが特徴です。
- 「隣どうしの項が近づく」（$\|x^{k+1} - x^k\| \to 0$）だけでは不十分です。数列 $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$ は、隣どうしの差 $\frac{1}{k+1}$ が 0 に近づきますが、いくらでも大きくなることが知られていて、コーシー列ではありません。定義では、離れた番号の $k$ と $m$ についても差が小さいことを要求しています。

**命題 3.24（コーシー列の基本性質）**

1. 収束する点列はコーシー列である。
2. コーシー列は有界である。
3. コーシー列が収束する部分列をもつならば、もとのコーシー列もその部分列と同じ点に収束する。

**証明**

**ステップ1**　性質1

$x^k \to x$ とし、$\varepsilon > 0$ をとります。$k \geq K$ で $\|x^k - x\| < \varepsilon/2$ となる $K$ をとると、$k, m \geq K$ で

$$\begin{aligned} \|x^k - x^m\| &\leq \|x^k - x\| + \|x - x^m\| && \text{（定理 3.3）} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

です。

**ステップ2**　性質2

コーシー列の定義で $\varepsilon = 1$ とし、$k, m \geq K$ で $\|x^k - x^m\| < 1$ となる $K$ をとります。$m = K$ とすると、$k \geq K$ で、三角不等式（定理 3.3）より $\|x^k\| \leq \|x^k - x^K\| + \|x^K\| < 1 + \|x^K\|$ です。$M = \max\{\|x^1\|, \ldots, \|x^{K-1}\|, 1 + \|x^K\|\}$ とすれば、すべての $k$ で $\|x^k\| \leq M$ です。

**ステップ3**　性質3

$\{x^k\}$ をコーシー列、$x^{k_j} \to x$ とし、$\varepsilon > 0$ をとります。

- コーシー列の定義から、$k, m \geq K$ で $\|x^k - x^m\| < \varepsilon/2$ となる $K$ があります。
- 部分列の収束から、$j \geq J$ で $\|x^{k_j} - x\| < \varepsilon/2$ となる $J$ があります。

$k \geq K$ を任意にとり、$j = \max\{J, K\}$ とすると、補題 3.13 より $k_j \geq j \geq K$ です。したがって

$$\begin{aligned} \|x^k - x\| &\leq \|x^k - x^{k_j}\| + \|x^{k_j} - x\| && \text{（定理 3.3）} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon && \text{（}k, k_j \geq K \text{ と } j \geq J\text{）} \end{aligned}$$

です。$k \geq K$ は任意だったので、$x^k \to x$ です。　□

**定理 3.25（$\mathbb{R}^n$ の完備性）**

$\mathbb{R}^n$ のコーシー列は収束する。

**証明のアイデア**

コーシー列は有界なので、ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理から、どこかに集まる部分列があります。項どうしが互いに近づいているので、部分列が集まる点に、列全体も引き寄せられます。上限公理（実数にすき間がないこと）が、ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理を通して、ここでも働いています。

**証明**　$\{x^k\}$ をコーシー列とします。命題 3.24 の性質2より有界なので、定理 3.22 より収束する部分列 $x^{k_j} \to x$ があります。命題 3.24 の性質3より、$x^k \to x$ です。 □

**系 3.26（閉集合の完備性）**

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ を閉集合とする。$F$ の点からなるコーシー列は、$F$ の点に収束する。

**証明**　定理 3.25 より、コーシー列はある $x \in \mathbb{R}^n$ に収束します。$F$ は閉集合なので、定理 3.15 より $x \in F$ です。 □

**数式の読み方：2つの「完備性」**

- 上限公理を「実数の完備性」と呼びました。定理 3.25 の「コーシー列は収束する」も完備性と呼ばれます。私たちは前者から後者を導きました。
- 逆に、「コーシー列は収束する」という性質と「どんな実数よりも大きな自然数がある」という性質（アルキメデスの性質）から、上限公理を導くこともできます。つまり、2つの完備性は実数については同じ内容を表しています。この逆向きの証明は、本書では扱いません。
- 有理数の集合は完備ではありません。$\sqrt{2}$ の小数展開を途中で打ち切った有理数の列 $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \ldots$ はコーシー列ですが、その極限 $\sqrt{2}$ は有理数ではないからです。

**補足：経済学での使いどころ**

完備性の強みは、「極限が何であるかを知らなくても、収束すると言える」ことです。動的計画法では、価値関数を求めるために関数の列を反復で作り、その列が「関数の空間のコーシー列」であることを示して、極限の価値関数の存在を導きます。そこでは、この節の議論を、点の代わりに関数を並べた列に当てはめます。反復で均衡価格や固定点を数値的に求める方法の収束を保証するときにも、同じ考え方を使います。

## 3.9 コンパクト性

**定義 3.27（コンパクト）**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ の点からなる任意の点列が、$K$ の点に収束する部分列をもつとき、$K$ はコンパクトであるという。

**数式の読み方：コンパクト性の直観**

- 点列そのものは収束しなくてかまいません。「どんな点列を作っても、その中から $K$ の中のどこかに集まっていく部分列を取り出せる」ことがコンパクト性です。点列が「逃げ出す」場所がない集合、と言ってもよいでしょう。
- 点列が逃げ出す方法は2つあります。遠くへ逃げる（有界でない）か、境界の穴から外へ抜ける（閉じていない）かです。次の定理は、この2つをふさげばコンパクトになることを示します。

**定理 3.28（ハイネ＝ボレルの定理）**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ について、$K$ がコンパクトであることと、$K$ が有界な閉集合であることは同値である。

**証明のアイデア**

「有界かつ閉ならコンパクト」の方向が、存在証明で実際に使う向きです。有界性がボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理を通して「集まる部分列」を与え、閉集合性が「集まった先が $K$ の中にある」ことを保証します。逆向きは、点列が「遠くへ逃げる」か「境界の穴から抜ける」かのどちらかで、コンパクト性が破れることを確かめるだけです。

**証明**

**ステップ1**　有界な閉集合ならコンパクト

$K$ が有界な閉集合で、$x^k \in K$ とします。$K$ が有界なので点列 $\{x^k\}$ も有界で、定理 3.22 より収束する部分列 $x^{k_j} \to x$ があります。$x^{k_j} \in K$ で $K$ は閉集合なので、定理 3.15 より $x \in K$ です。

**ステップ2**　コンパクトなら有界

対偶を示します。$K$ が有界でないとすると、どんな自然数 $k$ についても「すべての $x \in K$ で $\|x\| \leq k$」は成り立たないので、$\|x^k\| > k$ となる $x^k \in K$ があります。この点列の任意の部分列は、補題 3.13 より $\|x^{k_j}\| > k_j \geq j$ を満たすので有界でなく、命題 3.11 の性質3（収束する点列は有界）より収束しません。よって $K$ はコンパクトではありません。

**ステップ3**　コンパクトなら閉集合

$K$ の点列 $x^k$ が $x \in \mathbb{R}^n$ に収束するとします。コンパクト性から、ある部分列が $K$ の点 $y$ に収束します。一方、補題 3.13 より、その部分列は $x$ にも収束します。極限の一意性（命題 3.11 の性質2）から $x = y \in K$ です。定理 3.15 より $K$ は閉集合です。　□

**補足：経済学での使いどころ　コンパクトかどうかの確かめ方**

実際にはコンパクト性を定義から確かめることはほとんどなく、「有界か」「閉じているか」の2点を調べます。大学院ミクロでよく出てくる集合を整理しておきます。

| 集合 | コンパクトか | 理由・対処 |
|---|---|---|
| 予算集合 $B(p,w)$（$p \gg 0$） | はい | 弱い不等式（閉）、$x_\ell \leq w/p_\ell$（有界） |
| 価格単体 $\Delta$、混合戦略の集合 | はい | 閉で、成分が $[0,1]$ に入る |
| 実行可能な配分の集合 | はい | 閉で、各成分が総賦存量以下 |
| 支出最小化の制約集合 $\{x : u(x) \geq u\}$ | いいえ | 有界でない。支出が一定以下の部分に制限する |
| 生産集合 $Y$ | いいえ（通常） | 有界でない。実行可能な部分に制限する |
| $\mathbb{R}^L_{++}$ | いいえ | 閉でも有界でもない |

コンパクトでない集合が出てきたら、「最適解が入りうる範囲だけに制限すると、コンパクトになるか」を考えるのが定石です。支出最小化の解の存在や、生産のある経済での均衡の存在を示すときに、この方法を使います。

コンパクト集合から新しいコンパクト集合を作る方法を確認しておきます。特に3の直積は、戦略の組や配分のように「各主体の選択を並べたもの」の集合がコンパクトであることを示すのに使います。直積 $K_1 \times \cdots \times K_m$（$K_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$）の点 $(x_1, \ldots, x_m)$ は、成分を並べた $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_m}$ の点とみなし、ノルムもその空間のものを使います。したがって $\|(x_1, \ldots, x_m)\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_m\|^2$ です。

**定理 3.29（コンパクト集合の作り方）**

1. コンパクト集合 $K$ の閉部分集合 $F \subseteq K$ はコンパクトである。
2. コンパクト集合 $K$ と閉集合 $F$ の共通部分 $K \cap F$ はコンパクトである。
3. $K_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}, \dots, K_m \subseteq \mathbb{R}^{n_m}$ がコンパクトならば、直積 $K_1 \times \cdots \times K_m$ はコンパクトである。

**証明のアイデア**

1と2は、ハイネ＝ボレルの定理で「有界」と「閉」に分けて確かめるだけです。3の山場は、ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理の証明と同じく、部分列を一つずつ取り直していくことです。一度収束させた成分は、その後で部分列を取り直しても収束したままです（補題 3.13）。

**証明**

**ステップ1**　閉部分集合

$K$ はコンパクトなので、定理 3.28 より有界です。$F \subseteq K$ なので $F$ も有界で、仮定より閉集合です。定理 3.28 より $F$ はコンパクトです。

**ステップ2**　閉集合との共通部分

$K$ はコンパクトなので、定理 3.28 より閉集合です。$K \cap F$ は2つの閉集合の共通部分なので、命題 3.9 の性質2より閉集合で、$K$ の部分集合です。ステップ1より、$K \cap F$ はコンパクトです。

**ステップ3**　直積

直積の点列 $z^k = (x_1^k, \dots, x_m^k)$（$x_i^k \in K_i$）をとります。

- $\{x_1^k\}$ は $K_1$ の点列なので、$K_1$ のコンパクト性から、$K_1$ の点 $a_1$ に収束する部分列があります。その番号の集まりを $N_1$ とします。
- 番号を $N_1$ に制限した $\{x_2^k\}$ は $K_2$ の点列なので、$K_2$ のコンパクト性から、番号をさらに選んで $K_2$ の点 $a_2$ に収束させられます。その番号の集まりを $N_2 \subseteq N_1$ とします。$N_2$ に沿った $x_1^k$ は、$N_1$ に沿って $a_1$ に収束する列の部分列なので、補題 3.13 より $a_1$ に収束したままです。
- これを $m$ 回繰り返すと、番号の集まり $N_m$ に沿って、すべての $i$ で $x_i^k \to a_i \in K_i$ となります。

$N_m$ に沿った $z^k$ は、$\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_m}$ の点列として、各成分が $a = (a_1, \dots, a_m)$ の対応する成分

に収束するので、命題 3.11 の性質1より $a$ に収束します。$a \in K_1 \times \cdots \times K_m$ なので、直積はコンパクトです。 □

**数式の読み方：ハイネ＝ボレルの定理による別証明**

直積のコンパクト性は、定理 3.28 を使っても示せます。各 $K_i$ が $\|x_i\| \leq M_i$ で有界なら、$\|(x_1, \ldots, x_m)\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2 \leq \sum_i M_i^2$ なので直積も有界です。また、直積の点列が収束すれば、各ブロックも収束し（命題 3.11 の性質1）、その極限は各 $K_i$ の閉集合性から $K_i$ に入るので、直積は閉集合です。上の証明は、ハイネ＝ボレルの定理を使わずに、コンパクト性の定義だけから示したものです。

経済学に出てくる代表的な集合に当てはめます。

**命題 3.30（予算集合と単体のコンパクト性）**

1. $p \in \mathbb{R}^L_{++}$、$w \in \mathbb{R}$ ならば、予算集合 $B(p, w)$ はコンパクトである（$w < 0$ なら空集合で、空集合もコンパクトである）。
2. 単体 $\Delta = \{p \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_\ell p_\ell = 1\}$ はコンパクトである。
3. 有限個の単体の直積はコンパクトである。特に、有限ゲームの混合戦略の組の集合はコンパクトである。

**証明**

**ステップ1**　予算集合

命題 3.16 より閉集合なので、有界性を示せば定理 3.28 よりコンパクトです。$x \in B(p, w)$ なら、各 $\ell$ で

$$p_\ell x_\ell \leq \sum_j p_j x_j \leq w \qquad \text{（他の項は } p_j > 0、x_j \geq 0 \text{ より非負、予算制約）}$$

で、$p_\ell > 0$ で割ると $0 \leq x_\ell \leq w / p_\ell$ です。したがって $\|x\| \leq \sqrt{\sum_\ell (w/p_\ell)^2}$ で、$B(p, w)$ は有界です。

**ステップ2**　単体

$\Delta$ の点は $p_\ell \geq 0$ と $\sum_j p_j = 1$ を満たすので $0 \leq p_\ell \leq 1$ で、$\|p\| \leq \sqrt{L}$ です。閉集合であることは、定理 3.15 で確かめます。$p^k \in \Delta$、$p^k \to p$ とすると、各成分 $p^k_\ell \to p_\ell$（命題 3.11 の性質1）で、$p^k_\ell \geq 0$ から $p_\ell \geq 0$（補題 3.14 の3）です。また $\sum_\ell p^k_\ell = \mathbf{1} \cdot p^k$（$\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 のベクトル）は、補題 3.14 の2より $\mathbf{1} \cdot p = \sum_\ell p_\ell$ に収束します。すべての $k$ で値は 1 なので、極限も 1 です（極限の一意性、命題 3.11 の性質2）。よって $p \in \Delta$ で、$\Delta$ は有界な閉集合です。定理 3.28 よりコンパクトです。

**ステップ3**　単体の直積

各単体はステップ2よりコンパクトなので、定理 3.29 の3より、その直積はコンパクトです。プレーヤー $i$ の純粋戦略が $s_i$ 個あるとき、混合戦略の集合は $\mathbb{R}^{s_i}$ の単体で、混合戦略の組の集合はその直積です。 □

---

**命題 3.31（実行可能な配分の集合のコンパクト性）**

$I$ 人の消費者と $L$ 財からなる交換経済で、総賦存量を $\omega \in \mathbb{R}^L_+$ とする。実行可能な配分の集合

$$\mathcal{A} = \left\{ (x^1, \dots, x^I) \in \mathbb{R}^{LI}_+ : \sum_{i=1}^{I} x^i_\ell \le \omega_\ell \ \ (\ell = 1, \dots, L) \right\}$$

はコンパクトである。

---

**証明**

**方針**　定理 3.28 を使い、有界性と閉集合性を確かめます。

**ステップ1**　有界性

$(x^1, \dots, x^I) \in \mathcal{A}$ ならば、各 $i, \ell$ で、他の消費者の量が非負であることから $0 \le x^i_\ell \le \sum_j x^j_\ell \le \omega_\ell$ です。したがって

$$\|(x^1, \dots, x^I)\|^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{L} (x^i_\ell)^2 \le I \sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell^2$$

で、$\mathcal{A}$ は有界です。

**ステップ2**　閉集合性

$\mathcal{A}$ の点列が $(x^1, \dots, x^I)$ に収束するとします。命題 3.11 の性質1より各成分 $x^{i,k}_\ell \to x^i_\ell$ で、補題 3.14 の3より $x^i_\ell \ge 0$ です。また、補題 3.14 の1（和）を $I-1$ 回使うと $\sum_i x^{i,k}_\ell \to \sum_i x^i_\ell$ で、すべての $k$ で左辺は $\omega_\ell$ 以下なので、補題 3.14 の3より $\sum_i x^i_\ell \le \omega_\ell$ です。よって極限は $\mathcal{A}$ に入り、定理 3.15 より $\mathcal{A}$ は閉集合です。 □

**補足：経済学での使いどころ**

- 予算集合のコンパクト性は、第4章のワイエルシュトラスの最大値定理と組み合わせて、効用最大化問題に解があることを保証します。
- 実行可能な配分の集合のコンパクト性は、パレート効率的な配分の存在や、コア（どの消費者の集まりも離脱して得をしない配分）の分析の出発点です。たとえば、効用関数が連続なら、「全員の効用の、正の重みによる重み付き和」はこの集合の上で最大値をもち（第4章のワイエルシュトラスの最大値定理）、その最大点はパレート効率的です。
- 混合戦略の組の集合のコンパクト性は、ナッシュ均衡の存在証明（第11章）で、不動点定理を当てはめる集合の条件になります。

**補足：価格が0の財があると**

ある財の価格が $p_\ell = 0$ なら、その財はいくらでも無料で手に入り、予算集合は有界でなくなります。消費者理論で $p \gg 0$ を仮定するのは、このためでもあります。一般均衡の存在証明で、価格を単体という「コンパクトだが価格 $0$ を含む」集合で考えるときに、境界での扱いに工夫が必要になるのはこのためです（第11章）。

**発展：開被覆によるコンパクト性**

一般の位相空間では、コンパクト性は「$K$ を覆う開集合の族から、必ず有限個を選んで $K$ を覆える」こととして定義されます（開被覆によるコンパクト性）。距離空間（したがって $\mathbb{R}^n$）では、これはこの章の点列による定義と同値であることが知られています。本書では、この同値性は証明しません。不動点定理や関数解析の専門書では開被覆による定義が使われることが多いので、「点列で考えてよいのは距離空間だから」と覚えておくとよいでしょう。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- コーシー＝シュワルツの不等式と三角不等式：支出の変化の評価、ワルラス法則の証明、射影定理（第5章）。
- 開集合：価格を $\mathbb{R}^L_{++}$ で考える理由、内点での微分。
- 閉集合と点列による特徴づけ：予算集合・生産集合・選好の連続性の定式化。
- 内部・閉包・境界：端点解と内点解の区別、支持超平面定理。
- ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理：ほぼすべての存在証明の「部分列をとる」段階。
- 完備性：反復で作る近似解の収束、動的計画法での価値関数の存在。
- コンパクト性と直積：効用最大化の解の存在、配分の集合と混合戦略の集合の性質、均衡の存在証明の出発点。

**要点**

- コーシー＝シュワルツの不等式と三角不等式が、距離と近さの議論の土台です。
- 開集合は「すべての点のまわりに余裕がある」集合、閉集合は「収束する点列の極限を逃さない」集合です。閉包は「$A$ の点でいくらでも近似できる点」の集合で、境界は閉包から内部を除いたものです。
- 実数の完備性（上限公理）から、有界な点列は収束する部分列をもち（ボルツァーノ＝ワイエルシュトラス）、コーシー列は収束します（$\mathbb{R}^n$ の完備性）。
- $\mathbb{R}^n$ では、コンパクト $\Leftrightarrow$ 有界かつ閉（ハイネ＝ボレル）です。予算集合（$p \gg 0$）、価格単体、実行可能な配分の集合はコンパクトで、コンパクト集合の直積もコンパクトです。

**次の章へ**　次の章では、コンパクト集合の上の連続関数は必ず最大値をもつこと、そして「値が集合になる写像（対応）」の連続性と、ベルジュの最大値定理を学びます。この章の「部分列をとる」技法と閉集合の点列による特徴づけが、そのまま証明の道具になります。

**大学院とのつながり**　混合戦略の集合（単体の直積）や価格単体がコンパクトであることは、ナッシュ均衡と一般均衡の存在証明の出発点です。完備性は、動学的なモデルで価値関数や均衡を反復計算で求めるときの、収束の根拠になります。

第4章

# 連続性・最大値定理・対応

**ここまでの流れ**　前の章で、コンパクト性（有界かつ閉）を定義し、予算集合と価格単体がコンパクトであることを示しました。
**前提知識**　第1章の選好関係（完備性・推移性）と効用関数による表現、逆像の性質（命題 1.9）。第3章の閉集合の点列による特徴づけ（定理 3.15）、極限と演算・不等式（補題 3.14）、ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理（定理 3.22）、ハイネ＝ボレルの定理（定理 3.28）、予算集合のコンパクト性（命題 3.30）。
**この章の問い**　効用を最大にする消費は、そもそも存在するのでしょうか。また、価格が少し変わったとき、最適な消費も少しだけ変わるのでしょうか。値が集合になる場合、「連続」とは何を意味するのでしょうか。
**この章で分かること**　連続性の2つの定義の同値性と逆像による特徴づけ、連続関数による開集合・閉集合、ワイエルシュトラスの最大値定理、中間値の定理、一様連続性、連続な効用関数の存在定理、対応の上半連続性・下半連続性とその点列による特徴づけ、予算対応の連続性、ベルジュの最大値定理。すべて証明つきです（ドブリューの一般的な効用表現定理だけは主張のみ）。

## 4.1　この章の見取り図

前の章で「コンパクト」を準備しました。この章では存在定理のもう一つの材料である「連続」を準備します。前半（4.2〜4.6節）は関数の連続性と、「コンパクト＋連続 ⇒ 最大値が存在する」というワイエルシュトラスの定理、そして「連続な選好は連続な効用関数で表せる」という効用関数の存在定理です。後半（4.7〜4.9節）は、値が集合になる写像（対応）の連続性と、最適化問題の解がパラメータに連続に依存することを保証するベルジュの最大値定理です。ベルジュの定理は、ナッシュ均衡と一般均衡の存在証明で「最適反応の対応のグラフが閉じている」ことを示すための、中心的な道具です。

## 4.2　連続関数

連続関数とは、直観的には「入力を少しだけ変えると、出力も少しだけ変わる」関数です。

**定義 4.1（連続性（$\varepsilon$-$\delta$ による定義））**

$f : X \to \mathbb{R}^m$（$X \subseteq \mathbb{R}^n$）が点 $x_0 \in X$ で連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、$x \in X$ かつ $\|x - x_0\| < \delta$ ならば $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ となることをいう。$X$ のすべての点で連続なとき、$f$ は連続であるという。

**数式の読み方：定義の読み方**

- 「出力の誤差を $\varepsilon$ 以内にしたい」という要求に対して、「入力の誤差を $\delta$ 以内にすればよい」と答えられる、という意味です。$\delta$ は $\varepsilon$ と $x_0$ に応じて選んでかまいません。
- 量化子の順番「$\forall\varepsilon\,\exists\delta$」が大切です（第1章）。

実際の証明では、点列を使った言い換えの方がずっと使いやすいことが多くあります。

**定理 4.2（連続性の点列による特徴づけ）**

$f : X \to \mathbb{R}^m$ が $x_0$ で連続であることと、「$X$ の点列 $x^k$ が $x_0$ に収束するならば必ず $f(x^k) \to f(x_0)$」であることは同値である。

**証明**

**ステップ1**　$\varepsilon$-$\delta$ の連続性ならば点列の連続性

$x^k \to x_0$ とし、$\varepsilon > 0$ をとります。連続性から、$\|x - x_0\| < \delta$ ならば $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ があります。収束の定義から、ある $K$ 以降は $\|x^k - x_0\| < \delta$ なので、$\|f(x^k) - f(x_0)\| < \varepsilon$ です。

**ステップ2**　点列の連続性ならば $\varepsilon$-$\delta$ の連続性

対偶を示します。$\varepsilon$-$\delta$ の連続性が成り立たないとすると、否定の作り方（第1章）より、ある $\varepsilon > 0$ について、どんな $\delta > 0$ をとっても、$\|x - x_0\| < \delta$ なのに $\|f(x) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ となる $x$ があります。$\delta = 1/k$ として、そのような点を $x^k$ と選ぶと、$x^k \to x_0$ ですが $\|f(x^k) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ のままなので $f(x^k) \not\to f(x_0)$ です。　□

**数式の読み方：2つの定義の使い分け**

- 「ある関数が連続であることを**示す**」ときは、多くの場合「連続関数の組み合わせだから連続」で済ませます（次の補足）。
- 「連続であることを**使う**」ときは、点列の形が圧倒的に便利です。存在証明では「点列 $x^k \to x$ をとり、$f(x^k) \to f(x)$ を使って不等式を極限に持ち越す」という一行が、何度も登場します。
- $\varepsilon$-$\delta$ の形は、ステップ2のように「連続でない」ことの具体的な中身（どれだけ小さく動いても値が $\varepsilon$ 以上ずれる）を取り出すときに役立ちます。

**補足：連続関数の組み合わせ**

定理 4.2 と、数列の極限の性質（和・定数倍は補題 3.14、積・商も同様の議論で示せます）から、連続関数の和・積・商（分母が 0 でないところ）・合成も連続であることが分かります。多項式、指数関数、対数関数、max などを組み合わせた経済学の関数の多くは、こうして連続であることが確かめられます。

第1章で予告したとおり、連続性は逆像の言葉でも言い表せます。定義域が $\mathbb{R}^n$ 全体のときに述べます。

**命題 4.3（逆像による特徴づけ）**

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について、次の3つは同値である。

1. $f$ は連続である。
2. 任意の開集合 $V \subseteq \mathbb{R}^m$ について、逆像 $f^{-1}(V)$ は開集合である。
3. 任意の閉集合 $F \subseteq \mathbb{R}^m$ について、逆像 $f^{-1}(F)$ は閉集合である。

**証明**

**ステップ1**　1ならば3

$x^k \in f^{-1}(F)$、$x^k \to x$ とします。連続性（定理 4.2）から $f(x^k) \to f(x)$ で、$f(x^k) \in F$ と $F$ が閉集合であることから（定理 3.15）$f(x) \in F$、つまり $x \in f^{-1}(F)$ です。定理 3.15 より $f^{-1}(F)$ は閉集合です。

**ステップ2**　3ならば2

$V$ が開集合なら $\mathbb{R}^m \setminus V$ は閉集合で、逆像は補集合を保つので（命題 1.9）$f^{-1}(V) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus V)$ です。右辺は閉集合の補集合なので開集合です。

**ステップ3**　2ならば1

$x_0$ と $\varepsilon > 0$ をとります。開球 $B_\varepsilon(f(x_0))$ は開集合（命題 3.6）なので、その逆像は $x_0$ を含む開集合で、$B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ となる $\delta > 0$ があります。これは「$\|x - x_0\| < \delta$ ならば $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$」ということです。 □

**補足：経済学での使いどころ**

「開集合の逆像は開集合」は、「ある性質が成り立つ価格の範囲は、価格を少し動かしても成り立つ範囲になっている」という議論を、一行で済ませる道具です。次の命題 4.4 は、この命題を $V = (c, \infty)$ や $F = [c, \infty)$ に当てはめたものです。

## 4.3　連続関数が作る開集合・閉集合

**命題 4.4（連続関数による閉集合・開集合）**

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続ならば、任意の $c \in \mathbb{R}$ について

1. $\{x : f(x) \geq c\}$、$\{x : f(x) \leq c\}$、$\{x : f(x) = c\}$ は閉集合である。
2. $\{x : f(x) > c\}$、$\{x : f(x) < c\}$ は開集合である。

**証明**

**ステップ1**　閉集合

$x^k \to x$ で、すべての $k$ で $f(x^k) \geq c$ とします。連続性から $f(x^k) \to f(x)$ で、弱い不等式は極限で保たれるので（補題 3.14 の3）$f(x) \geq c$ です。定理 3.15 より $\{f \geq c\}$ は閉集合です。他の2つも同様で、$\{f = c\}$ は $\{f \geq c\} \cap \{f \leq c\}$ です。

**ステップ2**　開集合

$\{x : f(x) > c\}$ は閉集合 $\{x : f(x) \leq c\}$ の補集合なので開集合です。 □

**補足：経済学での使いどころ**

効用関数 $u$ が連続なら、上方集合 $\{x : u(x) \geq u(\bar{x})\}$ と下方集合 $\{x : u(x) \leq u(\bar{x})\}$ は閉集合です。逆向きに、「上方集合と下方集合が閉集合である選好は、連続な効用関数で表せるか」という問いには、4.6節で答えます。

**数式の読み方：「$\leq$ なら閉、$<$ なら開」の使い方**

- 予算集合 $\{x \geq 0 : p \cdot x \leq w\}$、上方集合 $\{x : u(x) \geq \bar{u}\}$、間接効用の下方集合 $\{p : v(p, w) \leq \bar{v}\}$ は、どれも「連続関数 $\leq$（$\geq$）定数」の形なので、確かめるまでもなく閉集合です。
- 「正の利潤をあげられる価格の集合 $\{p : \pi(p) > 0\}$」のように強い不等号で定まる集合は開集合です。「ある価格で成り立つ厳密な不等式は、少し価格を変えても成り立つ」という意味で、比較静学で「均衡の近くでは状況が変わらない」と議論するときに使います。

## 4.4 ワイエルシュトラスの最大値定理

**命題 4.5（コンパクト集合の連続像はコンパクト）**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ がコンパクトで $f : K \to \mathbb{R}^m$ が連続ならば、$f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ はコンパクトである。

**証明**　$f(K)$ の点列 $y^k = f(x^k)$（$x^k \in K$）をとります。$K$ はコンパクトなので、部分列 $x^{k_j} \to x \in K$ があり、連続性から $y^{k_j} = f(x^{k_j}) \to f(x) \in f(K)$ です。 □

**定理 4.6（ワイエルシュトラスの最大値定理）**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ が空でないコンパクト集合で、$f : K \to \mathbb{R}$ が連続ならば、$f$ は $K$ 上で最大値と最小値をとる。

**証明**　命題 4.5 から $f(K)$ は $\mathbb{R}$ の空でないコンパクト集合、つまり有界な閉集合です（定理 3.28）。上に有界なので上限 $s = \sup f(K)$ が存在します（上限公理）。上限の特徴づけ（命題 1.19）から、各 $k$ について $s - 1/k < y^k \leq s$ となる $y^k \in f(K)$ があり、$y^k \to s$ です。$f(K)$ は閉集合なので $s \in f(K)$ です（定理 3.15）。つまり、ある $x^* \in K$ で $f(x^*) = s$ となり、これが最大値です。最小値も同様です。 □

**補足：経済学での使いどころ　どの仮定がどの経済学の仮定に対応するか**

効用最大化問題に当てはめると、定理の4つの仮定は次の経済学の仮定に対応します。

| 定理の仮定 | 消費者理論での根拠 |
|---|---|
| 集合が空でない | $0 \in B(p,w)$（何も買わないことはできる） |
| 集合が閉じている | 予算制約が弱い不等式 $p \cdot x \leq w$ |
| 集合が有界 | すべての価格が正（$p \gg 0$） |
| 関数が連続 | 選好の連続性（4.6節） |

大学院ミクロで「選好は連続」「価格は正」と当たり前のように仮定されるのは、この定理を使うためです。仮定が一つ欠けると、どんな反例が作れるかを次の補足で確かめてください。

**系 4.7（効用最大化問題の解の存在）**

効用関数 $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ が連続で、$p \gg 0$、$w \geq 0$ ならば、$\max_{x \in B(p,w)} u(x)$ は解をもつ。

**補足：仮定が欠けると**

$(0,1)$ 上の $f(x) = x$ は、集合が閉じていないので最大値をもちません。$[0,\infty)$ 上の $f(x) = x$ は、集合が有界でないので最大値をもちません。$[0,1]$ 上で $x < 1$ のとき $f(x) = x$、$f(1) = 0$ とした関数は、連続でないので最大値をもちません。証明のどこが崩れるかを、それぞれ確かめてみてください。

## 4.5　中間値の定理と一様連続性

連続関数のもう2つの基本性質を確認します。どちらも、のちの存在証明の部品になります。

**定理 4.8（中間値の定理）**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で、$f(a) < c < f(b)$ ならば、$f(x^*) = c$ となる $x^* \in (a,b)$ が存在する（$f(a) > c > f(b)$ の場合も同様）。

**証明のアイデア**

「$f$ の値が $c$ より小さい点」の集合の上限 $s$ をとると、そこがちょうど $f=c$ となる点です。$f(s)<c$ なら連続性で少し右にも $f<c$ の点があって上限であることに反し、$f(s)>c$ なら少し左は $f>c$ の点ばかりで、やはり上限であることに反します。実数にすき間がない（上限公理）ことが、グラフが $c$ の高さを「飛び越えない」ことを保証しています。

**証明**　$S=\{x\in[a,b]:f(x)<c\}$ とおきます。$a\in S$ で $S$ は $b$ で上に有界なので、上限公理より $s=\sup S$ が存在し、$a\le s\le b$ です。

**ステップ1**　$f(s)\le c$

上限の特徴づけ（命題 1.19）から、$s-1/k<x^k\le s$ となる $x^k\in S$ がとれ、$x^k\to s$ です。連続性（定理 4.2）より $f(x^k)\to f(s)$ で、$f(x^k)<c$ なので補題 3.14 の3より $f(s)\le c$ です。特に $s\neq b$（$f(b)>c$ だから）です。

**ステップ2**　$f(s)<c$ ではない

$f(s)<c$ と仮定します。$\varepsilon=c-f(s)>0$ として連続性を使うと、$|x-s|<\delta$ ならば $f(x)<f(s)+\varepsilon=c$ となる $\delta>0$ があります。$s<b$ なので、$s<x<\min\{s+\delta,b\}$ となる $x$ をとると、$x\in S$ かつ $x>s$ で、$s$ が $S$ の上界であることに反します。

ステップ1と2より $f(s)=c$ です。$f(a)<c$ より $s\neq a$ なので、$x^*=s\in(a,b)$ です。逆向きの場合は $-f$ に当てはめます。　□

**補足：経済学での使いどころ**

1つの市場で、超過需要 $z(p)$ が価格の連続関数で、価格が低いと $z>0$、高いと $z<0$ なら、中間値の定理から $z(p^*)=0$ となる均衡価格が存在します。これは、第10章の1次元の不動点定理と、一般均衡の存在証明の原型です。次の効用関数の存在定理でも、同じ「上限をとる」議論を使います。

**定義 4.9（一様連続）**

$f:X\to\mathbb{R}^m$ が一様連続であるとは、任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在し、$x,x'\in X$、$\|x-x'\|<\delta$ ならば $\|f(x)-f(x')\|<\varepsilon$ となることをいう。

**数式の読み方：連続との違い**

連続性では $\delta$ を点 $x_0$ ごとに選べましたが、一様連続性では一つの $\delta$ が**すべての点で**通用しなければなりません。$(0,1]$ 上の $f(x)=1/x$ は連続ですが、$0$ に近いところでは傾きがいくらでも急になり、どんな $\delta$ も通用しないので、一様連続ではありません。

**定理 4.10（コンパクト集合上の連続関数は一様連続）**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ がコンパクトで $f : K \to \mathbb{R}^m$ が連続ならば、$f$ は一様連続である。

**証明**

**方針**　背理法で、一様連続でないことから「近づく2つの点列」を作り、コンパクト性で部分列をとって矛盾を導きます。

一様連続でないとすると、量化子の否定から、ある $\varepsilon > 0$ について、各 $k$ で $\|x^k - x'^k\| < 1/k$ かつ $\|f(x^k) - f(x'^k)\| \geq \varepsilon$ となる $x^k, x'^k \in K$ があります。$K$ はコンパクトなので、部分列 $x^{k_j} \to x \in K$ があります。$\|x'^{k_j} - x\| \leq \|x'^{k_j} - x^{k_j}\| + \|x^{k_j} - x\| \to 0$（三角不等式）なので $x'^{k_j} \to x$ でもあります。連続性から $f(x^{k_j}) \to f(x)$、$f(x'^{k_j}) \to f(x)$ で、

$$\|f(x^{k_j}) - f(x'^{k_j})\| \leq \|f(x^{k_j}) - f(x)\| + \|f(x) - f(x'^{k_j})\| \to 0$$

となり、$\geq \varepsilon$ に矛盾します。　□

**補足：経済学での使いどころ**

一様連続性は、「格子や分割を細かくすれば、どの場所でも近似誤差が一様に小さくなる」ことを保証します。価値関数や均衡を格子の上で数値的に近似するときの誤差評価や、不動点定理の別証明（区分的に線形な近似を使うもの）で使われます。

## 4.6　連続な効用関数の存在

第1章では、選択肢が有限個なら合理的な選好はいつでも効用関数で表せることを示し、無限個の場合には新しい道具が必要だと述べました。ここで、その道具を使います。消費集合を $X = \mathbb{R}^L_+$ とし、$e = (1, \ldots, 1)$ と書きます。

**定義 4.11（選好の連続性・単調性）**

$\mathbb{R}^L_+$ 上の選好 $\succsim$ について、

1. 連続であるとは、すべての $y \in \mathbb{R}^L_+$ について、上方集合 $\{x \in \mathbb{R}^L_+ : x \succsim y\}$ と下方集合 $\{x \in \mathbb{R}^L_+ : y \succsim x\}$ が閉集合であることをいう。
2. 単調であるとは、$x \geq y$（すべての成分で $x_\ell \geq y_\ell$）ならば $x \succsim y$、$x \gg y$（すべての成分で $x_\ell > y_\ell$）ならば $x \succ y$ となることをいう。

**定理 4.12（連続な効用関数の存在）**

$\mathbb{R}^L_+$ 上の選好 $\succsim$ が合理的（完備かつ推移的）で、連続かつ単調ならば、$\succsim$ を表現する連続な効用関数 $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ が存在する。

**証明のアイデア**

各消費 $x$ を、それと無差別になる「対角線上の組」$\alpha e = (\alpha, \dots, \alpha)$ の $\alpha$ で測ります（図 4.1）。対角線をたどると、はじめは $x$ より悪く、やがて $x$ より良くなるので、連続性によって「ちょうど無差別」な点があり（中間値の定理と同じ議論）、単調性によってそれは一つだけです。この $\alpha$ を $u(x)$ とすれば、選好の比較が対角線上の数の比較に置きかわります。

**証明**　$x \in \mathbb{R}^L_+$ を固定し、$A^+ = \{\alpha \geq 0 : \alpha e \succsim x\}$、$A^- = \{\alpha \geq 0 : x \succsim \alpha e\}$ とおきます。

**ステップ1**　$A^+$、$A^-$ は空でない閉集合で、合わせると $[0, \infty)$

$x \geq 0 = 0e$ なので単調性より $0 \in A^-$ です。$\bar{\alpha} = \max_\ell x_\ell$ とすると $\bar{\alpha} e \geq x$ なので $\bar{\alpha} \in A^+$ です。完備性より、どの $\alpha \geq 0$ も $A^+$ か $A^-$ の少なくとも一方に入ります。$\alpha_k \in A^+$、$\alpha_k \to \alpha$ なら、$\alpha_k e \to \alpha e$（補題 3.14 の1）で、上方集合 $\{z : z \succsim x\}$ は連続性より閉集合なので $\alpha e \succsim x$、つまり $\alpha \in A^+$ です（$\alpha \geq 0$ も弱い不等式の極限）。$A^-$ も同様です。

**ステップ2**　無差別になる $\alpha$ が存在する

$s = \sup\bigl(A^- \cap [0, \bar{\alpha}]\bigr)$ とおきます（0 を含み $\bar{\alpha}$ 以下なので上限公理より存在）。上限の特徴づけ（命題 1.19）から $s$ に収束する $A^-$ の点列があり、$A^-$ は閉集合なので $s \in A^-$ です。$s = \bar{\alpha}$ なら $s \in A^+$ でもあります。$s < \bar{\alpha}$ なら、$(s, \bar{\alpha}]$ の点は $A^- \cap [0, \bar{\alpha}]$ に入らないので、ステップ1より $A^+$ に入ります。$s + 1/k \to s$（$k$ が大きいとき $s + 1/k \leq \bar{\alpha}$）で $A^+$ は閉集合なので、$s \in A^+$ です。いずれにしても $s \in A^+ \cap A^-$、つまり $se \sim x$ です。

**ステップ3**　その $\alpha$ はただ一つ

$\alpha e \sim x$ かつ $\beta e \sim x$ で $\alpha > \beta$ とすると、推移性より $\alpha e \sim \beta e$ ですが、$\alpha e \gg \beta e$ なので単調性より $\alpha e \succ \beta e$ となり矛盾します。

**ステップ4**　$u$ は $\succsim$ を表現する

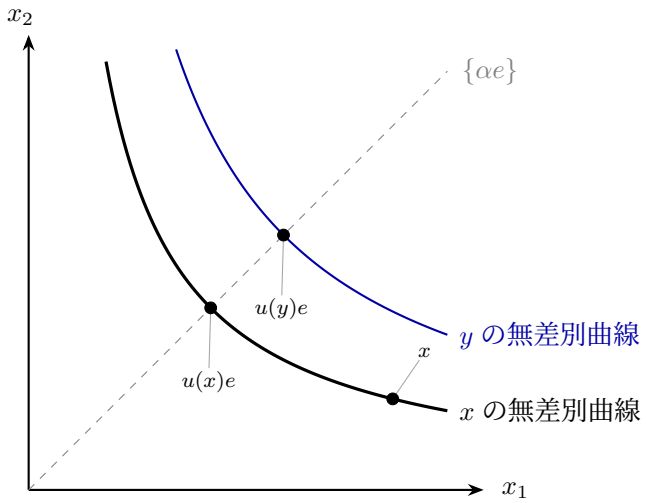
$u(x)$ を、$u(x)e \sim x$ となるただ一つの数と定めます。$x, y$ について、推移性より $x \succsim y \iff u(x)e \succsim u(y)e$ です。$u(x) \geq u(y)$ なら $u(x)e \geq u(y)e$ なので単調性より $u(x)e \succsim u(y)e$、$u(x) < u(y)$ なら $u(y)e \gg u(x)e$ なので $u(y)e \succ u(x)e$ です。したがって $x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$ です。

**ステップ5**　$u$ は連続

$t \geq 0$ について、$\{x : u(x) \geq t\} = \{x : x \succsim te\}$ です（$u(te) = t$ とステップ4）。右辺は連続性より閉集合です。$t < 0$ なら左辺は $\mathbb{R}^L_+$ 全体で、やはり閉集合です。同様に

$\{x : u(x) \le t\}$ も閉集合です。いま $x^k \to x$ なのに $u(x^k) \not\to u(x)$ とすると、ある $\varepsilon > 0$ と部分列で $u(x^{k_j}) \ge u(x) + \varepsilon$（または $\le u(x) - \varepsilon$）となります。閉集合 $\{z : u(z) \ge u(x) + \varepsilon\}$ の点列の極限 $x$ はその集合に入るので $u(x) \ge u(x) + \varepsilon$ となり矛盾します。定理 4.2 より $u$ は連続です。 □

**図 4.1**　対角線で効用を測る




$u(x) = \sqrt{x_1 x_2}$ の選好の例。$x = (4, 1)$ は $(2, 2)$ と無差別なので $u(x) = 2$。$u(y) = 2.8$ の無差別曲線を青で示した。

**図の読み方**

1. 灰色の破線が対角線 $\{\alpha e : \alpha \ge 0\}$ で、ここを「物差し」に使います。
2. 黒の無差別曲線は、$x$ と無差別な組の集まりです。それが対角線と交わる点 $u(x)e$ の座標 $u(x)$ を、$x$ の効用と定めます。
3. より好ましい組 $y$ の無差別曲線（青）は、単調性によって対角線とより先の点で交わります。こうして、選好の比較が対角線上の数の大小に置きかわります。

**補足：経済学での使いどころ**

- この定理があるので、消費者理論では「連続で単調な選好」を仮定するだけで、連続な効用関数を使って最大化問題を立てられます。系 4.7（解の存在）の仮定「効用関数が連続」は、選好の仮定から導かれるのです。
- 単調性を仮定しない一般の場合にも、合理的で連続な選好は連続な効用関数で表せることが知られています（ドブリューの定理）。本書では証明しません。第1章の辞書式選好は、連続性を満たさないために効用関数で表せない例でした。

## 4.7　対応とその連続性

効用最大化問題の解は一つとは限りません。そこで、パラメータに「解の集合」を対応させる、集合値の写像を考えます。

**定義 4.13（対応）**

集合 $X$ の各要素 $x$ に、$Y$ の空でない部分集合 $\varphi(x) \subseteq Y$ を対応させる規則 $\varphi$ を、$X$ から $Y$ への対応といい、$\varphi : X \rightrightarrows Y$ と書く。$\varphi$ の値がすべてコンパクト集合のとき、コンパクト値であるという。集合 $\mathrm{Gr}\,\varphi = \{(x, y) : x \in X,\ y \in \varphi(x)\}$ を $\varphi$ のグラフという。

**数式の読み方：経済学の対応の例**

- 予算対応 $(p, w) \mapsto B(p, w)$、需要対応 $(p, w) \mapsto x(p, w) = \arg\max_{x \in B(p,w)} u(x)$、最適反応対応（第11章）。
- 関数は「値が1点の集合」である特別な対応とみなせます。

関数の連続性は「値が急に変わらない」ことでした。対応では値が集合なので、「急に膨らまない」と「急に縮まない」の2つを分けて考えます。

**定義 4.14（上半連続）**

$\varphi : X \rightrightarrows Y$ が点 $x_0$ で上半連続であるとは、$\varphi(x_0) \subseteq V$ を満たす任意の開集合 $V$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在し、$x \in X$、$\|x - x_0\| < \delta$ ならば $\varphi(x) \subseteq V$ となることをいう。

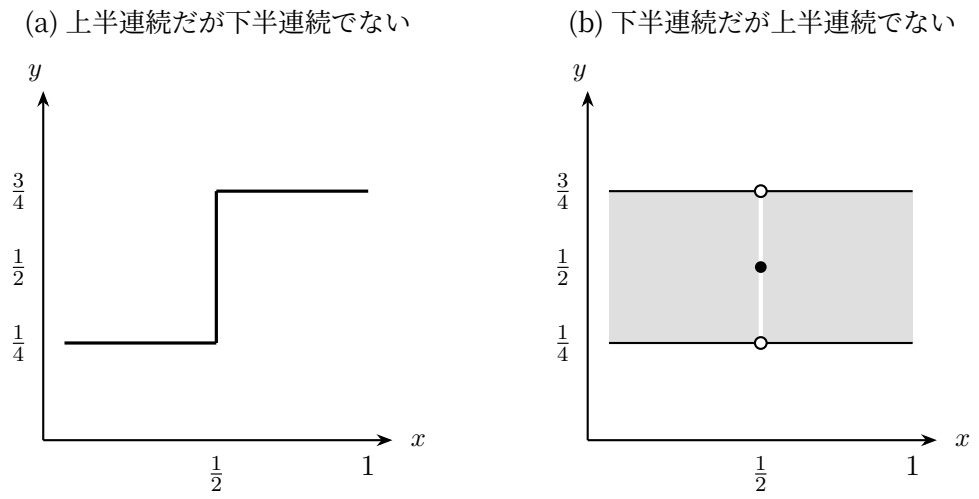
**定義 4.15（下半連続）**

$\varphi : X \rightrightarrows Y$ が点 $x_0$ で下半連続であるとは、$\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$ を満たす任意の開集合 $V$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在し、$x \in X$、$\|x - x_0\| < \delta$ ならば $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$ となることをいう。

**定義 4.16（対応の連続性）**

すべての点で上半連続かつ下半連続な対応を、連続な対応という。

**図 4.2**　上半連続と下半連続




(a) $x < \frac{1}{2}$ で $\varphi(x) = \{\frac{1}{4}\}$、$x = \frac{1}{2}$ で $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$、$x > \frac{1}{2}$ で $\{\frac{3}{4}\}$。(b) $x \neq \frac{1}{2}$ で $\varphi(x) = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$、$x = \frac{1}{2}$ で $\{\frac{1}{2}\}$。

**図の読み方**

1. (a) では、$x = \frac{1}{2}$ で値が線分 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ に「膨らんで」います。$\frac{1}{2}$ から少し動くと値は $\{\frac{1}{4}\}$ か $\{\frac{3}{4}\}$ に縮みますが、これは $\varphi(\frac{1}{2})$ を囲む開集合の中に収まるので、上半連続です。

2. しかし (a) で $\frac{1}{2} \in \varphi(\frac{1}{2})$ のまわりの小さな開集合 $V$ をとると、$\frac{1}{2}$ の近くの $x$ での値 $\{\frac{1}{4}\}$ や $\{\frac{3}{4}\}$ は $V$ と交わりません。値が「急に縮む」ので下半連続ではありません。

3. (b) では、$x = \frac{1}{2}$ で値が1点 $\{\frac{1}{2}\}$ に「縮んで」います（白い縦線は $\varphi(\frac{1}{2})$ に含まれない部分）。近くの値 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ は $\frac{1}{2}$ を含むので下半連続ですが、$\{\frac{1}{2}\}$ を囲む小さな開集合からはみ出すので上半連続ではありません。

## 4.8　点列による特徴づけ

関数の場合と同じく、対応の連続性も点列で言い換えると、証明で格段に使いやすくなります。

**補題 4.17（上半連続性の点列による特徴づけ）**

$\varphi : X \rightrightarrows Y$ をコンパクト値の対応とする。$\varphi$ が $x_0$ で上半連続であることと、次の条件は同値である。

$x^k \to x_0$、$y^k \in \varphi(x^k)$ ならば、$y^k$ のある部分列が $\varphi(x_0)$ の点に収束する。

**証明**

**ステップ1**　上半連続ならば条件が成り立つ

$\varphi(x_0)$ からの距離を $d(y)=\min_{z\in\varphi(x_0)}\|y-z\|$ とします（$\varphi(x_0)$ はコンパクトなので最小値が存在します）。各 $m$ について、$V_m=\{y:d(y)<1/m\}$ は $\varphi(x_0)$ を含む開集合です（三角不等式から $|d(y)-d(y')|\le\|y-y'\|$ なので $d$ は連続で、命題 4.4 が使えます）。上半連続性から、十分大きな $k$ で $\varphi(x^k)\subseteq V_m$ なので、$d(y^k)\to 0$ です。$\|y^k-z^k\|=d(y^k)$ となる $z^k\in\varphi(x_0)$ をとると、$\varphi(x_0)$ はコンパクトなので部分列 $z^{k_j}\to y\in\varphi(x_0)$ があり、

$$\begin{aligned}\|y^{k_j}-y\| &\le \|y^{k_j}-z^{k_j}\|+\|z^{k_j}-y\| && \text{（三角不等式）}\\ &= d(y^{k_j})+\|z^{k_j}-y\|\to 0 && \text{（どちらの項も 0 に近づく）}\end{aligned}$$

です。

**ステップ2**　条件が成り立てば上半連続

対偶を示します。上半連続でないとすると、$\varphi(x_0)$ を含むある開集合 $V$ について、どんな $\delta=1/k$ をとっても、$\|x^k-x_0\|<1/k$ で $\varphi(x^k)\not\subseteq V$ となる $x^k$ があります。$y^k\in\varphi(x^k)\setminus V$ を選ぶと、$y^k$ の部分列が $y\in\varphi(x_0)\subseteq V$ に収束したとすると、$V$ は開集合なので部分列の点はいずれ $V$ に入るはずで、$y^k\notin V$ に矛盾します。よって条件は成り立ちません。　□

**数式の読み方：需要対応で読む**

- $\varphi$ を需要対応 $x(p,w)$ とすると、条件は「価格 $p^k$ が $p$ に近づくとき、そこでの需要 $y^k$ は（部分列をとれば）価格 $p$ での需要のどれかに近づく」と読めます。
- つまり、価格を少し変えても、需要が「価格 $p$ での需要からかけ離れた場所」に飛ぶことはない、ということです。需要が一つに決まるなら、これは需要関数の連続性そのものです。

---

**命題 4.18（閉グラフと上半連続性）**

1. $Y$ がコンパクトで、$\varphi:X\rightrightarrows Y$ のグラフが閉集合ならば、$\varphi$ はコンパクト値で上半連続である。
2. $\varphi$ が閉集合の値をとり上半連続ならば、グラフは閉集合である。

---

**証明**

**ステップ1**　性質1

$\varphi(x_0)$ は閉集合 $\mathrm{Gr}\,\varphi$ と $\{x_0\}\times Y$ の共通部分の「切り口」なので閉集合で、コンパクトな $Y$ に含まれるのでコンパクトです。$x^k\to x_0$、$y^k\in\varphi(x^k)$ とすると、$Y$ のコンパクト性から

部分列 $y^{k_j} \to y$ があり、$(x^{k_j}, y^{k_j}) \in \mathrm{Gr}\,\varphi$ でグラフは閉じているので $(x_0, y) \in \mathrm{Gr}\,\varphi$、つまり $y \in \varphi(x_0)$ です。補題から上半連続です。

**ステップ2**　性質2

$(x^k, y^k) \in \mathrm{Gr}\,\varphi$ が $(x_0, y)$ に収束するとします。$y \notin \varphi(x_0)$ なら、$\varphi(x_0)$ は閉集合なので、$y$ のまわりの小さな閉球 $\bar{B}$ と交わらない開集合 $V \supseteq \varphi(x_0)$（たとえば $\bar{B}$ の補集合）がとれます。上半連続性から十分大きな $k$ で $y^k \in \varphi(x^k) \subseteq V$ ですが、$y^k \to y$ なのでいずれ $y^k \in \bar{B}$ となり矛盾します。 □

**数式の読み方：存在定理での使い方**

- 角谷の不動点定理の仮定は「グラフが閉集合」で、値域がコンパクトなら性質1によって上半連続性と同じことです。
- 図 4.2 の (a) のグラフは閉じていますが、(b) のグラフは白い縦線の部分が欠けていて閉じていません。

**補題 4.19（下半連続性の点列による特徴づけ）**

$\varphi : X \rightrightarrows Y$ が $x_0$ で下半連続であることと、次の条件は同値である。

> $x^k \to x_0$（$x^k \in X$）と $y \in \varphi(x_0)$ に対して、$y^k \in \varphi(x^k)$ で $y^k \to y$ となる点列が存在する。

**証明**　各 $m$ について、開集合 $B_{1/m}(y)$ は $\varphi(x_0)$ と交わるので、下半連続性から $\delta_m > 0$ があり、$\|x - x_0\| < \delta_m$ なら $\varphi(x) \cap B_{1/m}(y) \neq \emptyset$ です。$x^k \to x_0$ なので、番号 $K_1 < K_2 < \cdots$ を、$k \geq K_m$ で $\|x^k - x_0\| < \delta_m$ となるようにとれます。$K_m \leq k < K_{m+1}$ の $k$ については $y^k \in \varphi(x^k) \cap B_{1/m}(y)$ を選び、$k < K_1$ では $y^k \in \varphi(x^k)$ を任意に選びます。すると $k \geq K_m$ で $\|y^k - y\| < 1/m$ なので $y^k \to y$ です。

逆向きは対偶を示します。下半連続でないとすると、$\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$ となる開集合 $V$ と、$\|x^k - x_0\| < 1/k$ かつ $\varphi(x^k) \cap V = \emptyset$ となる $x^k$ があります。$y \in \varphi(x_0) \cap V$ をとります。$y^k \in \varphi(x^k)$ がどのように選ばれても $y^k \notin V$ です。$y^k \to y$ とすると、$V$ は開集合で $y \in V$ なので、十分大きな $k$ で $y^k \in V$ となり矛盾します。よって条件は成り立ちません。 □

**数式の読み方：2つの特徴づけの対比**

- 上半連続：近くの点での値から点を選ぶと、その点は（部分列をとれば）$\varphi(x_0)$ に集まる。つまり「近くの値は $\varphi(x_0)$ からはみ出さない」。
- 下半連続：$\varphi(x_0)$ のどの点にも、近くの点での値から近づいていける。つまり「$\varphi(x_0)$ のどの点も、近くの値から急に消えない」。

## 4.9 ベルジュの最大値定理

パラメータ（価格や所得、相手の戦略）に応じて制約集合が変わる最適化問題で、最大値と最適解がパラメータにどう依存するかを教えてくれるのが次の定理です。

**定理 4.20（ベルジュの最大値定理）**

$\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$、$X \subseteq \mathbb{R}^n$ とし、$f : X \times \Theta \to \mathbb{R}$ が連続、$C : \Theta \rightrightarrows X$ が連続（上半連続かつ下半連続）でその値がすべて空でないコンパクト集合であるとする。このとき

$$V(\theta) = \max_{x \in C(\theta)} f(x, \theta) \qquad \text{（最大値関数）}$$

$$x^*(\theta) = \arg\max_{x \in C(\theta)} f(x, \theta) \qquad \text{（最適解の対応）}$$

について、$V$ は連続関数であり、$x^*$ は空でないコンパクト値の上半連続な対応である。

**証明のアイデア**

鍵になるのは次の主張です。「$\theta^k \to \theta$ のとき、$\theta^k$ での最適解 $x^k$ の部分列は、$\theta$ での最適解に収束する」。$x^k$ が $C(\theta)$ のどこかに集まることは $C$ の上半連続性から、集まった先が $\theta$ での最適解であることは $C$ の下半連続性（$\theta$ での任意の候補 $z$ に、$\theta^k$ での候補で近づける）と $f$ の連続性から分かります。この主張から、$x^*$ の上半連続性も $V$ の連続性も導かれます。

**証明**

**ステップ1**　値は空でないコンパクト集合

$C(\theta)$ は空でないコンパクト集合で $f(\cdot, \theta)$ は連続なので、ワイエルシュトラスの定理（定理 4.6）から $x^*(\theta)$ は空でなく、$V(\theta)$ が定まります。また $x^*(\theta) = \{x \in C(\theta) : f(x, \theta) \geq V(\theta)\}$ は、コンパクト集合 $C(\theta)$ の閉部分集合なのでコンパクトです。

**ステップ2**　鍵となる主張

$\theta^k \to \theta$、$x^k \in x^*(\theta^k)$ とします。$x^k \in C(\theta^k)$ で、$C$ は上半連続でコンパクト値なので、補題 4.17 から、部分列 $x^{k_j} \to \bar{x} \in C(\theta)$ があります。$\bar{x}$ が $\theta$ での最適解であることを示しま

す。任意の $z \in C(\theta)$ をとると、$C$ の下半連続性（補題 4.19）から、$z^k \in C(\theta^k)$ で $z^k \to z$ となる点列があります。$x^k$ は $\theta^k$ での最適解なので

$$f(x^{k_j}, \theta^{k_j}) \geq f(z^{k_j}, \theta^{k_j}) \qquad (z^{k_j} \text{ は } \theta^{k_j} \text{ での候補の一つ})$$
$$f(\bar{x}, \theta) \geq f(z, \theta) \qquad (j \to \infty、f \text{ の連続性})$$

です。$z$ は任意なので $\bar{x} \in x^*(\theta)$ です。

**ステップ3**　$x^*$ は上半連続

ステップ1と2から、$x^*$ はコンパクト値で、上半連続性の特徴づけの条件を満たします。

**ステップ4**　$V$ は連続

$V(\theta^k) \to V(\theta)$ でないとすると、ある $\varepsilon > 0$ と部分列で $|V(\theta^k) - V(\theta)| \geq \varepsilon$ となります。その部分列について $x^k \in x^*(\theta^k)$ をとると、ステップ2からさらに部分列で $x^{k_j} \to \bar{x} \in x^*(\theta)$ となり、$f$ の連続性から

$$V(\theta^{k_j}) = f(x^{k_j}, \theta^{k_j}) \to f(\bar{x}, \theta) = V(\theta)$$

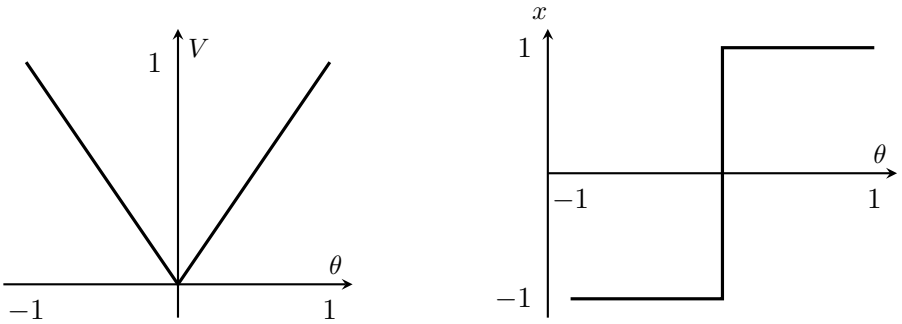
です。これは $|V(\theta^{k_j}) - V(\theta)| \geq \varepsilon$ に矛盾します。　□

**数式の読み方：ベルジュの定理の読み方**

- $V$ が連続とは「パラメータが少し変わっても、達成できる最大値は少ししか変わらない」こと、$x^*$ が上半連続とは「最適解の集合が急に膨らまない（近くのパラメータでの最適解は、最適解の近くにある）」ことです。
- 結論が「上半連続」にとどまり「連続」にならないのは、次の例のように、最適解の集合が急に縮むことがあるからです。

**図 4.3**　ベルジュの最大値定理の例

(a) 最大値関数 $V(\theta)$　　(b) 最適解の対応 $x^*(\theta)$




$f(x, \theta) = \theta x$、制約集合 $C(\theta) = [-1, 1]$（一定）。$\theta < 0$ で $x^* = \{-1\}$、$\theta = 0$ で $x^* = [-1, 1]$、$\theta > 0$ で $x^* = \{1\}$。最大値は $V(\theta) = |\theta|$。

**図の読み方**

1. (a) の最大値関数 $V(\theta) = |\theta|$ は、$\theta = 0$ で折れ曲がっていますが、途切れていません。ベルジュの定理のとおり連続です（微分可能とは限らないことにも注意してください）。

2. (b) の最適解の対応は、$\theta = 0$ で値が区間 $[-1, 1]$ に膨らみます。グラフは閉じていて上半連続ですが、0 を少しでも離れると値が端点に「縮む」ので、下半連続ではありません。

3. この形は、第11章の最適反応対応（相手の戦略が変わると最適な戦略が切り替わる）とまったく同じです。

**補足：経済学での使いどころ　ベルジュの定理の当てはめ方**

大学院ミクロでベルジュの定理を使うときは、次の対応表を作るのが定石です。

| 場面 | パラメータ $\theta$ | 制約 $C(\theta)$ | 結論の使い道 |
|---|---|---|---|
| 効用最大化 | $(p, w)$ | 予算集合 $B(p, w)$ | $v$ の連続性、需要の上半連続性 |
| 支出最小化 | $(p, u)$ | $\{x : u(x) \geq u\}$（制限後） | $e$ の連続性 |
| 利潤最大化 | $p$ | 生産集合 $Y$（制限後） | $\pi$ の連続性、供給の上半連続性 |
| ナッシュ均衡 | 相手の戦略 $\sigma_{-i}$ | 自分の戦略集合 $\Sigma_i$（一定） | 最適反応の閉グラフ性 |

ゲーム理論では制約集合がパラメータによらず一定なので、制約対応の連続性は自動的に成り立ちます。一方、消費者理論では予算対応の連続性を確かめる必要があり、ここで $p \gg 0$ が効いてきます（命題 4.21）。

ベルジュの定理を消費者理論に当てはめるには、予算対応 $(p, w) \mapsto B(p, w)$ が連続であることを確かめる必要があります。

**命題 4.21（予算対応の連続性）**

$\Theta = \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$ 上の予算対応 $(p, w) \mapsto B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\}$ は、空でないコンパクト値の連続な対応である。

**証明のアイデア**

上半連続性は「近くの価格での予算集合からはみ出さない」ことで、価格が正なら予算集合が一様に有界なので、部分列をとって極限に移れます。下半連続性は「今の予算集合のどの組にも、近くの価格で買える組で近づける」ことで、組 $x$ を少しだけ縮めた $t_k x$ を使います。どちらの議論でも、すべての価格が正であることが効いています。

**証明**　$0 \in B(p,w)$ なので空でなく、命題 3.30 よりコンパクトです。$(p^k,w^k) \to (p,w)$（$(p^k,w^k)\in\Theta$）とし、$m=\min_\ell p_\ell>0$ とおきます。

**ステップ1**　上半連続性

$x^k \in B(p^k,w^k)$ とします。十分大きな $k$ で $p^k_\ell \ge m/2$（すべての $\ell$）かつ $w^k \le w+1$ なので、命題 3.30 の証明と同じく $0 \le x^k_\ell \le w^k/p^k_\ell \le 2(w+1)/m$ です。有界なので、定理 3.22 より部分列 $x^{k_j} \to x$ があります。$x \ge 0$ で、

$$
\begin{aligned}
|p^{k_j}\cdot x^{k_j} - p\cdot x| &\le |p^{k_j}\cdot(x^{k_j}-x)| + |(p^{k_j}-p)\cdot x| && \text{（三角不等式）}\\
&\le \|p^{k_j}\|\,\|x^{k_j}-x\| + \|p^{k_j}-p\|\,\|x\| \to 0 && \text{（定理 3.2、}\|p^{k_j}\|\text{ は有界）}
\end{aligned}
$$

なので、$p^{k_j}\cdot x^{k_j} \le w^{k_j}$ の極限をとって $p\cdot x \le w$（補題 3.14 の3）、つまり $x\in B(p,w)$ です。補題 4.17 より上半連続です。

**ステップ2**　下半連続性

$x\in B(p,w)$ をとります。$x=0$ なら $y^k=0$ とすればよいので、$x\neq 0$ とします。$p\gg 0$ なので $p\cdot x>0$ で、補題 3.14 の2より十分大きな $k$ で $p^k\cdot x>0$ です。そのような $k$ で

$$
t_k=\min\Big\{1,\ \frac{w^k}{p^k\cdot x}\Big\},\qquad y^k=t_k x
$$

とおくと、$y^k\ge 0$ で $p^k\cdot y^k \le w^k$ なので $y^k\in B(p^k,w^k)$ です（それ以前の $k$ では $y^k=0$ とします）。$w^k/p^k\cdot x \to w/p\cdot x \ge 1$ なので、任意の $\varepsilon>0$ について十分大きな $k$ で $1-\varepsilon<t_k\le 1$、つまり $t_k\to 1$ で、$\|y^k-x\|=(1-t_k)\|x\|\to 0$ です。補題 4.19 より下半連続です。　□

**数式の読み方：$p\gg 0$ はどこで効いたか**

ステップ1の有界性（$x_\ell \le w/p_\ell$）と、ステップ2の $p\cdot x>0$ の2か所です。ある財の価格が 0 になると、その財はいくらでも買えるので、予算集合はコンパクトでなくなり、上半連続性も成り立ちません。

---

**系 4.22（間接効用関数と需要の連続性）**

$u:\mathbb{R}^L_+\to\mathbb{R}$ が連続ならば、間接効用関数 $v(p,w)=\max_{x\in B(p,w)}u(x)$ は $\mathbb{R}^L_{++}\times\mathbb{R}_+$ 上で連続で、需要対応 $x(p,w)$ は空でないコンパクト値の上半連続な対応である。さらに需要が一つに決まるなら、需要関数 $x(p,w)$ は連続である。

---

**証明**　$\theta=(p,w)$、$C(\theta)=B(p,w)$、$f(x,\theta)=u(x)$ として、命題 4.21 とベルジュの定理（定理 4.20）を当てはめます。需要が一つに決まる場合、$(p^k,w^k)\to(p,w)$ なら、補題 4.17 より $x(p^k,w^k)$ のどの部分列も、さらに部分列をとれば $x(p,w)$ に収束します。これは

$x(p^k, w^k) \to x(p, w)$ を意味します（そうでなければ、$\|x(p^k, w^k) - x(p, w)\| \geq \varepsilon$ となる部分列がとれて矛盾します）。 □

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- ワイエルシュトラスの定理 → 効用最大化・支出最小化・利潤最大化の解の存在。
- 中間値の定理 → 1つの市場の均衡価格の存在、効用関数の存在定理。
- 一様連続性 → 格子による数値近似の誤差評価。
- 効用関数の存在定理 →「連続で単調な選好」から連続な効用関数を使ってよい根拠。
- ベルジュの定理（最大値関数の連続性）→ 間接効用関数・支出関数・利潤関数の連続性。
- ベルジュの定理（最適解の上半連続性）→ 需要・供給・超過需要の連続性、最適反応対応の閉グラフ性（ナッシュ均衡の存在）。
- 上半連続と下半連続の違い → 最適反応が「切り替わる」点での振る舞い。

**要点**

- 連続性の $\varepsilon$-$\delta$ による定義と点列による定義は同値で、証明では点列が便利です。
- 連続関数の「$\leq$」の集合は閉集合、「$<$」の集合は開集合です。
- コンパクト集合の連続像はコンパクトで、そこから最大値の存在（ワイエルシュトラス）が従います。コンパクト集合上の連続関数は一様連続です。
- 合理的・連続・単調な選好は、連続な効用関数で表せます。
- 対応の上半連続性は「近くの値から選んだ点の部分列が $\varphi(x_0)$ に集まる」、下半連続性は「$\varphi(x_0)$ の点に近くの値から近づける」と言い換えられ、値域がコンパクトなら上半連続 $\Leftrightarrow$ 閉グラフです。
- ベルジュの最大値定理：制約対応が連続でコンパクト値なら、最大値関数は連続、最適解の対応は上半連続です。

**次の章へ**　最適解の集合が「凸集合」になるかどうかは、角谷の不動点定理を使うための決定的な条件です。次の章では、凸集合と準凹関数、そして射影定理と分離超平面定理を学びます。

**大学院とのつながり**　ナッシュ均衡の存在証明では、最適反応対応が閉グラフをもつことを、ベルジュの最大値定理（またはこの章のステップ2と同じ議論）で示します。

第5章

# 凸性と分離超平面定理

**ここまでの流れ**　前の章で、ワイエルシュトラスの最大値定理とベルジュの最大値定理を学び、最適解が存在し、パラメータに対して上半連続であることを示しました。

**前提知識**　第2章の内積と一次独立（補題 2.5）。第3章の閉集合の点列による特徴づけ（定理 3.15）、内部・閉包の性質（命題 3.18）、ハイネ＝ボレルの定理（定理 3.28）。第4章の連続性とワイエルシュトラスの定理。

**この章の問い**　最適な消費はいつ一つに決まり、最適解の集合はいつ「凸」になるのでしょうか。また、効率的な配分を市場価格で実現できるのはなぜでしょうか。

**この章で分かること**　凸集合とその作り方、カラテオドリの定理、凹関数と接平面の不等式、ジェンセンの不等式、凹関数の連続性、準凹関数と需要の一意性、射影定理、分離超平面定理と支持超平面定理、ファルカスの補題。

## 5.1　この章の見取り図

凸性は、存在定理の中で2つの役割を果たします。1つ目は、角谷の不動点定理の仮定「対応の値が凸集合」を満たすための性質です（第10章）。2つ目は、分離超平面定理を通じて「価格」を作り出す性質です（厚生経済学の第二基本定理、第11章）。

この章の後半の主役は射影定理です。「閉凸集合には、どの点からも最も近い点がただ一つあり、その点は直角の条件で特徴づけられる」という定理で、ここから分離超平面定理、支持超平面定理、そして第10章の不動点定理の一般化に使う「射影の連続性」が、すべて導かれます。

## 5.2　凸集合

**定義 5.1（凸結合・凸集合）**

$x, y \in \mathbb{R}^n$ と $\lambda \in [0,1]$ について、$\lambda x + (1-\lambda) y$ を $x$ と $y$ の凸結合という。集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ が、任意の $x, y \in A$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ について $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$ を満たすとき、$A$ を凸集合という。

**数式の読み方**

- $\lambda$ を 0 から 1 まで動かすと、凸結合は $y$ から $x$ まで線分の上を動きます。凸集合とは「どの2点を結ぶ線分も集合からはみ出さない」集合です。
- 円の内側や三角形は凸集合、三日月形やドーナツ形は凸集合ではありません。

---

**命題 5.2（凸集合の作り方）**

1. 凸集合をいくつ（無限個でも）共通部分をとっても、凸集合である。
2. $A, B$ が凸集合ならば、和 $A+B=\{a+b : a\in A,\ b\in B\}$ とスカラー倍 $tA=\{ta : a\in A\}$ は凸集合である。
3. 凸集合の閉包は凸集合である。

---

**証明**

**ステップ1**　共通部分

$x, y$ がすべての $A_\lambda$ に入れば、凸結合もすべての $A_\lambda$ に入ります。

**ステップ2**　和

$a+b,\ a'+b'\in A+B$ について

$$\lambda(a+b)+(1-\lambda)(a'+b')=\big(\lambda a+(1-\lambda)a'\big)+\big(\lambda b+(1-\lambda)b'\big)\qquad\text{（項を並べかえる）}$$

で、括弧の中はそれぞれ $A$ と $B$ に入るので、全体は $A+B$ に入ります。スカラー倍も同様です。

**ステップ3**　閉包

閉包の点は $C$ の点列の極限です（命題 3.18 の性質3）。$c^k\to c$、$d^k\to d$（$c^k, d^k\in C$）なら、$\lambda c^k+(1-\lambda)d^k\in C$ で、その極限 $\lambda c+(1-\lambda)d$ は閉包に入ります。　□

**補足：経済学での使いどころ　集合の和**

集合の和 $A+B$ は、経済全体を考えるときに欠かせない操作です。経済全体の生産集合は各企業の生産集合の和 $Y=Y_1+\cdots+Y_J$、第二基本定理の証明で使う「より良い配分に必要な総量の集合」も各消費者の集合の和 $V=V_1+\cdots+V_I$ です。この命題の2から、個々の集合が凸なら全体も凸になり、分離超平面定理が使えるようになります。「個人の凸性が、経済全体の凸性に受け継がれる」ことが、厚生経済学の基本定理を支えているのです。

**命題 5.3（予算集合は凸集合）**

$B(p,w)=\{x\in\mathbb{R}^L_+ : p\cdot x\le w\}$ は凸集合である。

**証明**　$\mathbb{R}^L_+$ は凸集合で、半空間 $\{x : p\cdot x\le w\}$ も凸集合（$p\cdot(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda\, p\cdot x+(1-\lambda)\,p\cdot y\le w$）なので、その共通部分も凸集合です。 □

2点の凸結合を、有限個の点に広げておきます。

**定義 5.4（一般の凸結合・凸包）**

$x^1,\dots,x^m$ と、$\lambda_j\ge 0$、$\sum_j\lambda_j=1$ を満たす重みについて、$\sum_j\lambda_j x^j$ を凸結合という。集合 $A$ を含む最小の凸集合を $A$ の凸包といい $\mathrm{co}\,A$ と書く。

**命題 5.5（凸集合は凸結合で閉じている）**

$A$ が凸集合ならば、$A$ の有限個の点の凸結合はすべて $A$ に入る。

**証明**　点の個数 $m$ についての数学的帰納法で示します。$m=1,2$ は定義そのものです。$m$ 個で成り立つとし、$m+1$ 個の点の凸結合 $z=\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j x^j$ を考えます。$\lambda_{m+1}=1$ なら $z=x^{m+1}\in A$ です。そうでなければ $s=1-\lambda_{m+1}>0$ として

$$z=s\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{s}x^j+\lambda_{m+1}x^{m+1}\qquad\text{（最初の } m \text{ 項を } s \text{ でくくる）}$$

と書けます。重み $\lambda_j/s$（$j\le m$）は非負で和が 1 なので、帰納法の仮定から $y=\sum_{j\le m}(\lambda_j/s)x^j\in A$ です。すると $z=sy+(1-s)x^{m+1}$ は2点の凸結合なので $A$ に入ります。 □

凸包 $\mathrm{co}\,A$ は、$A$ の有限個の点の凸結合をすべて集めたものに一致します（それらの全体は凸集合で $A$ を含み、命題から $A$ を含む凸集合はそれらを含むからです）。何個の点を使えば足りるかを教えるのが、次の定理です。

**定理 5.6（カラテオドリの定理）**

$A\subseteq\mathbb{R}^n$ の凸包の点は、$A$ の高々 $n+1$ 個の点の凸結合で表せる。

**証明**

**方針**　$n+2$ 個以上の点を使っている表し方から、重みの一つを 0 にして点を1つ減らせることを示します。

$z=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x^j$（$x^j\in A$、$\lambda_j>0$、$\sum_j\lambda_j=1$）で $m\ge n+2$ とします。$m-1\ge n+1$ 個のベクトル $x^2-x^1,\dots,x^m-x^1$ は $\mathbb{R}^n$ の中にあるので、補題 2.5 より一次従属です。

したがって、すべてが 0 ではない $\mu_2, \dots, \mu_m$ で $\sum_{j\geq 2} \mu_j (x^j - x^1) = 0$ となるものがあり、$\mu_1 = -\sum_{j\geq 2} \mu_j$ とおくと

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j x^j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 0$$

です。和が 0 で全部は 0 でないので、$\mu_j > 0$ となる $j$ があります。$t = \min\{\lambda_j/\mu_j : \mu_j > 0\} > 0$ として $\lambda'_j = \lambda_j - t\mu_j$ とおくと、

- $\lambda'_j \geq 0$（$\mu_j > 0$ なら $t$ の定め方から、$\mu_j \leq 0$ なら明らか）で、最小値を与える $j$ では $\lambda'_j = 0$、
- $\sum_j \lambda'_j = \sum_j \lambda_j - t\sum_j \mu_j = 1$、$\sum_j \lambda'_j x^j = z - t\sum_j \mu_j x^j = z$

です。重みが 0 の点を除くと、$z$ は $m-1$ 個の点の凸結合になります。これを $m \leq n+1$ になるまで繰り返します。 □

---

**系 5.7（コンパクト集合の凸包はコンパクト）**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ がコンパクトならば、$\operatorname{co} A$ はコンパクトである。

---

**証明**　$\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : \sum_j \lambda_j = 1\}$ とし、写像 $(\lambda, x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto \sum_j \lambda_j x^j$ を考えます。定義域 $\Delta \times A^{n+1}$ はコンパクト集合の直積なのでコンパクト（定理 3.29）、写像は連続で、定理 5.6 よりその像はちょうど $\operatorname{co} A$ です。命題 4.5 より $\operatorname{co} A$ はコンパクトです。 □

**補足：経済学での使いどころ**

混合戦略の期待利得や、くじの集合（確率の重みによる凸結合）を扱うとき、「有限個の点を混ぜたもの」の集合がコンパクトであることを保証します。また、非凸な選好をもつ多数の消費者がいる経済で「集計すると凸に近づく」ことを示す議論（シャプレー＝フォークマンの定理）の出発点でもあります。

## 5.3　凹関数と凸関数

**定義 5.8（凹関数・凸関数）**

凸集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上の関数 $f$ が、任意の $x, y \in X$ と $\lambda \in [0,1]$ について

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \;\geq\; \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{5.1}$$

を満たすとき凹関数という。不等号が逆向きのとき凸関数という。$x \neq y$、$\lambda \in (0,1)$ で常に強い不等号が成り立つとき、狭義凹（狭義凸）という。

**数式の読み方**

- 左辺は「混ぜ合わせた点での値」、右辺は「値を混ぜ合わせたもの」で、グラフ上の2点を結ぶ弦の高さです。凹関数とは、グラフが弦より上にある（山なりの）関数です。
- 経済学では、限界生産力が逓減する生産関数や、危険回避的な人のフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン効用関数が凹関数の代表例です。

微分可能な凹関数には、「グラフは接平面の下にある」という、最適化で何度も使う性質があります。

---

**命題 5.9（凹関数と接平面）**

$f$ が開凸集合 $X$ 上の微分可能な凹関数ならば、任意の $x, y \in X$ について

$$f(y) \le f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) \tag{5.2}$$

が成り立つ。

---

**証明**　$t \in (0, 1]$ について、凹性の定義で $\lambda = t$ とし、$x + t(y-x) = ty + (1-t)x$ に注意すると

$$\begin{aligned} f\big(x + t(y-x)\big) &\ge f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big) && \text{（凹性）} \\ \frac{f\big(x + t(y-x)\big) - f(x)}{t} &\ge f(y) - f(x) && \text{（}f(x)\text{ を移項し }t\text{ で割る）} \end{aligned}$$

です。$t \to 0$ とすると、左辺は方向 $y - x$ への方向微分 $\nabla f(x) \cdot (y-x)$ に収束するので、式 (5.2) が得られます。 □

**数式の読み方**

- 右辺は点 $x$ での接平面（1次近似）です。凹関数のグラフはどの接平面よりも下にあります。凸関数なら不等号が逆になります。
- 特に $\nabla f(x) = 0$ なら、すべての $y$ で $f(y) \le f(x)$ です。凹関数では「一階条件を満たす点は最大点」であり、第7章でKKT条件が十分条件になる理由はここにあります。

**補足：経済学での使いどころ　「直線の上か下か」という議論**

式 (5.2) の「凹関数は接線の下にある」という考え方は、大学院ミクロで形を変えて何度も現れます。支出関数は「最初の価格での組を買い続けたときの支出（直線）」の下にあるので凹関数で、その接点の傾きがヒックス需要になります（シェパードの補題）。利潤関数は逆に直線の上にあるので凸関数で、接点の傾きが供給になります（ホテリングの補題）。「最適化された値の関数は、最適化しないときの直線と接する」という一枚の絵を覚えておくと、これらの結果をまとめて理解できます。

凹性の定義は2点の混合についての不等式ですが、何個の点を混ぜても成り立ちます。

---

**定理 5.10（ジェンセンの不等式（有限個の場合））**

$f$ が凸集合 $X$ 上の凹関数ならば、$x^1, \dots, x^m \in X$ と $\lambda_j \geq 0$、$\sum_j \lambda_j = 1$ について

$$f\Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^j\Big) \;\geq\; \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(x^j)$$

が成り立つ。凸関数なら不等号は逆向きである。

---

**証明**　$m$ についての帰納法で示します。$m = 1$ は明らかで、$m = 2$ は凹性の定義です。$m$ 個で成り立つとし、$\lambda_{m+1} < 1$ の場合を考えます（$\lambda_{m+1} = 1$ なら明らか）。凸集合は凸結合で閉じている命題の証明と同じく、$s = 1 - \lambda_{m+1}$、$y = \sum_{j \leq m} (\lambda_j / s) x^j \in X$ とおくと

$$\begin{aligned} f\Big(\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j x^j\Big) &= f\big(sy + \lambda_{m+1} x^{m+1}\big) \geq s f(y) + \lambda_{m+1} f(x^{m+1}) && \text{（凹性の定義）} \\ &\geq s \sum_{j \leq m} \frac{\lambda_j}{s} f(x^j) + \lambda_{m+1} f(x^{m+1}) && \text{（帰納法の仮定）} \end{aligned}$$

で、右辺は $\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(x^j)$ です。 □

**補足：経済学での使いどころ**

$\lambda_j$ を状態 $j$ の確率、$x^j$ をその状態での消費とみなすと、左辺は「平均の消費の効用」、右辺は「効用の期待値」です。効用関数が凹なら「確実な平均を受け取る方が、くじを受け取るより良い」、つまり**危険回避**を表します。不確実性下の選択、保険、予備的貯蓄、資産価格のリスク・プレミアムは、すべてこの不等式から始まります。

凹関数は、定義域の内部ではおのずと連続になります。1変数の場合に証明します。

**命題 5.11（凹関数の連続性）**

$f$ が開区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上の凹関数ならば、$f$ は $I$ 上で連続である。

**証明**

**ステップ1**　割線の傾きは右へ行くほど小さい

$a < x < y$ を $I$ の点とします。$x = \lambda a + (1-\lambda)y$、$\lambda = (y-x)/(y-a) \in (0,1)$ と書けるので、凹性より $f(x) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(y)$ です。これを整理すると

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\geq\; \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \;\geq\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

が得られます（両端を $x-a$、$y-x$ で割って移項します）。

**ステップ2**　連続性

$x_0 \in I$ とし、$I$ は開区間なので $a < x_0 < b$ となる $a, b \in I$ をとります。$x_0 < x < b$ について、ステップ1を $a < x_0 < x$ と $x_0 < x < b$ に使うと、$x_0$ から $x$ への割線の傾き $s(x) = \big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)$ は

$$\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} \;\leq\; s(x) \;\leq\; \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$$

を満たします。したがって、$x$ によらない定数 $M$ で $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$ となり、$x \downarrow x_0$ で $f(x) \to f(x_0)$ です。$a < x < x_0$ の側も同様です。　□

**数式の読み方：定理の読み方**

- 凹関数のグラフは、割線より上、延長した割線より下にはさまれているので、急に跳ぶことができません。
- 「内部で」が大切です。$[0,1]$ 上で $f(0) = -1$、$x > 0$ で $f(x) = 0$ とした関数は凹関数ですが、端点 $0$ で不連続です。
- $\mathbb{R}^n$ の開凸集合上の凹関数も連続であることが知られています（本書では証明しません）。

**補足：経済学での使いどころ**

動的計画法で価値関数が凹であることを示せれば、内部での連続性は自動的に従います。また、凹な生産関数や効用関数については、連続性を別に仮定しなくても、内部では最大値の存在定理が使えます。

## 5.4　準凹関数

効用関数については、凹性は強すぎる仮定です。効用関数は選好の順序だけを表すので、単調増加な変換（たとえば2乗や対数）をしても同じ選好を表しますが、凹性はこの変換で保たれないからです。そこで、変換しても保たれる、より弱い性質を使います。

**定義 5.12（準凹関数）**

凸集合 $X$ 上の関数 $f$ が、任意の $x, y \in X$ と $\lambda \in [0,1]$ について

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \;\geq\; \min\{f(x), f(y)\} \tag{5.3}$$

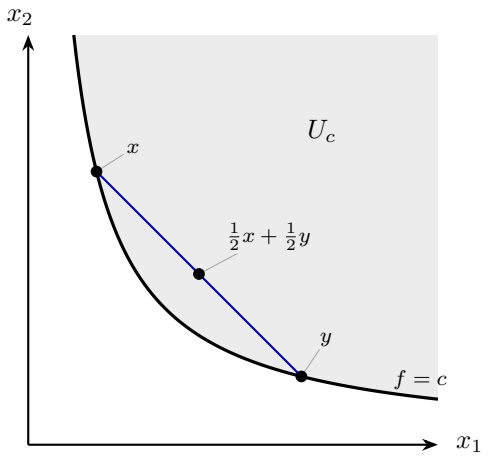
を満たすとき準凹関数という。$x \neq y$、$\lambda \in (0,1)$ で常に強い不等号が成り立つとき、狭義準凹という。

**命題 5.13（準凹性と上方集合）**

$f$ が準凹関数であることと、任意の $c \in \mathbb{R}$ について上方集合 $U_c = \{x \in X : f(x) \geq c\}$ が凸集合であることは同値である。

**証明（準凹ならば上方集合は凸）**　$x, y \in U_c$ とすると $f(x) \geq c$、$f(y) \geq c$ なので、式 (5.3) から $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \geq c$、つまり $\lambda x + (1-\lambda)y \in U_c$ です。逆向きは、$c = \min\{f(x), f(y)\}$ とおけば同様に示せます。　□

**図 5.1**　準凹関数の上方集合




$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$、$c = 4$。$x = (1,4)$、$y = (4,1)$ はともに $f = 4$、中点 $(2.5, 2.5)$ では $f = 6.25$。

**図の読み方**

1. 黒い曲線は $f = c$ となる点の集まり（無差別曲線）で、灰色の領域がその上側、上方集合 $U_c$ です。
2. 曲線上の2点 $x, y$ を結ぶ青い線分は、灰色の領域の中に入っています。上方集合が凸集合なので、$f$ は準凹です。
3. 中点では $f$ の値が端点より大きくなっています。これは「極端な組よりも、混ぜ合わせた組の方を好む」という、選好の凸性の表れです。

**命題 5.14（凹関数は準凹関数）**

凹関数は準凹関数である。

**証明**　式 (5.1) から

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &\geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) && \text{（凹性）} \\ &\geq \lambda \min\{f(x), f(y)\} + (1-\lambda)\min\{f(x), f(y)\} && \text{（最小値で抑える）} \\ &= \min\{f(x), f(y)\} \end{aligned}$$

となります。 □

**補足：逆は成り立たない**

図 5.1 の $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ は準凹ですが凹ではありません。たとえば $x = (0,0)$、$y = (2,2)$、$\lambda = \frac{1}{2}$ とすると、中点 $(1,1)$ での値は 1、値の平均は $(0+4)/2 = 2$ で、式 (5.1) が成り立ちません。一方、単調増加変換した $\sqrt{x_1 x_2}$ は凹関数です。準凹性は単調増加変換で保たれますが、凹性は保たれません。

効用関数が狭義準凹であることは、需要が一つに決まることを保証します。

**命題 5.15（需要の一意性）**

$u$ が狭義準凹ならば、効用最大化問題 $\max_{x \in B(p,w)} u(x)$ の解は（存在すれば）ただ一つである。

**証明**

**方針**　解が2つあると仮定し、その中点がより良い組になることを示して矛盾を導きます。

$x \neq y$ がともに解で、$u(x) = u(y) = u^*$ とします。予算集合は凸集合なので、中点 $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ も予算集合に入ります。狭義準凹性から $u(z) > \min\{u(x), u(y)\} = u^*$ とな

り、$u^*$ が最大値であることに矛盾します。 □

**数式の読み方：凸性から角谷の不動点定理へ**

- 狭義凸でなく凸なだけの選好でも、同じ議論で「需要の集合は凸集合」になります（2つの解の凸結合も解）。
- この「最適解の集合は凸」という性質こそが、角谷の不動点定理の仮定「対応の値は凸集合」を満たすための鍵です。一般均衡では消費者の需要、ゲーム理論では最適反応について、この性質を確かめることになります（第11章）。
- 選好の凸性 → 最適解の集合の凸性 → 不動点定理が使える → 均衡が存在する、という鎖を意識してください。

## 5.5 射影定理

ここからが、この章の後半の主役です。閉凸集合 $C$ と、その外にあるかもしれない点 $x$ について、「$C$ の中で $x$ に最も近い点」を考えます。

**定理 5.16（射影定理）**

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ を空でない閉凸集合とし、$x \in \mathbb{R}^n$ とする。

1. （存在と一意性）$\|x - c\|$ を最小にする $c^* \in C$ がただ一つ存在する。これを $x$ の $C$ への射影といい $P_C(x)$ と書く。
2. （特徴づけ）$c^* \in C$ が $P_C(x)$ であることと、すべての $c \in C$ について

$$(x - c^*) \cdot (c - c^*) \leq 0 \tag{5.4}$$

   が成り立つことは同値である。
3. （非拡大性）任意の $x, y$ について $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$。特に $P_C$ は連続である。

**数式の読み方：特徴づけの意味**

- 内積 $u \cdot v \leq 0$ は、2つのベクトルのなす角が $90°$ 以上であることを表します。式 (5.4) は、「$c^*$ から $x$ へ向かうベクトルと、$c^*$ から $C$ の任意の点へ向かうベクトルのなす角は、直角以上」という意味です。
- 言い換えると、$c^*$ を通り $x - c^*$ に垂直な超平面を引くと、$C$ はまるごとその反対側にあります（図 5.2）。これが分離超平面定理の正体です。

**証明**

**ステップ1**　存在

$c_1 \in C$ を一つとり、$r = \|x - c_1\|$ とします。最も近い点は、$C$ と閉球 $\{c : \|x - c\| \le r\}$ の共通部分の中で探せば十分です。この集合は有界な閉集合なのでコンパクトで、連続関数 $c \mapsto \|x - c\|$ はそこで最小値をとります（ワイエルシュトラス）。

**ステップ2**　最小点ならば式 (5.4)

$c^*$ を最小点とし、$c \in C$、$t \in (0, 1]$ とすると、凸性から $c^* + t(c - c^*) \in C$ です。最小性から

$$\begin{aligned} \|x - c^*\|^2 &\le \left\|(x - c^*) - t(c - c^*)\right\|^2 && (c^* \text{ の最小性}) \\ &= \|x - c^*\|^2 - 2t\,(x - c^*) \cdot (c - c^*) + t^2 \|c - c^*\|^2 && (\text{展開}) \end{aligned}$$

です。$\|x - c^*\|^2$ を消して $2t$ で割ると $(x - c^*) \cdot (c - c^*) \le \frac{t}{2}\|c - c^*\|^2$ で、$t \to 0$ とすれば式 (5.4) です。

**ステップ3**　式 (5.4) ならば最小点

任意の $c \in C$ について

$$\begin{aligned} \|x - c\|^2 &= \left\|(x - c^*) - (c - c^*)\right\|^2 && (c^* \text{ を足して引く}) \\ &= \|x - c^*\|^2 - 2\,(x - c^*) \cdot (c - c^*) + \|c - c^*\|^2 && (\text{展開}) \\ &\ge \|x - c^*\|^2 && (\text{式 (5.4) から後ろ2項は非負}) \end{aligned}$$

です。

**ステップ4**　一意性

$c_1, c_2$ がともに最小点なら、式 (5.4) を $c_1$ について $c = c_2$ で、$c_2$ について $c = c_1$ で書いて足すと

$$\begin{aligned} (x - c_1) \cdot (c_2 - c_1) + (x - c_2) \cdot (c_1 - c_2) &\le 0 && (\text{2つの不等式の和}) \\ (c_2 - c_1) \cdot (c_2 - c_1) &\le 0 && (x \text{ の項が打ち消し合う}) \end{aligned}$$

なので $\|c_2 - c_1\|^2 \le 0$、つまり $c_1 = c_2$ です。

**ステップ5**　非拡大性

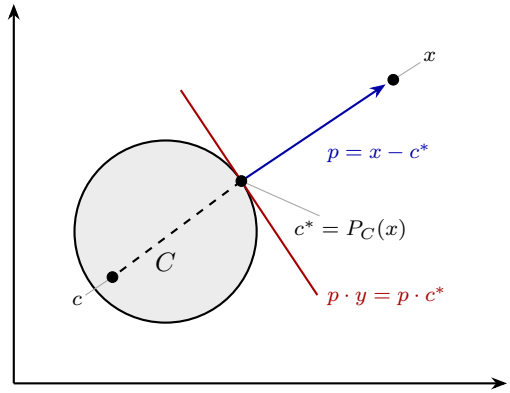
$a = P_C(x)$、$b = P_C(y)$ とします。式 (5.4) を $x$ について $c = b$ で、$y$ について $c = a$ で書

いて足すと

$$
\begin{aligned}
(x-a)\cdot(b-a)+(y-b)\cdot(a-b) &\le 0 && \text{（2つの不等式の和）}\\
\|a-b\|^2 &\le (x-y)\cdot(a-b) && \text{（整理）}\\
&\le \|x-y\|\,\|a-b\| && \text{（コーシー＝シュワルツの不等式）}
\end{aligned}
$$

です。$a \neq b$ なら両辺を $\|a-b\|$ で割って結論が得られます。 □

**図 5.2**　射影定理と分離超平面




$C$ は中心 $(2,2)$、半径 1.2 の円板、$x=(5,4)$。射影は $c^* = (2,2) + 1.2\cdot(3,2)/\sqrt{13} \approx (3.00, 2.67)$。

**図の読み方**

1. 灰色の円板が閉凸集合 $C$、点 $x$ はその外にあります。$C$ の中で $x$ に最も近い点が $c^*$ です。
2. 青い矢印 $p = x - c^*$ と、$c^*$ から $C$ の別の点 $c$ へ向かう破線のなす角は、直角以上になっています。これが式 (5.4) です。
3. 赤い直線は $c^*$ を通り $p$ に垂直な直線で、$C$ はその左下側に、$x$ は右上側にあります。この直線が $x$ と $C$ を分ける「分離超平面」です。

**補足：経済学での使いどころ　射影はどこで使われるか**

射影定理は経済数学の中でも特に応用の広い定理です。

- 分離超平面定理（次の節）：射影の方向 $x - c^*$ が、そのまま分離する超平面の法線ベクトル、つまり「価格」になります。
- 不動点定理の一般化（第10章）：射影 $P_C$ が連続であることを使って、単体で証明したブラウワーの定理を一般のコンパクト凸集合に広げます。
- 計量経済学：最小二乗法は、データのベクトルを説明変数が張る部分空間（閉凸集合）に射影することにほかならず、式 (5.4) は「残差は説明変数と直交する」という正規方程式になります。

## 5.6　分離超平面定理

**定義 5.17（超平面と半空間）**

$p \in \mathbb{R}^n$（$p \neq 0$）と $c \in \mathbb{R}$ について、$H = \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x = c\}$ を超平面という。$\{x : p \cdot x \leq c\}$ と $\{x : p \cdot x \geq c\}$ を、$H$ が定める半空間という。

**数式の読み方**

- $\mathbb{R}^2$ では超平面は直線、$\mathbb{R}^3$ では平面です。予算線 $p \cdot x = w$ は超平面の例です。
- $p$ は超平面に垂直なベクトル（法線ベクトル）で、$p \cdot x$ は「$p$ の方向にどれだけ進んでいるか」を表します。$p$ を価格と見ると、$p \cdot x$ は支出額です。

**定理 5.18（分離超平面定理：点と閉凸集合）**

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ を空でない閉凸集合、$x_0 \notin C$ とする。このとき、ある $p \neq 0$ が存在して、すべての $c \in C$ について $p \cdot c < p \cdot x_0$ が成り立つ。

**証明**　$c^* = P_C(x_0)$、$p = x_0 - c^*$ とおきます。$x_0 \notin C$ なので $p \neq 0$ です。射影の特徴づけ (5.4) より、すべての $c \in C$ で $p \cdot (c - c^*) \leq 0$、つまり $p \cdot c \leq p \cdot c^*$ です。また

$$p \cdot x_0 - p \cdot c^* = p \cdot (x_0 - c^*) = \|p\|^2 > 0 \qquad (p = x_0 - c^* \neq 0)$$

なので、$p \cdot c \leq p \cdot c^* < p \cdot x_0$ です。　□

次に、点が集合の「境界」にある場合を考えます。そのために、凸集合の内部についての補題を準備します。

**補題 5.19（凸集合の閉包の内部）**

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ を内点をもつ凸集合とする。

1. $c_0 \in \operatorname{int} C$、$y \in \operatorname{cl} C$、$0 \le \lambda < 1$ ならば、$(1-\lambda)c_0 + \lambda y \in \operatorname{int} C$ である。
2. $\operatorname{int}(\operatorname{cl} C) = \operatorname{int} C$ である。

**証明のアイデア**

内点 $c_0$ のまわりの開球を、閉包の点 $y$ に向かって縮めながら運ぶと、線分 $[c_0, y)$ の各点のまわりにも小さな開球が残ります（1）。$\operatorname{cl} C$ の内点 $x$ は、$c_0$ から $x$ を少し越えた先の閉包の点 $y$ と $c_0$ を結ぶ線分の上にあるので、1から $C$ の内点です（2）。

**証明**

**ステップ1**　性質1

$B_r(c_0) \subseteq C$ とし、$w = (1-\lambda)c_0 + \lambda y$ とおきます。$\lambda = 0$ なら明らかなので $\lambda > 0$ とします。$y$ は閉包の点なので、命題 3.18 の性質3より、$\|y' - y\| < (1-\lambda)r/(2\lambda)$ となる $y' \in C$ があります。$\|v - w\| < (1-\lambda)r/2$ とし、$c' = (v - \lambda y')/(1-\lambda)$ とおくと $v = (1-\lambda)c' + \lambda y'$ で、

$$\begin{aligned} \|c' - c_0\| &= \frac{\|v - \lambda y' - (1-\lambda)c_0\|}{1-\lambda} = \frac{\|(v-w) + \lambda(y-y')\|}{1-\lambda} && (w \text{ の定義}) \\ &< \frac{(1-\lambda)r/2 + (1-\lambda)r/2}{1-\lambda} = r && (\text{三角不等式}) \end{aligned}$$

なので $c' \in C$ です。$C$ は凸なので $v \in C$ で、$B_{(1-\lambda)r/2}(w) \subseteq C$、つまり $w \in \operatorname{int} C$ です。

**ステップ2**　性質2

$\operatorname{int} C \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl} C)$ は、$C \subseteq \operatorname{cl} C$ から明らかです。逆に $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl} C)$、$B_\varepsilon(x) \subseteq \operatorname{cl} C$ とし、$c_0 \in \operatorname{int} C$ をとります。$x = c_0$ なら終わりです。そうでなければ $\delta = \varepsilon/(2\|x - c_0\|)$、$y = x + \delta(x - c_0)$ とおくと、$\|y - x\| = \varepsilon/2$ なので $y \in \operatorname{cl} C$ で、

$$x = \frac{1}{1+\delta}\, y + \frac{\delta}{1+\delta}\, c_0 = (1-\lambda)c_0 + \lambda y, \qquad \lambda = \frac{1}{1+\delta} < 1$$

です。性質1より $x \in \operatorname{int} C$ です。 □

内点をもたない凸集合については、次の事実を使います。$C$ が $n+1$ 個の「一つの超平面に乗らない」点を含めば、それらが作る単体は $C$ に含まれ、内点をもちます。したがって、**内点をもたない凸集合は、ある超平面 $\{x : q \cdot x = \alpha\}$（$q \neq 0$）に含まれます**。この事実は、本書では証明しません。

**補足：凸でないと成り立たない**

$C = [0,1) \cup (1,2]$ は凸でなく、$\mathrm{cl}\, C = [0,2]$ なので $1 \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C)$ ですが、$1 \notin C$ です。凸集合は「穴が1点だけ空いている」ようなことが起こらない集合なのです。

**定理 5.20（支持超平面定理）**

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ を凸集合、$x_0$ を $C$ の内点でない点とする。このとき、ある $p \neq 0$ が存在して、すべての $c \in C$ について $p \cdot c \leq p \cdot x_0$ が成り立つ。

**証明のアイデア**

$x_0$ が $\mathrm{cl}\, C$ の外にあれば、点と閉凸集合の分離定理そのものです。$x_0$ が境界にあるときは、$\mathrm{cl}\, C$ の外から $x_0$ に近づく点列をとり、各点で分離超平面を引きます。法線ベクトルを長さ 1 にそろえると、それらは単位球面（コンパクト集合）の上にあるので、収束する部分列がとれます。その極限が、$x_0$ での支持超平面の法線ベクトルです。

**証明**

**ステップ0**　$C$ が内点をもたない場合

$C$ は超平面 $\{x : q \cdot x = \alpha\}$ に含まれます（上の事実）。$q \cdot x_0 \geq \alpha$ なら $p = q$、そうでなければ $p = -q$ とすれば、すべての $c \in C$ で $p \cdot c = \pm\alpha \leq p \cdot x_0$ です。以下、$C$ が内点をもつとします。

**ステップ1**　外から近づく点列

補題 5.19 の2から $x_0 \notin \mathrm{int}(\mathrm{cl}\, C)$ なので、どんな $k$ についても $B_{1/k}(x_0)$ は $\mathrm{cl}\, C$ に収まりません。$x^k \in B_{1/k}(x_0) \setminus \mathrm{cl}\, C$ を選ぶと、$x^k \to x_0$ です。

**ステップ2**　各点で分離する

$\mathrm{cl}\, C$ は空でない閉凸集合（命題「凸集合の作り方」の3）なので、定理 5.18 から、$\|p^k\| = 1$（長さで割って正規化）で、すべての $c \in \mathrm{cl}\, C$ について $p^k \cdot c < p^k \cdot x^k$ となる $p^k$ があります。

**ステップ3**　極限をとる

単位球面 $\{p : \|p\| = 1\}$ は有界な閉集合なのでコンパクトで、部分列 $p^{k_j} \to p$、$\|p\| = 1$ がとれます。各 $c \in C$ について $p^{k_j} \cdot c < p^{k_j} \cdot x^{k_j}$ の両辺の極限をとると、$p \cdot c \leq p \cdot x_0$ です（強い不等号は極限で弱い不等号になります）。$\|p\| = 1$ なので $p \neq 0$ です。　□

**定理 5.21（分離超平面定理：2つの凸集合）**

$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする。このとき、ある $p \neq 0$ と $c \in \mathbb{R}$ が存在して、すべての $a \in A$、$b \in B$ について $p \cdot a \leq c \leq p \cdot b$ が成り立つ。

**証明**

**方針**　2つの集合の「差」を作り、原点を支持超平面で分離します。

$D = A + (-1)B = \{a - b : a \in A,\, b \in B\}$ は、凸集合の作り方から凸集合です。$A \cap B = \emptyset$ なので $0 \notin D$、特に $0$ は $D$ の内点ではありません。支持超平面定理から、ある $p \neq 0$ で、すべての $a \in A$、$b \in B$ について

$$
\begin{aligned}
p \cdot (a - b) \leq p \cdot 0 = 0 \qquad & \text{（支持超平面定理、} x_0 = 0\text{）} \\
p \cdot a \leq p \cdot b \qquad & \text{（移項）}
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。左辺の値の上限を $c = \sup_{a \in A} p \cdot a$ とすると（$B$ の点での値が上界になるので有限）、$p \cdot a \leq c \leq p \cdot b$ です。 □

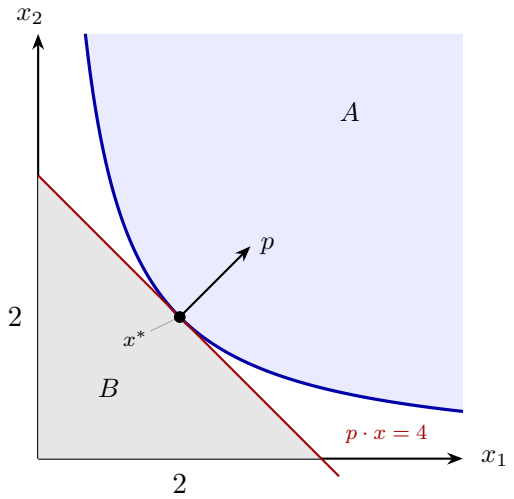
**数式の読み方：不等式 $p \cdot a \leq c \leq p \cdot b$ を経済学の言葉で読む**

- $p$ を価格とみると、$p \cdot a$ は組 $a$ の市場価値です。定理は「$A$ のどの組の価値も $c$ 以下、$B$ のどの組の価値も $c$ 以上」となる価格が存在することを述べています。
- 第二基本定理では、$B$ を「全員がより良くなる配分に必要な総量」、$A$ を「経済にある総量」とします。効率的な配分ではこの2つが重ならないので、「より良い配分は、この価格では必ず高すぎる」価格が見つかり、それが効率的な配分を市場で実現する価格になります。
- 支出関数 $e(p, u) = \min_{x \in U} p \cdot x$ も、上方集合 $U$ を支える超平面の高さとみなせます。双対性の理論（第7章以降）は、この見方に基づいています。

**数式の読み方：3つの分離定理の関係**

- 点と閉凸集合の分離（強い不等号）は、射影定理から直接得られます。
- 支持超平面定理は、その極限として得られます（弱い不等号になる）。
- 2つの凸集合の分離は、差の集合と原点に支持超平面定理を当てはめて得られます。経済学で最もよく使うのはこの形です。

**図 5.3**　分離超平面と価格




$A = \{x : x_1 x_2 \geq 4\}$、$B = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \leq 4\}$、$x^* = (2, 2)$、$p = (1, 1)$。

**図の読み方**

1. 青く塗った $A$ は、点 $x^*$ と同じかそれ以上に好ましい組の集まり（上方集合）で、凸集合です。
2. 灰色の $B$ は、経済全体で実現できる組の集まりで、これも凸集合です。2つの集合は $x^*$ だけで接しています。
3. 赤い直線は2つの集合を分ける超平面で、$A$ はその上側、$B$ は下側にあります。その法線ベクトル $p = (1, 1)$ が、$x^*$ を市場で実現する価格になります。

## 5.7　ファルカスの補題

分離超平面定理の最も重要な応用の一つが、連立1次方程式・不等式に解がないことを「証拠」で示す、次の補題です。

**補題 5.22（ファルカスの補題）**

$A$ を $m \times n$ 行列、$b \in \mathbb{R}^m$ とする。次の2つのうち、ちょうど一方だけが成り立つ。

1. $Ax = b$ を満たす $x \in \mathbb{R}^n_+$ が存在する。
2. $A^\top y \geq 0$ かつ $b \cdot y < 0$ を満たす $y \in \mathbb{R}^m$ が存在する。

**数式の読み方：補題の読み方**

$A$ の列 $a_1, \ldots, a_n$ を「資産のペイオフ」や「制約の勾配」と考えます。1は「$b$ は $a_j$ を非負の重みで足し合わせて作れる」、つまり $b$ が錐 $K = \{Ax : x \geq 0\}$ に入ることです。2は「どの $a_j$ とも鈍角でない（$a_j \cdot y \geq 0$）のに、$b$ とは鈍角をなす $y$」、つまり $K$ と $b$ を分ける超平面の法線です。「作れるか、分ける超平面があるか」のどちらか一方だけが起こる、という主張です。

**証明**

**ステップ1**　両方は成り立たない

1と2が同時に成り立つとすると、$b \cdot y = (Ax) \cdot y = x \cdot (A^\top y) \geq 0$（$x \geq 0$、$A^\top y \geq 0$）となり、$b \cdot y < 0$ に矛盾します。

**ステップ2**　錐 $K$ は閉集合

$K$ の点 $z = Ax = \sum_j x_j a_j$（$x \geq 0$）は、カラテオドリの定理の証明と同じ操作で、一次独立な列だけを非負の重みで使う形に書き直せます。使っている列が一次従属なら、$\sum_j \mu_j a_j = 0$（$\mu \neq 0$、必要なら $-\mu$ に取りかえて $\mu_j > 0$ となる $j$ がある）をとり、$t = \min\{x_j/\mu_j : \mu_j > 0\}$ として $x - t\mu$ を考えると、重みは非負のまま一つが 0 になるからです。したがって $K$ は、一次独立な列の組 $J$ ごとの錐 $K_J = \{\sum_{j \in J} x_j a_j : x_j \geq 0\}$ の、有限個の合併です。各 $K_J$ は閉集合です。実際、$A_J$ を $J$ の列を並べた行列とすると、列が一次独立なので $A_J^\top A_J$ は正則で（$A_J^\top A_J x = 0$ なら $\|A_J x\|^2 = x \cdot (A_J^\top A_J x) = 0$ で、一次独立性から $x = 0$）、$A_J x^k \to z$ なら $x^k = (A_J^\top A_J)^{-1} A_J^\top (A_J x^k)$ も収束し、その極限 $x$ は $x \geq 0$、$A_J x = z$ を満たします。有限個の閉集合の合併なので、$K$ は閉集合です（命題 3.9）。

**ステップ3**　1が成り立たなければ2が成り立つ

$K$ は空でない（$0 \in K$）閉凸集合で、1が成り立たなければ $b \notin K$ です。定理 5.18 より、すべての $z \in K$ で $p \cdot z < p \cdot b$ となる $p$ があります。$z = 0$ とすると $p \cdot b > 0$ です。また、ある列で $p \cdot a_j > 0$ なら、$z = t a_j \in K$ で $t \to \infty$ とすると $p \cdot z$ がいくらでも大きくなって矛盾するので、すべての $j$ で $p \cdot a_j \leq 0$ です。$y = -p$ とおけば $A^\top y \geq 0$、$b \cdot y < 0$ で、2が成り立ちます。　□

**補足：経済学での使いどころ**

- KKT定理の証明（第7章）：最適点で「目的関数の勾配が、効いている制約の勾配の非負の和で書ける」（乗数が非負で存在する）ことを、ファルカスの補題の1として導きます。
- 資産価格の基本定理：「無裁定（費用ゼロ以下で必ず非負、ある状態で正の利益を生む取引がない）」と「正の状態価格が存在する」ことの同値性は、ファルカスの補題（とその変形）そのものです。
- 線形計画法の双対定理も、この補題から導かれます。

**発展：厚生経済学の第二基本定理への応用**

第二基本定理は「どんなパレート効率的な配分も、所得の再分配を適切に行えば競争均衡として実現できる」という主張です。証明では、効率的な配分 $x^*$ より（全員にとって）好ましい配分を作るのに必要な財の総量の集合と、経済全体で利用できる財の総量の集合を考えます。選好が凸なら両方とも凸集合で、効率性から重ならないので、分離超平面定理によって両者を分ける $p$ が見つかります。図 5.3 は、その1人・2財版の姿です。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- 凸集合・準凹関数 → 選好の凸性と需要の凸性・一意性、角谷の不動点定理の「値の凸性」。
- 接平面の不等式 → KKT条件の十分性（第7章）、支出関数・利潤関数の凹性・凸性。
- ジェンセンの不等式 → 危険回避、保険、予備的貯蓄、リスク・プレミアム。
- 分離超平面定理・支持超平面定理 → 厚生経済学の第二基本定理、効率的な生産と価格、双対性。
- ファルカスの補題 → KKT定理の乗数の存在、無裁定と状態価格。
- 射影の連続性 → 不動点定理の一般化（第10章）。

**要点**

- 凸集合は共通部分・和・スカラー倍・閉包の操作で保たれ、有限個の点の凸結合を含みます。
- 微分可能な凹関数のグラフは接平面の下にあり、準凹関数は上方集合が凸になる関数です。狭義準凹なら需要はただ一つに決まります。
- 射影定理：閉凸集合にはどの点からも最も近い点がただ一つあり、直角の条件で特徴づけられ、射影は非拡大（したがって連続）です。
- ジェンセンの不等式は、凹性を「何個の点を混ぜても成り立つ」形にしたもので、危険回避の数学的表現です。
- 射影定理から、点と閉凸集合の分離、支持超平面定理、2つの凸集合の分離、ファルカスの補題が順に導かれます。分離超平面の法線ベクトルが、経済学では価格の役割を果たします。

**次の章へ**　次の章では、計算の道具である勾配・ヘッセ行列・陰関数定理を整理し、凹性を微分で判定する方法を学びます。第10章では、この章の射影の連続性を使って、ブラウワーの不動点定理を一般のコンパクト凸集合に広げます。

**大学院とのつながり**　支出関数が価格について凹関数であることや、利潤関数が凸関数であることも、凸性の議論から示されます。双対性の理論（支出関数から選好を復元する）では、「閉凸集合はそれを含む半空間すべての共通部分である」という、分離超平面定理の帰結が使われます。

第6章

# 勾配・陰関数定理・ヘッセ行列・同次関数

**ここまでの流れ**　前の章までで、最適解の存在（コンパクト性と連続性）と性質（凸性）を扱う道具をそろえました。

**前提知識**　1変数の微分（高校数学）。第2章の行列、二次形式と定符号、首座小行列式による判定（定理 2.30）。第4章のワイエルシュトラスの定理と中間値の定理（定理 4.8）。第5章の凹関数と接平面の不等式（命題 5.9）。

**この章の問い**　無差別曲線の傾きや、パラメータが変わったときの最適解の変化は、どう計算すればよいでしょうか。また、関数が凹であることを微分で確かめるにはどうすればよいでしょうか。

**この章で分かること**　勾配ベクトルの意味、平均値の定理とテイラーの定理、陰関数定理（2変数の場合は証明つき）と比較静学、凹性とヘッセ行列（証明つき）、同次関数とオイラーの定理。

## 6.1　偏微分と勾配

多変数の関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ では、ほかの変数を止めて1つの変数だけを動かしたときの変化率を考えます。これが偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ で、$f_i$ とも書きます。偏微分がすべて存在して連続であるとき、$f$ は連続微分可能（$C^1$ 級）であるといい、2階の偏微分まで連続なら2回連続微分可能（$C^2$ 級）であるといいます。

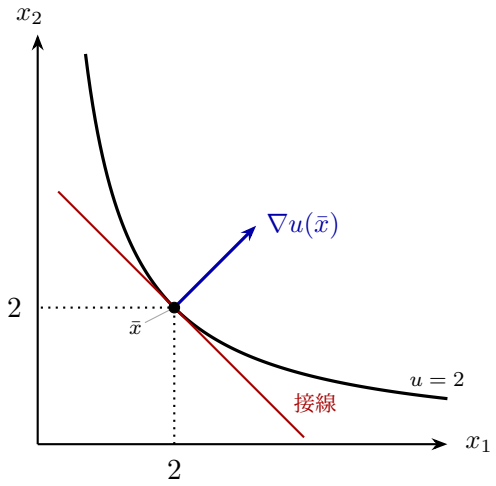
**定義 6.1（勾配ベクトル）**

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の偏微分を並べたベクトル $\nabla f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$ を、$x$ における勾配ベクトルという。

**数式の読み方**

- $x$ から方向 $h$ に少し進んだときの変化は、近似的に $f(x+h)-f(x) \approx \nabla f(x)\cdot h$ です（全微分）。正確には、$f$ が $C^1$ 級なら、誤差 $f(x+h)-f(x)-\nabla f(x)\cdot h$ は $\|h\|$ よりも速く 0 に近づきます（このことを、$f$ は $x$ で微分可能であるといいます。本書では証明しません）。
- この近似から、勾配ベクトルは「$f$ が最も速く増える方向」を向き、等高線（$f$ が一定の曲線）に垂直であることが分かります。等高線に沿って動く $h$ では $f$ が変わらないので、$\nabla f(x)\cdot h = 0$ になるからです。
- 効用関数では、$\nabla u(x) = (u_1, \ldots, u_L)$ は各財の限界効用を並べたもので、無差別曲線に垂直です。

**図 6.1**　無差別曲線の接線と勾配ベクトル




$u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、$\bar{x} = (2, 2)$、$\nabla u(\bar{x}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$（矢印は長さを拡大して描いた）。接線は $x_2 = 4 - x_1$。

**図の読み方**

1. 黒い曲線は $u = 2$ の無差別曲線、赤い直線は点 $\bar{x}$ での接線です。
2. 青い矢印が勾配ベクトル $\nabla u(\bar{x})$ で、接線に垂直で、効用が増える右上を向いています。
3. 接線の傾き $-1$ は、次の節で示すように $-u_1/u_2 = -(1/2)/(1/2)$ に等しくなります。

**補足：経済学での使いどころ　「価格は無差別曲線に垂直」**

効用最大化の一階条件 $\nabla u(x^*) = \lambda p$ は、「勾配ベクトルと価格ベクトルが同じ方向を向く」という式です。勾配は無差別曲線に垂直なので、これは「価格ベクトルも最適点で無差別曲線に垂直」、つまり予算線と無差別曲線が接することを意味します。同じ見方で、パレート効率性の条件は「2人の勾配ベクトルが同じ方向を向く（$\nabla u_A \parallel \nabla u_B$）」と読め、第二基本定理の価格はその共通の方向として現れます。限界代替率の等式を「ベクトルの向きがそろう」と読めるようになると、多財の場合でも図が描けるようになります。

## 6.2　連鎖律・平均値の定理・テイラーの定理

多変数の関数の性質を調べる基本の方法は、「直線の上に制限して1変数の関数にする」ことです。$x$ から方向 $h$ に進む直線の上で

$$\varphi(t) = f(x + th)$$

とおくと、$\varphi$ は $t$ の1変数関数です。

**命題 6.2（直線に沿った微分（連鎖律））**

$f$ が $C^1$ 級ならば $\varphi'(t) = \nabla f(x+th)\cdot h$、$C^2$ 級ならば $\varphi''(t) = h^{\top} D^2 f(x+th)\, h$ である（$D^2 f$ は次の節で定義するヘッセ行列）。

これは多変数の連鎖律 $\frac{d}{dt} f\big(g(t)\big) = \nabla f(g(t))\cdot g'(t)$ を $g(t) = x + th$ に当てはめたものです。連鎖律そのものは微分可能性の定義から導かれますが、本書では証明しません。2つ目の式は、1つ目の式 $\varphi'(t) = \sum_i f_i(x+th) h_i$ に同じ規則をもう一度使えば得られます。

**定理 6.3（平均値の定理）**

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続で $(0,1)$ で微分可能ならば、$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ となる $\theta \in (0,1)$ がある。したがって $C^1$ 級の $f$ について、$f(x+h) - f(x) = \nabla f(x+\theta h)\cdot h$ となる $\theta \in (0,1)$ がある。

**証明**　$\psi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) - t\big(\varphi(1) - \varphi(0)\big)$ とおくと、$\psi(0) = \psi(1) = 0$ です。$\psi$ は $[0,1]$ 上で連続なので、ワイエルシュトラスの定理から最大値と最小値をとります。両方とも $0$ なら $\psi$ は定数で、どの $\theta$ でも $\psi'(\theta) = 0$ です。そうでなければ、最大点か最小点のどちらかが $(0,1)$ の内部にあり、そこでは $\psi'(\theta) = 0$ です（内部の最大点では、右からの差分商は $0$ 以下、左からは $0$ 以上なので、微分係数は $0$）。$\psi'(\theta) = \varphi'(\theta) - (\varphi(1) - \varphi(0)) = 0$ が結論です。後半は $\varphi(t) = f(x+th)$ に命題 6.2 を使います。　□

**定理 6.4（2次のテイラーの定理）**

$f$ が $C^2$ 級ならば、

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \tfrac{1}{2}\, h^{\top} D^2 f(x+\theta h)\, h$$

となる $\theta \in (0,1)$ がある。

**証明**

**方針**　$\varphi(t) = f(x+th)$ について $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\theta)$ を示せば、命題 6.2 から結論が出ます。

定数 $K$ を $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + K$ となるように定め、

$$g(t) = \varphi(1) - \varphi(t) - \varphi'(t)(1-t) - K(1-t)^2$$

とおきます。$g(1) = 0$ で、$K$ の定め方から $g(0) = 0$ です。平均値の定理（定理 6.3）より $g'(\theta) = 0$ となる $\theta \in (0,1)$ があり、

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\varphi'(t) - \varphi''(t)(1-t) + \varphi'(t) + 2K(1-t) && \text{（積の微分）} \\ &= (1-t)\big(2K - \varphi''(t)\big) && \text{（整理）} \end{aligned}$$

なので、$1-\theta > 0$ より $K = \frac{1}{2}\varphi''(\theta)$ です。 □

**補足：経済学での使いどころ**

平均値の定理は「変化量＝途中のどこかでの傾き×変化の幅」で、比較静学や陰関数定理の証明で使います。テイラーの定理は、二階条件の根拠（次の節）と、マクロ経済学の対数線形化（定常状態のまわりの1次近似）、危険回避度の導出（効用関数の2次近似）に使います。

## 6.3　陰関数定理と比較静学

無差別曲線 $u(x_1, x_2) = \bar{u}$ は、$x_2$ を $x_1$ の式として明示的に解けるとは限りません。それでも、曲線の傾きは計算できます。それを保証するのが陰関数定理です。

**定理 6.5（陰関数定理：2変数の場合）**

$F(x,y)$ が連続微分可能で、点 $(x_0,y_0)$ で $F(x_0,y_0)=0$、$F_y(x_0,y_0)\neq 0$ とする。このとき $x_0$ の近くで、$F(x,g(x))=0$ と $g(x_0)=y_0$ を満たす連続微分可能な関数 $y=g(x)$ がただ一つ存在し、

$$g'(x)=-\frac{F_x\big(x,g(x)\big)}{F_y\big(x,g(x)\big)} \tag{6.1}$$

が成り立つ。

**証明のアイデア**

式 (6.1) は、恒等式 $F(x,g(x))=0$ の両辺を $x$ で微分すると、連鎖律より $F_x+F_y\,g'(x)=0$ となることから分かります。定理の本体は、そもそも $g$ が存在して微分できることです。$F_y>0$ なら、$x$ を止めたとき $F$ は $y$ について増加なので、$F=0$ となる $y$ は、中間値の定理によって存在し、単調性によって一つだけです。微分可能性は、平均値の定理で差分商を $-F_x/F_y$ に結びつけて示します。

**証明**　$F_y(x_0,y_0)>0$ の場合を示します（負なら $-F$ を考えます）。

**ステップ1**　$F$ が $y$ について増加する長方形

$F_y$ は連続なので、$a,b>0$ を小さくとると、長方形 $R=\{|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$ 上で $F_y>0$ です。すると $F(x_0,\cdot)$ は狭義増加で $F(x_0,y_0)=0$ なので、$F(x_0,y_0+b)>0>F(x_0,y_0-b)$ です。$F$ は連続なので、$\delta\le a$ を小さくとると、$|x-x_0|<\delta$ で $F(x,y_0+b)>0>F(x,y_0-b)$ が成り立ちます。

**ステップ2**　$g$ の存在と一意性

$|x-x_0|<\delta$ を固定すると、$y\mapsto F(x,y)$ は $[y_0-b,y_0+b]$ で連続かつ狭義増加で、両端で符号が変わります。中間値の定理（定理 4.8）より $F(x,y)=0$ となる $y$ があり、狭義増加なのでただ一つです。それを $g(x)$ とします。

**ステップ3**　$g$ の連続性

ステップ1と2の議論を、$b$ を任意に小さな $b'$ に取りかえて行うと、$x_0$ の近くでは $|g(x)-y_0|<b'$ です。これは $g$ が $x_0$ で連続であることを意味します。$x_0$ の近くの他の点でも、その点を新たな $(x_0,y_0)$ とみなして同じ議論ができるので、$g$ は連続です。

**ステップ4**　微分可能性と式 (6.1)

$x$ と $x+\Delta$ をとり、$k=g(x+\Delta)-g(x)$ とおきます。$F(x+\Delta,g(x)+k)-F(x,g(x))=0-0=0$ に、2点を結ぶ線分の上で平均値の定理（定理 6.3）を使うと、線分上のある点 $\xi$ で

$$0=F_x(\xi)\,\Delta+F_y(\xi)\,k,\qquad \text{つまり}\qquad \frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}=-\frac{F_x(\xi)}{F_y(\xi)}$$

です（$\xi \in R$ なので $F_y(\xi) > 0$）。$\Delta \to 0$ とすると、$g$ の連続性から $k \to 0$、$\xi \to (x, g(x))$ で、偏微分の連続性から右辺は $-F_x(x, g(x))/F_y(x, g(x))$ に収束します。右辺は連続なので、$g$ は連続微分可能です。 □

**補足：経済学での使いどころ　比較静学の3ステップ**

大学院ミクロの比較静学（パラメータが変わると最適解や均衡がどう変わるか）は、ほとんどが次の3ステップです。

1. 最適解や均衡を決める条件を、$F(x^*, a) = 0$ の形に書く（一階条件、市場清算条件など）。
2. $F_x \neq 0$ を確かめる。最適化問題では、これは二階条件（$F_x < 0$ など）から保証されることが多い。
3. $dx^*/da = -F_a/F_x$ を計算し、分母の符号（二階条件）と分子の符号（パラメータの直接効果）から、変化の向きを判定する。

二階条件が比較静学の符号を決めるという構造は、スルツキー行列の負半定値性や供給の法則にも共通しています。「最適化の二階条件が、観察できる反応の符号を決める」ことが、ミクロ経済学の検証可能な予測の源泉です。

**計算例：限界代替率**

$F(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \bar{u}$ とおくと、無差別曲線の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{F_{x_1}}{F_{x_2}} && \text{（式 (6.1)）} \\ &= -\frac{u_1(x_1, x_2)}{u_2(x_1, x_2)} && \text{（$F$ の偏微分は $u$ の偏微分）} \end{aligned}$$

です。その絶対値 $u_1/u_2$ が限界代替率（MRS）です。$u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ では $u_1/u_2 = x_2/x_1$ で、$\bar{x} = (2, 2)$ では 1 となり、図 6.1 の接線の傾き $-1$ と一致します。

陰関数定理の最も大切な使い道は、比較静学です。最適解 $x^*$ が一階条件 $F(x^*, a) = 0$ で決まるとき、パラメータ $a$ が変わると $x^*$ がどう変わるかは、$x^*$ を具体的に解かなくても

$$\frac{dx^*}{da} = -\frac{F_a(x^*, a)}{F_x(x^*, a)} \tag{6.2}$$

で求められます。

**計算例：利潤最大化の比較静学**

価格 $p$ で生産物を売り、要素価格 $w$ で投入物 $x$ を買う企業の利潤 $pf(x) - wx$ を最大化します（$f'' < 0$）。一階条件は $F(x, w) = pf'(x) - w = 0$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dw} &= -\frac{F_w}{F_x} && \text{（式 (6.2)）} \\ &= -\frac{-1}{pf''(x^*)} && (F_w = -1,\ F_x = pf'') \\ &= \frac{1}{pf''(x^*)} < 0 && (f'' < 0) \end{aligned}$$

となり、要素価格が上がると要素需要は減ることが分かります。

---

**定理 6.6（陰関数定理：一般の場合）**

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が $C^1$ 級で、$F(x_0, a_0) = 0$ とし、$x$ についてのヤコビ行列 $D_x F(x_0, a_0)$（$(i, j)$ 成分が $\partial F_i / \partial x_j$ の $n \times n$ 行列）が正則であるとする。このとき $a_0$ の近くで、$F(x^*(a), a) = 0$、$x^*(a_0) = x_0$ を満たす $C^1$ 級の関数 $x^*(a)$ がただ一つ存在し、

$$D_a x^*(a) = -\bigl(D_x F\bigr)^{-1} D_a F \qquad \text{(右辺は } (x^*(a), a) \text{ で評価)}$$

が成り立つ。

---

本書では、一般の場合の存在の証明は省きます（逆関数定理を経由する、より長い議論が必要です）。微分の公式は、恒等式 $F(x^*(a), a) = 0$ を $a$ で微分した $D_x F \, D_a x^* + D_a F = 0$ に $(D_x F)^{-1}$ をかければ得られます。式 (6.1) の「$F_y \neq 0$ で割る」が「逆行列をかける」に置き換わった形で、$2 \times 2$ の場合はクラメルの公式（定理 2.20）で計算できます。

**補足：経済学での使いどころ**

多財の需要の比較静学、一般均衡の比較静学（超過需要 $z(p, a) = 0$ を価格について解く）、マクロ経済学の対数線形化の正当化（定常状態の近くで均衡条件を解けること）は、すべてこの定理の応用です。条件「$D_x F$ が正則」は、均衡が局所的にただ一つに決まる（**正則な均衡**）ことを意味します。

## 6.4 ヘッセ行列と定符号

1変数では、$f''(x) \leq 0$ が凹関数であることの判定条件でした。多変数でこれにあたるのが、2階の偏微分を並べたヘッセ行列です。

**定義 6.7（ヘッセ行列）**

2回連続微分可能な $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について、$(i,j)$ 成分が $f_{ij}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ である $n \times n$ 行列 $D^2 f(x)$ をヘッセ行列という。

**補足：ヤングの定理**

2階の偏微分が連続なら、微分の順序を入れ替えても結果は同じで、$f_{ij} = f_{ji}$ です（本書では証明しません）。したがってヘッセ行列は対称行列です。

定符号（負定値・負半定値など）の定義と判定法は、第2章で学びました。

---

**定理 6.8（凹性とヘッセ行列）**

$f$ を開凸集合 $X$ 上で2回連続微分可能な関数とする。$f$ が凹関数であることと、すべての $x \in X$ で $D^2 f(x)$ が負半定値であることは同値である。また、すべての $x$ で $D^2 f(x)$ が負定値ならば、$f$ は狭義凹関数である。

---

**数式の読み方：二次形式の意味**

- 点 $x$ のまわりで、$f(x+h) \approx f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^\top D^2 f(x) h$ と近似できます（テイラー展開）。
- 最後の項 $\frac{1}{2} h^\top D^2 f(x) h$ は「方向 $h$ に進んだときの曲がり具合」です。負半定値とは、どの方向に進んでもグラフが下に曲がる（または平ら）ことを意味します。

**証明**

**方針**　テイラーの定理（定理 6.4）で、接平面の不等式（命題 5.9）と二次形式の符号を結びつけます。

**ステップ1**　負半定値ならば凹

$x, y \in X$、$h = y - x$ とします。テイラーの定理より、線分上のある点 $\xi = x + \theta h \in X$（$X$ は凸）で

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \tfrac{1}{2} h^\top D^2 f(\xi) h \le f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x)$$

です（負半定値より最後の項は 0 以下）。この接平面の不等式がすべての $x, y$ で成り立てば $f$ は凹です。実際、$z = \lambda x + (1-\lambda) y$ での不等式を $x$ と $y$ について書き、それぞれ $\lambda$、$1-\lambda$ をかけて足すと、

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \le f(z) + \nabla f(z) \cdot \big(\lambda x + (1-\lambda) y - z\big) = f(z)$$

となります。

**ステップ2**　凹ならば負半定値

ある $x$ と $h$ で $h^\top D^2 f(x) h > 0$ とします。$D^2 f$ は連続なので、$t > 0$ が小さければ線分 $[x, x+th]$ 上のすべての点 $\xi$ で $h^\top D^2 f(\xi) h > 0$ で、$x + th \in X$（$X$ は開集合）です。テイラーの定理より

$$f(x+th) = f(x) + t\nabla f(x) \cdot h + \tfrac{t^2}{2} h^\top D^2 f(\xi) h > f(x) + \nabla f(x) \cdot (th)$$

となり、接平面の不等式（命題 5.9）に反します。よって $f$ は凹ではありません。

**ステップ3**　負定値ならば狭義凹

ステップ1で $y \neq x$ なら $h \neq 0$ で最後の項は負なので、接平面の不等式が強い不等号で成り立ちます。ステップ1の後半の計算で $x \neq y$、$\lambda \in (0,1)$ なら $x \neq z$ なので、強い不等号が残り、$f$ は狭義凹です。　□

**補足：経済学での使いどころ　定符号は「どの方向に動いても」の条件**

定符号性は「どの方向 $h$ に動いても、2次の変化の符号が決まっている」という条件です。大学院ミクロでは、行列の定符号性がそのまま経済学の結論になります。

- 支出関数のヘッセ行列（スルツキー行列）が負半定値 → 価格をどう組み合わせて変えても、補償需要は価格変化と逆向きに動く。
- 利潤関数のヘッセ行列が正半定値 → 供給は自分の価格に対して増加し、要素需要は減少する。

対角成分（自己価格の効果）の符号だけでなく、非対角成分（交差効果）を含めた全体の性質として理解することが大切です。

行列が負定値かどうかは、第2章の首座小行列式による判定（定理 2.30）で確かめられます。$D_k$ を左上 $k \times k$ 部分の行列式とすると、負定値であることと、$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0, \ldots$ と符号が交互に変わることは同値です。

**計算例：コブ＝ダグラス関数のヘッセ行列**

$f(x_1,x_2)=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$（$x\gg 0$）では

$$f_{11}=-\tfrac{1}{4}x_1^{-3/2}x_2^{1/2}<0,\qquad f_{22}=-\tfrac{1}{4}x_1^{1/2}x_2^{-3/2},\qquad f_{12}=\tfrac{1}{4}x_1^{-1/2}x_2^{-1/2}$$
$$D_2=f_{11}f_{22}-f_{12}^2=\tfrac{1}{16}x_1^{-1}x_2^{-1}-\tfrac{1}{16}x_1^{-1}x_2^{-1}=0$$

です。$D_2=0$ なので負定値ではありません。負半定値であることは、下の補足の判定法（$f_{11}\le 0$、$f_{22}\le 0$、$D_2\ge 0$）で確かめられ、定理 6.8 より $f$ は凹関数ですが狭義凹ではありません。実際、原点を通る半直線 $x=t\bar{x}$ の上では $f(t\bar{x})=tf(\bar{x})$ と直線的に増えます。

**補足：半定値の判定は注意が必要**

負**半**定値の判定では、左上の主小行列式だけでは足りません。行と列の同じ番号を選んで取り出した、すべての主小行列式 $\Delta_k$ について $(-1)^k\Delta_k\ge 0$ を確かめる必要があります。2×2 行列なら、$f_{11}\le 0$、$f_{22}\le 0$、$f_{11}f_{22}-f_{12}^2\ge 0$ の3つです。

準凹性は、ヘッセ行列を「無差別曲線の接線の方向」に制限したときの符号で判定できます。2財の場合を述べます。

**命題 6.9（縁付きヘッセ行列と無差別曲線の凸性）**

$u$ を $\mathbb{R}^2_{++}$ 上の $C^2$ 級関数で $u_1>0$、$u_2>0$ とし、

$$\bar{D}=\det\begin{pmatrix}0 & u_1 & u_2\\ u_1 & u_{11} & u_{12}\\ u_2 & u_{12} & u_{22}\end{pmatrix}$$

とおく。無差別曲線 $x_2=g(x_1)$ について、$g''(x_1)=\bar{D}/u_2^3$ である。したがって $\bar{D}>0$ なら無差別曲線は原点に対して狭義に凸である（限界代替率が逓減する）。

**証明**　陰関数定理（定理 6.5）より $g'=-u_1/u_2$ で、右辺を $x_1$ で微分します。$u_i$ は $x_2=g(x_1)$ を通じても $x_1$ に依存するので、$\frac{d}{dx_1}u_i=u_{i1}+u_{i2}g'$ です。

$$g''=-\frac{(u_{11}+u_{12}g')u_2-u_1(u_{12}+u_{22}g')}{u_2^2}\qquad\text{（商の微分）}$$
$$=-\frac{u_{11}u_2^2-2u_{12}u_1u_2+u_{22}u_1^2}{u_2^3}\qquad\text{（}g'=-u_1/u_2\text{ を代入し }u_2\text{ をかけて整理）}$$

です。第2章の命題 2.33 の証明の計算から、分子の符号を変えたものが $\bar{D}$ に等しいので、$g''=\bar{D}/u_2^3$ です。　□

**補足：経済学での使いどころ**

$\bar{D} > 0$ は「勾配と直交する方向（無差別曲線の接線の方向）では、ヘッセ行列が負定値」という条件です（命題 2.33）。これが、効用最大化の二階条件であり、需要が一つに決まり滑らかに動くための条件です。$n$ 財の場合は、縁付きヘッセ行列の首座小行列式の符号が交互に変わるという条件になります（本書では証明しません）。

## 6.5 同次関数とオイラーの定理

需要関数や費用関数には、「すべての価格を2倍にすると、どう変わるか」という性質があります。これを表すのが同次性です。

**定義 6.10（同次関数）**

$f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ が、任意の $x$ と任意の $t > 0$ について $f(tx) = t^k f(x)$ を満たすとき、$f$ を $k$ 次同次関数という。

**数式の読み方：経済学の同次関数**

- マーシャル需要 $x(p, w)$ は $(p, w)$ について0次同次です。価格と所得を同時に $t$ 倍しても予算集合は変わらないからです。
- 支出関数 $e(p, u)$ や費用関数は価格について1次同次です。規模に関して収穫一定の生産関数は投入について1次同次です。

**定理 6.11（オイラーの定理）**

$f$ が微分可能な $k$ 次同次関数ならば、すべての $x$ について

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, f_i(x) = k \, f(x) \tag{6.3}$$

が成り立つ。

**証明**

**方針**　恒等式 $f(tx) = t^k f(x)$ の両辺を $t$ で微分して、$t = 1$ とおきます。

左辺を連鎖律で、右辺をそのまま $t$ で微分すると

$$\frac{d}{dt} f(tx_1, \ldots, tx_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(tx) \, x_i \qquad \text{（連鎖律）}$$

$$\frac{d}{dt} \, t^k f(x) = k \, t^{k-1} f(x) \qquad \text{（$t$ について微分）}$$

で、両者は等しくなります。$t=1$ を代入すると式 (6.3) が得られます。 □

**系 6.12**

$f$ が $k$ 次同次ならば、各偏微分 $f_i$ は $k-1$ 次同次である。

**証明**　$f(tx)=t^k f(x)$ の両辺を $x_i$ で微分すると、左辺は連鎖律より $t\,f_i(tx)$、右辺は $t^k f_i(x)$ なので、$f_i(tx)=t^{k-1}f_i(x)$ です。 □

**補足：経済学での使いどころ　同次性は「単位の取り方によらない」こと**

需要が価格と所得について0次同次であるのは、「円で測っても銭で測っても行動は同じ」という当たり前の性質です。オイラーの定理は、この当たり前の性質を微分の関係式に変えてくれます。

- 0次同次（需要、ヒックス需要）$\to \sum_k p_k\,\partial x_\ell/\partial p_k + w\,\partial x_\ell/\partial w = 0$、スルツキー行列の $Sp=0$。
- 1次同次（支出関数、費用関数、利潤関数）$\to e=\sum_\ell p_\ell\,\partial e/\partial p_\ell = \sum_\ell p_\ell h_\ell$（シェパードの補題と合わせると「支出＝価格×補償需要の合計」）。
- 収穫一定の生産関数 $\to f(z)=\sum_i z_i\,\partial f/\partial z_i$。各投入物に限界生産物の価値を支払うと、収入をちょうど使い切り、利潤はゼロになります。

**計算例：需要関数への応用**

マーシャル需要 $x_\ell(p,w)$ は $(p_1,\dots,p_L,w)$ について0次同次なので、オイラーの定理で $k=0$ として

$$\sum_{j=1}^{L} p_j\,\frac{\partial x_\ell}{\partial p_j} + w\,\frac{\partial x_\ell}{\partial w} = 0$$

が成り立ちます。価格と所得の変化の効果は互いに打ち消し合う、という需要関数の基本的な性質です。

**補足：ホモセティック関数**

1次同次関数を単調増加変換したものをホモセティック関数といいます。系から、1次同次関数の偏微分は0次同次なので、限界代替率 $u_1/u_2$ は $x_2/x_1$ の比だけで決まります。そのため、所得が変わっても需要の比率は変わらず、所得拡張経路は原点を通る直線になります。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- 勾配と陰関数定理 → 限界代替率・技術的限界代替率、比較静学、正則な均衡。
- 平均値の定理・テイラーの定理 → 二階条件、対数線形化、危険回避度の導出。
- ヘッセ行列と定符号 → 凹性の判定、スルツキー行列の負半定値性、利潤関数の凸性、二階条件。
- 縁付きヘッセ行列 → 限界代替率の逓減、効用最大化の二階条件。
- 同次関数とオイラーの定理 → 需要の0次同次性、支出関数・費用関数・利潤関数の1次同次性、超過需要の0次同次性と価格の基準化。

**要点**

- 勾配ベクトルは関数が最も速く増える方向を向き、等高線（無差別曲線）に垂直です。
- 多変数の関数は、直線の上に制限すると1変数の関数になり、平均値の定理とテイラーの定理が使えます。
- 陰関数定理から、限界代替率 $u_1/u_2$ や比較静学の公式 $dx^*/da = -F_a/F_x$ が得られます。2変数の場合は、中間値の定理と平均値の定理で証明できます。
- 凹性はヘッセ行列の負半定値性と同値で（テイラーの定理による証明）、負定値の判定には首座小行列式の符号を使います。
- $k$ 次同次関数ではオイラーの定理 $\sum_i x_i f_i = kf$ が成り立ちます。

**次の章へ**　次の章では、これらの計算の道具を使って、不等式制約のある最適化問題（KKT条件）と、最大値がパラメータにどう反応するかを教える包絡線定理を学びます。

**大学院とのつながり**　スルツキー方程式で現れる代替効果の行列（スルツキー行列）は、支出関数のヘッセ行列であり、負半定値になります。

第7章

# 制約付き最適化：ラグランジュ法・KKT条件・包絡線定理

**ここまでの流れ**　前の章で、勾配ベクトル・陰関数定理・ヘッセ行列という計算の道具を整理しました。
**前提知識**　第5章の接平面の不等式（命題 5.9）とファルカスの補題（補題 5.22）。第6章の陰関数定理（定理 6.5、定理 6.6）と連鎖律。第2章の縁付き行列式（命題 2.33）。
**この章の問い**　「ある財をまったく買わない」ような端点解も含めて、制約付きの最適化問題の解はどんな条件を満たすのでしょうか。また、所得や価格が変わると最大値はどう変わるのでしょうか。
**この章で分かること**　ラグランジュの定理（証明）、KKT定理（ファルカスの補題による証明）と制約想定、KKT条件が十分条件になる場合、二階条件、制約付きの包絡線定理と乗数の意味（証明）、ロイの恒等式・シェパードの補題。

## 7.1　等式制約とラグランジュ乗数法

まず、等式制約の問題

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) = c \tag{7.1}$$

を考えます。学部で学んだラグランジュ乗数法を、仮定まで含めて正確に述べると次のようになります。

**定理 7.1（ラグランジュの定理）**

$f, g$ は連続微分可能とし、$x^*$ が問題 (7.1) の（局所的な）解で、$\nabla g(x^*) \neq 0$ とする。このとき、ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*) \tag{7.2}$$

が成り立つ。言い換えると、ラグランジュ関数 $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda\big(c - g(x)\big)$ について $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = 0$ である。

**数式の読み方**

- 式 (7.2) は「目的関数の勾配と制約の勾配が平行」という条件です。前の章で見たように勾配は等高線に垂直なので、これは「目的関数の等高線と制約の曲線が接している」ことを意味します。
- 効用最大化（$f = u$、$g(x) = p \cdot x$、$c = w$）では $\nabla g = p$ なので、式 (7.2) は $u_\ell = \lambda p_\ell$、つまり $u_\ell / u_k = p_\ell / p_k$（限界代替率＝価格比）になります。
- 仮定 $\nabla g(x^*) \neq 0$ は制約想定と呼ばれ、制約の曲線がその点でなめらかであることを保証します。

**証明のアイデア**

制約の上を通って $x^*$ を通る曲線を、どの「接線の方向」$d$（$\nabla g(x^*) \cdot d = 0$）にも作れることが山場です。そうした曲線の上では $f$ は $x^*$ で最大なので、$\nabla f(x^*) \cdot d = 0$ です。「$\nabla g$ と直交するすべての $d$ と直交する」ベクトルは $\nabla g$ の定数倍しかありません。曲線を作るのに、陰関数定理を使います。

**証明**　$\nabla g(x^*) \cdot d = 0$ となる $d$ を任意にとり、$v = \nabla g(x^*) \neq 0$ とおきます。

**ステップ1**　制約の上の曲線を作る

2変数の関数 $F(t, s) = g(x^* + td + sv) - c$ を考えます。$F(0,0) = 0$ で、連鎖律より $F_s(0,0) = \nabla g(x^*) \cdot v = \|v\|^2 \neq 0$ です。陰関数定理（定理 6.5）より、0 の近くで $F(t, s(t)) = 0$、$s(0) = 0$ となる $C^1$ 級の $s(t)$ があり、$s'(0) = -F_t(0,0)/F_s(0,0) = -\nabla g(x^*) \cdot d / \|v\|^2 = 0$ です。$x(t) = x^* + td + s(t)v$ は制約を満たす曲線で、$x(0) = x^*$、$x'(0) = d$ です。

**ステップ2**　曲線の上での最大化

$x^*$ は局所的な解なので、$t = 0$ の近くで $f(x(t)) \leq f(x^*)$、つまり $t \mapsto f(x(t))$ は $t = 0$ で極大です。したがって微分は 0 で、連鎖律より $\nabla f(x^*) \cdot d = 0$ です。

**ステップ3**　勾配が平行であること

$\lambda = \nabla f(x^*) \cdot v / \|v\|^2$、$d = \nabla f(x^*) - \lambda v$ とおくと、$v \cdot d = 0$ なので、ステップ2より $\nabla f(x^*) \cdot d = 0$ です。$v \cdot d = 0$ と合わせて $\|d\|^2 = (\nabla f(x^*) - \lambda v) \cdot d = 0$、つまり $\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*)$ です。 □

**補足：制約が複数ある場合**

$m$ 本の等式制約 $g_j(x) = c_j$（$m < n$）では、制約の勾配 $\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$ が一次独立であれば、$\nabla f(x^*) = \sum_j \lambda_j \nabla g_j(x^*)$ となる $\lambda_j$ が存在します。証明は同じ筋道で、曲線を作るのに一般の陰関数定理（定理 6.6）を使います（本書では細部を省きます）。

**補足：経済学での使いどころ　乗数の「単位」を読む**

乗数 $\lambda$ の意味は、単位を考えると分かりやすくなります。効用最大化の一階条件 $u_\ell = \lambda p_\ell$ で、$u_\ell$ は「財1単位あたりの効用」、$p_\ell$ は「財1単位あたりの円」なので、$\lambda = u_\ell / p_\ell$ は「1円あたりの効用」です。実際、包絡線定理から $\lambda = \partial v / \partial w$（所得の限界効用）であることが示されます（系 7.6）。費用最小化では乗数は「生産量1単位あたりの円」、つまり限界費用になります。乗数を見たら「制約を1単位緩めると、目的がどれだけ良くなるか」と読み、その単位を確かめる習慣をつけてください。

## 7.2　不等式制約とKKT条件

経済学の制約の多くは不等式です。予算は使い切らなくてもよく、消費量はマイナスにできません。そこで、不等式制約の問題

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_j(x) \le c_j \quad (j = 1, \dots, m) \tag{7.3}$$

を考えます。等号で成り立っている制約を「有効な制約」といいます。次の定理は、3人の名前の頭文字をとってKKTの定理と呼ばれ、その条件をKKT条件といいます。

**定理 7.2（カルーシュ＝クーン＝タッカーの定理）**

$f, g_j$ は連続微分可能とし、$x^*$ が問題 (7.3) の（局所的な）解で、次の制約想定（マンガサリアン＝フロモヴィッツの条件）を満たすとする：$x^*$ で有効な制約の集合を $J$ として、すべての $j \in J$ で $\nabla g_j(x^*) \cdot \bar{d} < 0$ となる方向 $\bar{d}$ が存在する。このとき、ある $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ が存在して、次が成り立つ。

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) \qquad \text{（一階条件）} \tag{7.4}$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad g_j(x^*) \le c_j \qquad \text{（符号条件と制約）} \tag{7.5}$$

$$\lambda_j \bigl( c_j - g_j(x^*) \bigr) = 0 \qquad \text{（相補スラック条件）} \tag{7.6}$$

**証明のアイデア**

「どの有効な制約も破らずに進める方向」には、目的関数が増える方向がない、というのが最適性の中身です。これは「$\nabla f$ を、有効な制約の勾配の非負の和で書ける」と言いかえられ、その言いかえを保証するのがファルカスの補題です。制約想定は、「破らずに進める方向」が十分たくさんあることを保証する条件です。

**証明**

**ステップ1**　制約を厳密に満たす方向には $f$ は増えない

$d$ を、すべての $j \in J$ で $\nabla g_j(x^*) \cdot d < 0$ を満たす方向とします。有効な制約については、$g_j(x^* + td) = c_j + t\nabla g_j(x^*) \cdot d + o(t)$ なので、小さな $t > 0$ で $g_j(x^* + td) < c_j$ です。有効でない制約は $g_j(x^*) < c_j$ なので、連続性から小さな $t$ で $g_j(x^* + td) < c_j$ です。よって小さな $t > 0$ で $x^* + td$ は制約を満たし、$x^*$ は局所的な解なので $f(x^* + td) \leq f(x^*)$ です。$t$ で割って $t \downarrow 0$ とすると $\nabla f(x^*) \cdot d \leq 0$ です。

**ステップ2**　制約を弱く満たす方向でも同じ

$d$ を、すべての $j \in J$ で $\nabla g_j(x^*) \cdot d \leq 0$ を満たす方向とします。$\varepsilon > 0$ について $d + \varepsilon \bar{d}$ はステップ1の条件を満たすので $\nabla f(x^*) \cdot (d + \varepsilon \bar{d}) \leq 0$ で、$\varepsilon \to 0$ として $\nabla f(x^*) \cdot d \leq 0$ です。

**ステップ3**　ファルカスの補題

有効な制約の勾配を列に並べた行列を $A$、$b = \nabla f(x^*)$ とします。ステップ2は、「$A^\top y \geq 0$ かつ $b \cdot y < 0$ となる $y$」が存在しないことを意味します（$y = -d$ とおけば、$A^\top y \geq 0$ は $\nabla g_j \cdot d \leq 0$、$b \cdot y < 0$ は $\nabla f \cdot d > 0$ です）。ファルカスの補題（補題 5.22）より、$A\lambda_J = b$ となる $\lambda_J \geq 0$ があります。有効でない制約には $\lambda_j = 0$ をおけば、式 (7.4)〜(7.6) がすべて成り立ちます。　□

**数式の読み方：制約想定の確かめ方**

- **一次独立性**：有効な制約の勾配が一次独立なら、制約想定は成り立ちます。行列 $A^\top$ のランクが行数に等しいので、$A^\top \bar{d} = (-1, \ldots, -1)^\top$ が解をもつからです（第2章）。
- **スレーター条件**：各 $g_j$ が凸関数で、すべての制約を強い不等号で満たす点 $\hat{x}$ があれば、$\bar{d} = \hat{x} - x^*$ が条件を満たします。凸性から $\nabla g_j(x^*) \cdot \bar{d} \leq g_j(\hat{x}) - g_j(x^*) = g_j(\hat{x}) - c_j < 0$（$j \in J$）だからです。予算制約や非負制約のような1次式の制約は、この条件を満たします。
- 制約想定が成り立たないと、KKT条件は必要条件にもなりません。例えば $\max x_1$ s.t. $x_2 + x_1^3 \leq 0$、$-x_2 \leq 0$ では、実行可能な点は $x_2 \geq 0$ と $x_1^3 \leq -x_2 \leq 0$ から $x_1 \leq 0$ を満たすので、解は $(0, 0)$ です。ところが、そこで有効な制約の勾配 $(0, 1)$ と $(0, -1)$ の非負の和で $\nabla f = (1, 0)$ を書くことはできません。

**数式の読み方：相補スラック条件の読み方**

- 式 (7.6) は「$\lambda_j = 0$ か、制約 $j$ が等号で成り立つか、の少なくとも一方」という意味です。
- 制約に余裕がある（スラックがある）なら、その制約は最適解に影響しないので、乗数（制約の「価値」）は 0 です。
- 乗数が正なら、制約は等号で効いています。制約を少し緩めれば目的関数の値を上げられるからです。
- 符号条件 $\lambda_j \geq 0$ は、制約を緩める（$c_j$ を大きくする）ことが損にはならない、という事実の表れです。

**補足：経済学での使いどころ　相補スラック条件は経済学のあちこちにある**

相補スラック条件「数量が正なら等式、数量が 0 なら不等式」という構造は、KKT条件の外でも何度も現れます。

- 消費者：買う財では「限界効用÷価格＝$\lambda$」、買わない財では「$\leq \lambda$」（端点解、この節）。
- 企業：生産するなら「価格＝限界費用」、生産しないなら「価格 $\leq$ 平均可変費用の最小値」。
- 一般均衡：価格が正の財では市場が清算し（$z_\ell = 0$）、超過供給の財は価格が 0（第11章の $z(p^*) \leq 0$、$p^* \cdot z(p^*) = 0$）。

「使われていない制約や、取引されていない財には価値がつかない」という経済学の基本的な考え方が、数学ではこの条件として表現されているのです。

効用最大化問題 $\max u(x)$ s.t. $p \cdot x \leq w$、$x \geq 0$ にKKTの定理を当てはめると（非負制約を $-x_\ell \leq 0$ と書き、その乗数を消去すると）、次のよく使う形になります。

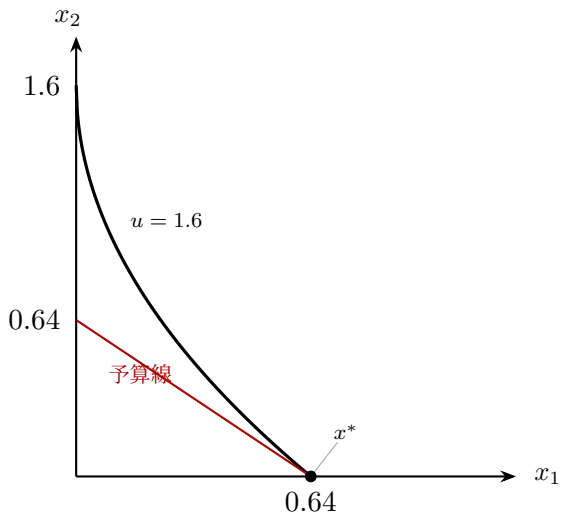
$$u_\ell(x^*) - \lambda p_\ell \leq 0, \qquad x_\ell^* \big(u_\ell(x^*) - \lambda p_\ell\big) = 0 \qquad (\ell = 1, \ldots, L) \tag{7.7}$$

$$\lambda \geq 0, \qquad \lambda \big(w - p \cdot x^*\big) = 0 \tag{7.8}$$

**数式の読み方：端点解の条件**

- 財 $\ell$ を正の量だけ買うなら（$x_\ell^* > 0$）、式 (7.7) から $u_\ell = \lambda p_\ell$ で、学部の条件と同じです。
- 財 $\ell$ を買わないなら（$x_\ell^* = 0$）、$u_\ell \leq \lambda p_\ell$ です。「1円あたりの限界効用」$u_\ell / p_\ell$ が、所得の限界効用 $\lambda$ を下回るので、買う価値がないということです。

**図 7.1**　端点解とKKT条件




$u(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + x_2$、$p = (1, 1)$、$w = 0.64$。最適解は $x^* = (0.64, 0)$、効用は $u = 1.6$。

**図の読み方**

1. 赤い直線は予算線、黒い曲線は最適解 $x^*$ を通る無差別曲線です。
2. $x^*$ は横軸上にあり、財2をまったく買わない端点解です。無差別曲線は予算線に接しておらず、予算線より急な傾きで横軸に交わっています。
3. 無差別曲線が予算線より急であることは、$x^*$ で限界代替率 $u_1/u_2$ が価格比 $p_1/p_2$ より大きいことを意味します。財2を減らして財1を増やしたいのですが、財2はもう 0 なので減らせません。

**計算例：KKT条件の確認**

$x^* = (0.64, 0)$ では $u_1 = 1/\sqrt{x_1^*} = 1.25$、$u_2 = 1$ です。$x_1^* > 0$ なので $u_1 = \lambda p_1$ から $\lambda = 1.25$ です。財2については

$$\begin{aligned} u_2 - \lambda p_2 &= 1 - 1.25 \times 1 && \text{（値を代入）} \\ &= -0.25 \le 0 && \text{（}x_2^* = 0 \text{ なので不等号でよい）} \end{aligned}$$

となり、式 (7.7) を満たします。予算は使い切っている（$0.64 + 0 = w$）ので、式 (7.8) も満たされます。

KKTの定理は**必要条件**です。つまり、解ならKKT条件を満たしますが、KKT条件を満たす点が解であるとは限りません。凸性があれば十分条件にもなります。

---

**定理 7.3（KKT条件の十分性）**

問題 (7.3) で、$f$ が凹関数、各 $g_j$ が凸関数であるとする。このとき、$x^*$ と $\lambda_j$ が式 (7.4)〜(7.6) を満たすならば、$x^*$ は問題 (7.3) の（大域的な）解である。

---

**証明**

**方針**　凹関数・凸関数は接線（接平面）の下・上にある、という性質を使います。

許容される任意の $x$（すべての $j$ で $g_j(x) \le c_j$）をとります。

**ステップ1**　凹性と凸性を使う

微分可能な凹関数はグラフが接平面の下にあるので（命題 5.9）$f(x) \le f(x^*) + \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*)$、凸関数は上にあるので $g_j(x) \ge g_j(x^*) + \nabla g_j(x^*) \cdot (x - x^*)$ です。

**ステップ2**　組み合わせる

これらと式 (7.4) を使って

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\le \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) && \text{（}f \text{ の凹性）} \\ &= \sum_j \lambda_j \, \nabla g_j(x^*) \cdot (x - x^*) && \text{（式 (7.4)）} \\ &\le \sum_j \lambda_j \big( g_j(x) - g_j(x^*) \big) && \text{（}g_j \text{ の凸性と } \lambda_j \ge 0\text{）} \\ &= \sum_j \lambda_j \big( g_j(x) - c_j \big) && \text{（相補スラック条件 (7.6)）} \\ &\le 0 && \text{（}\lambda_j \ge 0\text{、}g_j(x) \le c_j\text{）} \end{aligned}$$

となり、$f(x) \le f(x^*)$ です。　□

**数式の読み方：十分性を実際に確かめるときのチェックリスト**

- 目的関数は凹か（費用最小化・支出最小化なら目的関数 $w \cdot z$ は線形なので凹かつ凸で、問題ない）。
- 効用最大化のように目的関数が準凹でしかない場合は、アロー＝エントーベンの定理（次の発展）を使う。
- 制約関数は凸か（予算制約 $p \cdot x \leq w$ は線形なので問題ない。$u(x) \geq u$ は $-u(x) \leq -u$ と書くと、$u$ が凹なら凸な制約）。

これらを満たしていれば、一階条件を解いて得た点を安心して「解」と呼べます。逆に、凸性がない問題（収穫逓増の技術など）では、一階条件の解が最小点や鞍点であることもあるので注意が必要です。

**発展：準凹な目的関数と二階条件**

効用関数は準凹であっても凹とは限りません。それでも、$f$ が準凹で $\nabla f(x^*) \neq 0$、制約が凸（または準凸）なら、KKT条件が十分条件になることが知られています（アロー＝エントーベンの定理。本書では証明しません）。
凸性がない問題では、二階条件で局所的な最大を確かめます。等式制約が1本の場合、ラグランジュの条件を満たす点で、ラグランジュ関数のヘッセ行列 $D_x^2\mathcal{L}$ が「制約の接線の方向」（$\nabla g(x^*) \cdot h = 0$ となる $h \neq 0$）で負定値なら、$x^*$ は局所的な最大点です（本書では証明しません）。2変数では、この条件は縁付き行列式の符号で判定できます（命題 2.33、命題 6.9）。

## 7.3 包絡線定理

最後に、パラメータ $a$ を含む問題の最大値

$$V(a) = \max_x f(x, a) \tag{7.9}$$

が、$a$ の変化にどう反応するかを考えます。$a$ が変わると最適解 $x^*(a)$ も変わるので、一見すると $x^*(a)$ の変化も計算しなければならないように思えます。ところが、その必要はありません。

**定理 7.4（包絡線定理：制約なしの場合）**

$x^*(a)$ が微分可能で、各 $a$ で一階条件 $f_x(x^*(a), a) = 0$ を満たすならば、

$$V'(a) = f_a\big(x^*(a), a\big) \tag{7.10}$$

である。

**証明**　$V(a) = f(x^*(a), a)$ を連鎖律で微分すると

$$\begin{aligned} V'(a) &= f_x\big(x^*(a), a\big)\,\frac{dx^*}{da} + f_a\big(x^*(a), a\big) && \text{（連鎖律）} \\ &= f_a\big(x^*(a), a\big) && \text{（一階条件より第1項は 0）} \end{aligned}$$

となります。 □

**数式の読み方**

- 最適解では $f$ は $x$ について平らなので（$f_x = 0$）、$x^*$ が少し動いても $f$ の値はほとんど変わりません。そのため、パラメータの「直接の効果」$f_a$ だけを計算すればよいのです。

制約付きの問題でも、同じことが成り立ちます。

**定理 7.5（包絡線定理：制約付きの場合）**

$V(a) = \max_x f(x, a)$ s.t. $g(x, a) = c$ とし、最適解 $x^*(a)$ と乗数 $\lambda(a)$ が $a$ について微分可能で、各 $a$ でラグランジュの条件 $\nabla_x f = \lambda \nabla_x g$ を満たすとする。このとき、ラグランジュ関数 $\mathcal{L}(x, \lambda, a) = f(x, a) + \lambda\big(c - g(x, a)\big)$ について

$$V'(a) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}\big(x^*(a), \lambda(a), a\big) = f_a - \lambda g_a$$

である。

**証明**　$V(a) = f(x^*(a), a)$ と、恒等式 $g(x^*(a), a) = c$ を $a$ で微分します（$x^{*\prime} = dx^*/da$）。

$$\begin{aligned} V'(a) &= \nabla_x f \cdot x^{*\prime} + f_a && \text{（連鎖律）} \\ 0 &= \nabla_x g \cdot x^{*\prime} + g_a && \text{（制約の恒等式を微分）} \\ V'(a) &= \lambda\,\nabla_x g \cdot x^{*\prime} + f_a = -\lambda g_a + f_a && \text{（ラグランジュの条件、2本目を代入）} \end{aligned}$$

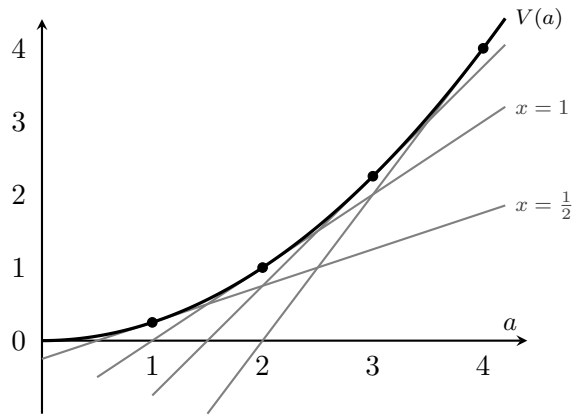
□

**系 7.6（乗数は制約の限界価値）**

$V(c) = \max f(x)$ s.t. $g(x) = c$ について、定理 7.5 の仮定のもとで $V'(c) = \lambda(c)$ である。

**証明**　定理 7.5 で $a = c$ とすると、$f$ と $g$ は $c$ に依存せず、$\mathcal{L}$ は $\lambda c$ の項でだけ $c$ に依存するので、$\partial\mathcal{L}/\partial c = \lambda$ です。 □

**図 7.2**　包絡線としての最大値関数




$f(x,a) = ax - x^2$。灰色の直線は $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ に固定したときの $f(x,a)$、黒い曲線は $V(a) = a^2/4$（$x^*(a) = a/2$）。

**図の読み方**

1. 灰色の直線は、$x$ をある値に固定したまま $a$ だけを動かしたときの $f(x,a)$ です。
2. 黒い曲線 $V(a)$ は、各 $a$ で最も高い値をとる直線の高さで、すべての直線の上側を包む「包絡線」になっています。
3. 各直線は、その $x$ が最適になる $a = 2x$ の点（黒い点）で $V$ に接しています。接点では傾きが等しいので $V'(a) = f_a(x^*(a), a) = x^*(a)$ となり、包絡線定理の名前の由来になっています。

**補足：経済学での使いどころ　「値の関数を微分するときは、最適解の変化を無視してよい」**

包絡線定理は、大学院ミクロで最も頻繁に使われる定理の一つです。結論を一言でいうと、「最適化された値をパラメータで微分するときは、最適な選択が変わる効果を無視して、パラメータの直接の効果だけを計算すればよい」です。

- 間接効用関数を所得で微分 → 乗数 $\lambda$（所得の限界効用）。
- 間接効用関数を価格で微分 → $-\lambda x_\ell$、そこからロイの恒等式。
- 支出関数・費用関数を価格で微分 → ヒックス需要・条件付き要素需要（シェパードの補題）。
- 利潤関数を価格で微分 → 供給（ホテリングの補題）。
- 動学的計画法のベルマン方程式の「包絡線条件」（大学院マクロ）。

次の第8章では、これらを双対性の理論としてまとめます。

包絡線定理を消費者の問題に当てはめると、大学院ミクロの消費者理論で中心となる公式が得られます。

---

**系 7.7（ロイの恒等式）**

間接効用関数 $v(p,w) = \max u(x)$ s.t. $p\cdot x \le w$ が微分可能で、$\frac{\partial v}{\partial w} > 0$ ならば、マーシャル需要は

$$x_\ell(p,w) = -\frac{\partial v/\partial p_\ell}{\partial v/\partial w}$$

で与えられる。

---

**証明**　局所非飽和な選好では予算制約は等号で成り立つので、等式制約 $p\cdot x = w$ の問題とみなせます。ラグランジュ関数は $\mathcal{L} = u(x) + \lambda(w - p\cdot x)$ で、需要と乗数が微分可能なら、包絡線定理（定理 7.5）から

$$\frac{\partial v}{\partial p_\ell} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\ell} = -\lambda x_\ell(p,w) \qquad (p_\ell \text{ は } -\lambda p_\ell x_\ell \text{ の項にだけ現れる})$$
$$\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \lambda \qquad (w \text{ は } \lambda w \text{ の項にだけ現れる})$$

です。1本目を2本目で割ると結論が得られます。　□

**補足：乗数の意味**

2本目の式 $\frac{\partial v}{\partial w} = \lambda$ から、ラグランジュ乗数 $\lambda$ は「所得が1単位増えたときの効用の増加分」、つまり所得の限界効用です。一般に、乗数は制約を1単位緩めたときの最大値の増加分（シャドー・プライス）を表します。

---

**系 7.8（シェパードの補題）**

支出関数 $e(p,u) = \min p \cdot x$ s.t. $u(x) \geq u$ が微分可能ならば、ヒックス（補償）需要は $h_\ell(p,u) = \frac{\partial e}{\partial p_\ell}(p,u)$ で与えられる。

---

**証明**　ラグランジュ関数 $\mathcal{L} = p \cdot x + \mu\big(u - u(x)\big)$ に包絡線定理（定理 7.5）を当てはめると、$p_\ell$ は $p_\ell x_\ell$ の項にだけ現れるので $\frac{\partial e}{\partial p_\ell} = x_\ell = h_\ell(p,u)$ です（最小化問題でも同じ議論が成り立ちます）。第8章では、ヒックス需要の微分可能性を仮定しない証明を与えます。□

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- ラグランジュ法・KKT条件 → 効用最大化と端点解、支出最小化、費用最小化。
- 制約想定 → 一階条件が使えることの確認（線形の制約やスレーター条件なら自動的に成り立つ）。
- 相補スラック条件 → 端点解、企業の操業停止条件、一般均衡の自由財。
- KKT条件の十分性 → 一階条件から求めた需要・供給を解と呼べる根拠。
- 包絡線定理 → ロイの恒等式、シェパードの補題、ホテリングの補題、乗数の解釈（シャドー・プライス）。

**要点**

- ラグランジュの条件 $\nabla f = \lambda \nabla g$ は、目的関数の等高線と制約が接していることを表します。
- 不等式制約ではKKT条件が（制約想定のもとで）必要条件になり、その証明の核心はファルカスの補題です。相補スラック条件が端点解や使い切らない制約を扱います。
- 目的関数が凹、制約が凸なら、KKT条件は十分条件にもなります。
- 包絡線定理 $V'(a) = \partial \mathcal{L}/\partial a$ から、ロイの恒等式とシェパードの補題が導かれます。

**次の章へ**　次の章では、包絡線定理と分離超平面定理（支持関数）を合流させて、消費者理論・生産者理論の双対性を学びます。

**大学院とのつながり**　シェパードの補題を価格でもう一度微分し、ロイの恒等式と組み合わせると、スルツキー方程式が導かれます。

第8章

# 双対性と比較静学

**ここまでの流れ**　第5章で分離超平面定理を、第7章で包絡線定理とシェパードの補題・ロイの恒等式を学びました。

**前提知識**　第5章の凹関数と分離超平面定理（定理 5.18）。第6章の凹性とヘッセ行列（定理 6.8）、ヤングの定理、オイラーの定理。第7章の包絡線定理とロイの恒等式（系 7.7）。

**この章の問い**　「予算の中で効用を最大にする」問題と、「目標の効用を最も安く達成する」問題は、どのような関係にあるのでしょうか。また、観察できる需要の動きには、理論からどのような制約がかかるのでしょうか。

**この章で分かること**　支持関数とその凹性、双対定理（閉凸集合は支持関数から復元できる）、支出関数の性質、シェパードの補題（微分可能性だけを仮定した証明）、効用最大化と支出最小化の双対性、スルツキー方程式、スルツキー行列の対称性・負半定値性、利潤関数とホテリングの補題。

## 8.1　この章の見取り図

消費者理論には、4つの基本的な関数があります。効用最大化から得られるマーシャル需要 $x(p,w)$ と間接効用関数 $v(p,w)$、支出最小化から得られるヒックス需要 $h(p,u)$ と支出関数 $e(p,u)$ です。この章の目標は、次の2つを示すことです。

1. 支出関数は、上方集合 $\{x : u(x) \geq u\}$ の「支持関数」であり、それだけで凹性・同次性などの性質が決まる（8.2〜8.3節）。
2. 2つの最適化問題は互いに「裏返し」の関係にあり、そこからスルツキー方程式と、観察できる需要への制約（スルツキー行列の対称性と負半定値性）が導かれる（8.4〜8.5節）。

道具は2つしかありません。分離超平面定理（凸集合の幾何）と、包絡線定理の考え方（最適化された値の微分）です。

この章を通して、効用関数 $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ は連続で、選好は**局所非飽和**（どの $x$ のどんな近くにも、$x$ より好ましい組がある）であるとし、価格は $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ とします。

## 8.2　支持関数と双対定理

**定義 8.1（支持関数）**

空でない集合 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ について、

$$\mu_K(p) = \inf_{x \in K} p \cdot x \qquad (p \in \mathbb{R}^n)$$

を $K$ の支持関数という（値が $-\infty$ になる $p$ もありうる）。

**数式の読み方：支持関数の読み方**

- $p$ を価格とみると、$\mu_K(p)$ は「$K$ の中の組を、価格 $p$ で最も安く買うときの費用」です。
- 図形的には、法線ベクトル $p$ の超平面 $\{x : p \cdot x = \mu_K(p)\}$ を、$K$ に下から接するまで動かしたときの「高さ」です（図 8.1）。
- $K = \{x : u(x) \geq u\}$（上方集合）とすれば、$\mu_K(p)$ は支出関数 $e(p, u)$ そのものです。

**命題 8.2（支持関数の性質）**

$\mu_K$ が有限の値をとる $p$ の範囲で、

1. $\mu_K$ は1次同次である：$t > 0$ について $\mu_K(tp) = t\mu_K(p)$。
2. $\mu_K$ は凹関数である。

**証明**

**ステップ1**　同次性

$t > 0$ なら $(tp) \cdot x = t\, p \cdot x$ で、正の定数倍は下限と入れかえられるので、$\mu_K(tp) = t\mu_K(p)$ です。

**ステップ2**　凹性

$p, p'$ と $\lambda \in [0, 1]$ をとり、$p'' = \lambda p + (1 - \lambda)p'$ とおきます。任意の $x \in K$ について

$$p'' \cdot x = \lambda\, p \cdot x + (1 - \lambda)\, p' \cdot x \;\geq\; \lambda \mu_K(p) + (1 - \lambda)\mu_K(p')$$

です（各項を下限で下から抑える）。左辺の $x \in K$ についての下限をとると、$\mu_K(p'') \geq \lambda\mu_K(p) + (1 - \lambda)\mu_K(p')$ です。　□

**数式の読み方：凹性の経済学的な意味**

「価格が変わっても買う組を変えなければ、費用は価格の1次式」です。実際には組を最適に選び直せるので、費用はその1次式より低くなります。1次式（直線）たちの下限なので、凹関数になるのです。この議論には、選好や $K$ の凸性はまったく使っていません。

**定理 8.3（双対定理）**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ が空でない閉凸集合ならば、

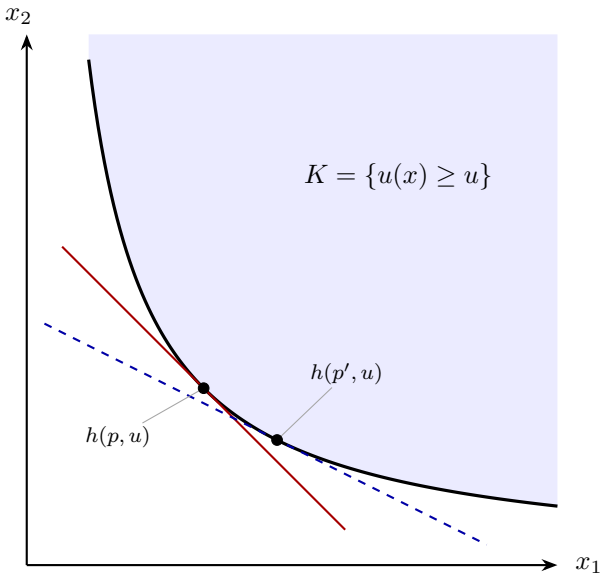
$$K = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n : \text{すべての } p \in \mathbb{R}^n \text{ について } p \cdot x \geq \mu_K(p)\bigr\}.$$

**証明のアイデア**

右辺は「どの価格で測っても、$K$ の最安の費用以上かかる組」の集合で、$K$ を含む半空間をすべて重ねたものです。$K$ の外の点は、分離超平面定理によって、ある半空間から外れます。

**証明**　右辺を $K'$ とします。$x \in K$ なら、支持関数の定義からすべての $p$ で $p \cdot x \geq \mu_K(p)$ なので、$K \subseteq K'$ です。逆に $x \notin K$ とします。定理 5.18 の証明から、$c^* = P_K(x)$、$q = x - c^*$ について、すべての $c \in K$ で $q \cdot c \leq q \cdot c^* < q \cdot x$ です。$p = -q$ とおくと $p \cdot c \geq p \cdot c^*$ なので $\mu_K(p) \geq p \cdot c^* > p \cdot x$ で、$x \notin K'$ です。よって $K' \subseteq K$ です。 □

**図 8.1**　支持関数：最も安く買える点で接する超平面




$u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$、$u = 2$。赤の直線は価格 $p = (1, 1)$、青の破線は $p' = (\frac{1}{2}, 1)$ での支出の等高線。

**図の読み方**

1. 薄い青の領域が上方集合 $K$（効用 2 以上の組）です。
2. 価格 $p$ の支出の等高線（赤）を左下から動かし、$K$ に初めて触れる点がヒックス需要 $h(p,u)$、そのときの支出の値が $e(p,u)=\mu_K(p)$ です。
3. 価格が変わると接する点も変わります（青の破線）。すべての価格での接線を重ねると、その上側の共通部分が $K$ を復元します（定理 8.3）。

**補足：経済学での使いどころ**

双対定理は、「支出関数が分かれば、（凸な）選好の上方集合が分かる」ことを意味します。選好そのものは観察できませんが、支出関数や需要は（原理的に）データから推定できます。双対性の理論は、観察できる関数から選好を復元し、需要の推定や厚生分析（等価変分・補償変分）を行う根拠になっています。選好が凸でない場合、支出関数から復元されるのは上方集合の「凸包の閉包」です。

## 8.3 支出関数とシェパードの補題

支出最小化問題

$$e(p,u)=\min_{x\in\mathbb{R}^L_+} p\cdot x \quad \text{s.t.} \quad u(x)\geq u$$

の解（ヒックス需要）を $h(p,u)$ と書きます。$p\gg 0$ なら、上方集合のうち支出が一定以下の部分はコンパクトなので、ワイエルシュトラスの定理から解が存在します（第3章の補足「コンパクトかどうかの確かめ方」）。

**命題 8.4（支出関数の性質）**

$u$ を固定すると、$e(\cdot,u)$ は $\mathbb{R}^L_{++}$ 上で

1. 1次同次、
2. 凹関数、
3. 各価格について非減少

である。また、ヒックス需要 $h(p,u)$ は $p$ について0次同次である。

**証明**　1と2は、$e(\cdot,u)=\mu_K$（$K=\{x\in\mathbb{R}^L_+ : u(x)\geq u\}$）と命題 8.2 から従います。3は、$p\leq p'$ なら $K\subseteq\mathbb{R}^L_+$ の各点で $p\cdot x\leq p'\cdot x$ なので、下限も $\mu_K(p)\leq\mu_K(p')$ だからです。最後に、$t>0$ について $(tp)\cdot x$ を最小にする $x$ は $p\cdot x$ を最小にする $x$ と同じなので、$h(tp,u)=h(p,u)$ です。 □

**定理 8.5（シェパードの補題）**

$e(\cdot,u)$ が $\bar{p}\in\mathbb{R}^L_{++}$ で微分可能ならば、$\bar{p}$ での支出最小化問題の任意の解 $\bar{h}$ について $\nabla_p e(\bar{p},u)=\bar{h}$ である。特に、ヒックス需要は $\bar{p}$ でただ一つに決まる。

**証明のアイデア**

「価格が変わっても $\bar{h}$ を買い続ける」費用 $p\cdot\bar{h}$ は、最適に選び直した費用 $e(p,u)$ 以上で、$\bar{p}$ では等しくなります。つまり、1次関数 $p\cdot\bar{h}$ は凹関数 $e(\cdot,u)$ に $\bar{p}$ で上から接しています（図 7.2 と同じ形）。接しているので傾きが等しい、というのが結論です。ヒックス需要の微分可能性は必要ありません。

**証明**　$\varphi(p)=p\cdot\bar{h}-e(p,u)$ とおきます。$\bar{h}$ はどの価格でも効用 $u$ を達成する候補の一つなので、すべての $p$ で $p\cdot\bar{h}\geq e(p,u)$、つまり $\varphi(p)\geq 0$ です。また $\varphi(\bar{p})=0$ です。したがって $\varphi$ は $\bar{p}$ で最小で、$\bar{p}$ は開集合 $\mathbb{R}^L_{++}$ の点、$\varphi$ は $\bar{p}$ で微分可能なので、勾配は 0 です。

$$0=\nabla\varphi(\bar{p})=\bar{h}-\nabla_p e(\bar{p},u)\qquad\qquad(p\cdot\bar{h}\text{ の勾配は }\bar{h})$$

解が2つあれば両方とも $\nabla_p e(\bar{p},u)$ に等しいので、解はただ一つです。　□

**計算例：コブ＝ダグラス型の支出関数**

$u(x)=x_1^a x_2^{1-a}$（$0<a<1$）では、支出最小化の一階条件から

$$e(p,u)=u\Big(\frac{p_1}{a}\Big)^a\Big(\frac{p_2}{1-a}\Big)^{1-a},\qquad h_1(p,u)=\frac{\partial e}{\partial p_1}=\frac{a\,e(p,u)}{p_1}$$

です。$e$ は $p$ について1次同次で、$h_1$ は0次同次です。$h_1$ を $p_1$ で微分すると $\partial h_1/\partial p_1=-(1-a)h_1/p_1<0$ で、補償需要は自己価格について減少しています。

**補足：生産者理論での同じ構造**

生産集合 $Y\subseteq\mathbb{R}^L$ の利潤関数 $\pi(p)=\sup_{y\in Y}p\cdot y$ は、$\pi(p)=-\mu_Y(-p)$ と書けるので、$p$ について1次同次で**凸**関数です。シェパードの補題と同じ議論から、$\pi$ が微分可能なら $\nabla\pi(p)=y(p)$（供給と要素需要、**ホテリングの補題**）で、$\pi$ が $C^2$ 級なら $D^2\pi$ は正半定値です（定理 6.8 を $-\pi$ に当てはめる）。「自分の価格が上がれば供給は増え、要素価格が上がれば要素需要は減る」という供給の法則は、ここから出てきます。費用関数 $c(w,q)=\min\{w\cdot z:f(z)\geq q\}$ は支出関数とまったく同じ形です。

## 8.4　効用最大化と支出最小化の双対性

**命題 8.6（2つの問題の双対性）**

$u$ は連続で選好は局所非飽和、$p \in \mathbb{R}^L_{++}$ とする。

1. $w > 0$ で $x^*$ が効用最大化の解なら、$x^*$ は効用水準 $u(x^*)$ での支出最小化の解で、$e(p, v(p,w)) = w$ である。
2. $u > u(0)$ で $h^*$ が支出最小化の解なら、$h^*$ は所得 $e(p,u)$ での効用最大化の解で、$v(p, e(p,u)) = u$ である。

したがって、解が一つに決まるとき $x(p,w) = h(p, v(p,w))$、$h(p,u) = x(p, e(p,u))$ である。

**証明**

**ステップ1**　性質1

局所非飽和なら予算は使い切るので $p \cdot x^* = w$ です（使い残すと、予算内の近くにより良い組がある）。$u(x) \geq u(x^*)$ で $p \cdot x < w$ となる $x$ があったとします。局所非飽和より、$x$ のいくらでも近くに $u(x') > u(x) \geq u(x^*)$ となる $x'$ があり、十分近ければ $p \cdot x' < w$ です。これは $x^*$ が予算内で最適であることに反します。よって効用 $u(x^*)$ を達成する最小の支出は $w$ で、$x^*$ がそれを達成します。$v(p,w) = u(x^*)$ なので $e(p, v(p,w)) = w$ です。

**ステップ2**　性質2

$e = e(p,u)$ とおきます。$u > u(0)$ なので $h^* \neq 0$、したがって $e = p \cdot h^* > 0$ です（$p \gg 0$）。まず $u(h^*) = u$ です。$u(h^*) > u$ なら、連続性から $t < 1$ を 1 に近くとると $u(th^*) > u$ で、$p \cdot (th^*) = te < e$ となり、最小性に反するからです。次に、$p \cdot x \leq e$ で $u(x) > u$ となる $x$ があったとすると、同じく $t < 1$ を 1 に近くとれば $u(tx) > u$、$p \cdot (tx) < e$ となって最小性に反します。よって所得 $e$ の予算集合での効用の最大値は $u$ で、$h^*$ がそれを達成します。　□

**数式の読み方：双対性の読み方**

- 「所得 $w$ で達成できる最大の効用」と「その効用を達成する最小の所得」は、ちょうど逆の関係にあります。$e(p,\cdot)$ と $v(p,\cdot)$ は互いの逆関数です。
- マーシャル需要とヒックス需要は、同じ点を別の問題の解として見たものです。違いは、価格が変わったときに「所得を固定する」か「効用を固定する」かだけです。

## 8.5　スルツキー方程式とスルツキー行列

**定理 8.7（スルツキー方程式）**

命題 8.6 の仮定のもとで、需要が一つに決まり、$x$、$h$、$e$ が微分可能であるとする。$u = v(p,w)$ について、すべての $\ell, k$ で

$$\frac{\partial x_\ell}{\partial p_k}(p,w) = \frac{\partial h_\ell}{\partial p_k}(p,u) - x_k(p,w)\,\frac{\partial x_\ell}{\partial w}(p,w).$$

**証明**　恒等式 $h_\ell(p,u) = x_\ell\big(p, e(p,u)\big)$（命題 8.6）を $p_k$ で微分します。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_\ell}{\partial p_k} &= \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell}{\partial w}\,\frac{\partial e}{\partial p_k} && \text{（連鎖律）}\\
&= \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell}{\partial w}\,h_k(p,u) && \text{（シェパードの補題、定理 8.5）}\\
&= \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell}{\partial w}\,x_k(p,w) && \text{（}h(p,u)=x(p,w)\text{、}e(p,u)=w\text{）}
\end{aligned}$$

移項すれば結論です。　□

**数式の読み方：スルツキー方程式の読み方**

- 左辺は価格が変わったときの（観察できる）需要の変化で、右辺の第1項は効用を一定に保ったときの変化（**代替効果**）、第2項は価格上昇で実質所得が $x_k$ だけ減ることによる変化（**所得効果**）です。
- $\ell = k$ のとき、代替効果は次の定理から 0 以下です。所得効果が逆向きで十分に大きい（劣等財で、$\partial x_\ell/\partial w < 0$ の絶対値が大きい）なら、需要が価格とともに増えるギッフェン財が起こりえます。

**定理 8.8（スルツキー行列の性質）**

$e(\cdot,u)$ が $C^2$ 級であるとし、スルツキー行列を $S = D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u)$（$(\ell,k)$ 成分が $\partial h_\ell/\partial p_k$）とする。このとき

1. $S$ は対称である。
2. $S$ は負半定値である。特に $\partial h_\ell/\partial p_\ell \le 0$。
3. $Sp = 0$。

**証明**　シェパードの補題より $h = \nabla_p e$ なので、$S$ は $e$ のヘッセ行列です。

1. ヘッセ行列はヤングの定理より対称です。

2. $e(\cdot, u)$ は凹関数（命題 8.4）なので、定理 6.8 よりヘッセ行列は負半定値です。対角成分は、第 $\ell$ 成分だけが 1 のベクトル $e_\ell$ について $e_\ell^\top S e_\ell \leq 0$ です。

3. $h_\ell$ は $p$ について0次同次（命題 8.4）なので、オイラーの定理（$k = 0$）から $\sum_k p_k \, \partial h_\ell / \partial p_k = 0$ です。

□

**補足：経済学での使いどころ**

スルツキー方程式を使うと、代替効果の行列は、観察できるマーシャル需要から $S_{\ell k} = \partial x_\ell / \partial p_k + x_k \, \partial x_\ell / \partial w$ として計算できます。定理 8.8 は、合理的な消費者の需要なら、この行列が**対称で負半定値**でなければならないことを述べています。これが、需要体系の実証分析で検定される「理論の制約」（対称性制約と負性制約）です。補償需要の法則 $\partial h_\ell / \partial p_\ell \leq 0$ は、ミクロ経済学の数少ない「必ず成り立つ比較静学」の一つです。

**発展：積分可能性**

逆に、需要関数 $x(p, w)$ が予算を使い切り、0次同次で、スルツキー行列が対称かつ負半定値であれば、その需要を生み出す選好が存在することが知られています（積分可能性定理。本書では証明しません）。証明の筋道は、シェパードの補題 $\nabla_p e = h(p, u) = x(p, e)$ を「$e$ についての偏微分方程式」とみなし、対称性を使ってそれを解き（ここが「積分」の部分です）、得られた $e$ から双対定理で上方集合を復元する、というものです。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- 支持関数と双対定理 → 支出関数・費用関数・利潤関数の性質、観察できる関数からの選好・技術の復元。
- シェパードの補題・ホテリングの補題 → 値の関数を微分して需要・供給を求める。需要体系の推定。
- 効用最大化と支出最小化の双対性 → マーシャル需要とヒックス需要の関係、等価変分・補償変分による厚生分析。
- スルツキー方程式・スルツキー行列 → 代替効果と所得効果の分解、ギッフェン財、需要の実証分析で検定される制約。

**要点**

- 支持関数 $\mu_K(p) = \inf_{x \in K} p \cdot x$ は、$K$ の形によらず1次同次で凹関数です。$K$ が閉凸集合なら、支持関数から $K$ を復元できます（双対定理）。
- 支出関数は上方集合の支持関数なので、価格について1次同次・凹・非減少です。微分可能なら、その勾配がヒックス需要です（シェパードの補題）。
- 効用最大化と支出最小化は互いに裏返しの関係にあり、$h(p,u) = x(p, e(p,u))$ を微分するとスルツキー方程式が得られます。
- スルツキー行列は支出関数のヘッセ行列なので、対称・負半定値で、$Sp = 0$ を満たします。

**次の章へ**　ここまでは確実な世界の選択でした。次の章では、結果が確率的に決まる「くじ」の上の選択を扱い、期待効用定理、危険回避、ベイズの定理、そして資産価格の基礎となる状態価格と無裁定の定理を学びます。

**大学院とのつながり**　双対性の考え方は、費用関数による生産構造の推定、厚生分析、そして資産価格理論（状態価格による価格づけ）まで、形を変えて繰り返し現れます。

第9章

# 確率と期待効用

**ここまでの流れ**　ここまでの選択は、結果が確実に決まる世界でのものでした。第5章では、凹関数についてのジェンセンの不等式と、ファルカスの補題を学びました。
**前提知識**　第1章の選好関係と効用関数による表現。第3章の単体。第4章の連続な効用関数の存在定理の証明（上限をとる議論）。第5章のジェンセンの不等式（定理 5.10）とファルカスの補題（補題 5.22）。第6章のテイラーの定理。
**この章の問い**　結果が確率的に決まるとき、人はどのように選択を比べるのでしょうか。「期待値ではなく期待効用で比べる」のはなぜ正当化されるのでしょうか。新しい情報を得たとき、信念はどう変わるべきでしょうか。そして、資産の価格はどのように決まるのでしょうか。
**この章で分かること**　有限状態の確率と期待値、ベイズの定理、くじの集合と期待効用定理（独立性公理と連続性公理からの証明）、危険回避とジェンセンの不等式、アロー＝プラットの危険回避度、正規分布のもとでの信念の更新、状態価格と資産価格の基本定理（ファルカスの補題による証明）。

## 9.1　この章の見取り図

この章では、測度論を使わず、起こりうる状態が有限個の場合だけを扱います。それでも、不確実性下の選択、ゲーム理論の混合戦略と信念、資産価格の基本的な考え方は、すべてこの範囲で厳密に述べられます。

前半（9.2〜9.4節）は「個人の選択」で、期待効用定理が中心です。後半（9.5〜9.6節）は「情報と市場」で、ベイズの定理と資産価格の基本定理が中心です。資産価格の基本定理は、第5章のファルカスの補題がそのまま答えになる、という意味で、この本の道具の美しい応用です。

## 9.2　有限状態の確率と期待値

**定義 9.1（確率・確率変数・期待値）**

状態の集合を $\Omega = \{1, \dots, S\}$ とする。$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_S)$ が $\pi_s \geq 0$、$\sum_s \pi_s = 1$ を満たすとき（つまり $\pi$ が単体の点のとき）、$\pi$ を確率という。事象 $A \subseteq \Omega$ の確率を $P(A) = \sum_{s \in A} \pi_s$ と書く。状態ごとに実数を対応させる写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ を確率変数といい、その期待値を $\mathrm{E}[X] = \sum_s \pi_s X(s)$、分散を $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)^2]$ と定める。$P(B) > 0$ のとき、$B$ のもとでの $A$ の条件付き確率を $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$ と定める。

**数式の読み方：定義の読み方**

- 確率変数は、$\mathbb{R}^S$ のベクトル $(X(1), \dots, X(S))$ とみなせます。期待値 $\mathrm{E}[X] = \pi \cdot X$ は、確率をウェイトにした内積です。したがって期待値は線形で、$\mathrm{E}[aX + bY] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y]$ が成り立ちます。
- 条件付き確率は、「$B$ が起きたと分かったら、$B$ の外の状態を消し、残った状態の確率を合計が 1 になるように比例的に大きくする」という操作です。

## 9.3　くじと期待効用定理

結果の集合を有限集合 $C = \{c_1, \dots, c_N\}$ とします。結果 $c_n$ が確率 $L_n$ で起こる**くじ**を、確率のベクトル $L = (L_1, \dots, L_N)$ で表します。くじの集合は単体 $\mathcal{L} = \{L \in \mathbb{R}^N_+ : \sum_n L_n = 1\}$ です。確率 $\alpha$ でくじ $L$、確率 $1-\alpha$ でくじ $L'$ が行われる複合くじは、最終的な結果の確率で見ると $\alpha L + (1-\alpha)L'$（凸結合）に等しいので、この2つを同一視します。結果 $c_n$ を確実に得るくじ（第 $n$ 成分だけが 1）を $\delta_n$ と書きます。

くじの上の合理的な選好 $\succsim$ について、次の2つの公理を考えます。

**定義 9.2（連続性公理・独立性公理）**

1. （連続性）任意の $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ について、集合 $\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\}$ と $\{\alpha \in [0,1] : L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L'\}$ は閉集合である。
2. （独立性）任意の $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ と $\alpha \in (0,1]$ について、

$$L \succsim L' \iff \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

**数式の読み方：独立性公理の意味**

両方のくじに、同じくじ $L''$ を同じ確率 $1-\alpha$ で混ぜても、好みの順序は変わらない、という公理です。「$L''$ が実現した世界ではどちらを選んでも同じなので、$L''$ が実現しない世界での比較だけが意味をもつ」という考え方です。$\iff$ なので、$\succ$ と $\sim$ についても同じことが成り立ちます。

**定義 9.3（期待効用）**

関数 $U:\mathcal{L}\to\mathbb{R}$ が、ある数 $u_1,\dots,u_N$ を使って $U(L)=\sum_n L_n u_n$ と書けるとき、$U$ は期待効用の形をもつという。$u_n$ を結果 $c_n$ の効用（ベルヌーイ効用、フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン効用）という。

**定理 9.4（期待効用定理）**

くじの集合 $\mathcal{L}$ 上の合理的な選好 $\succsim$ が連続性公理と独立性公理を満たし、すべての $L$ について $\bar{L}\succsim L\succsim \underline{L}$ となるくじ $\bar{L},\underline{L}$ があって $\bar{L}\succ\underline{L}$ であるとする。このとき、$\succsim$ を表現する期待効用の形の関数 $U$ が存在する。

**証明のアイデア**

各くじ $L$ を、それと無差別になる「最良のくじと最悪のくじの混合」$\alpha\bar{L}+(1-\alpha)\underline{L}$ の $\alpha$ で測ります。これは、第4章の効用関数の存在定理で、対角線の上の点で効用を測ったのとまったく同じ発想です（連続性公理が存在を、単調性が一意性を保証します）。山場は、こうして作った $U$ が**線形**（$U(\beta L+(1-\beta)L')=\beta U(L)+(1-\beta)U(L')$）になることで、ここで独立性公理が働きます。線形な関数は、確実な結果での値 $u_n=U(\delta_n)$ の加重平均になります。

**証明**　$M(\alpha)=\alpha\bar{L}+(1-\alpha)\underline{L}$ と書きます。

**ステップ1**　混合は「良い方の重み」について単調

まず、$L\succ L'$ で $\alpha\in(0,1)$ なら $L\succ \alpha L+(1-\alpha)L'$ です。独立性公理（重み $1-\alpha$）より $(1-\alpha)L+\alpha L\succ(1-\alpha)L'+\alpha L$ だからです。次に $1\ge\beta>\alpha\ge 0$ とします。$\alpha<1$ なので、いま示したことから $\bar{L}\succ M(\alpha)$ です。$\gamma=(\beta-\alpha)/(1-\alpha)\in(0,1]$ とおくと $M(\beta)=\gamma\bar{L}+(1-\gamma)M(\alpha)$ と書け、独立性公理（$\bar{L}\succ M(\alpha)$ に重み $\gamma$ で $M(\alpha)$ を混ぜる）より $M(\beta)\succ\gamma M(\alpha)+(1-\gamma)M(\alpha)=M(\alpha)$ です。

**ステップ2**　無差別になる重みがただ一つある

$L$ を固定し、$A^+=\{\alpha\in[0,1]:M(\alpha)\succsim L\}$、$A^-=\{\alpha\in[0,1]:L\succsim M(\alpha)\}$ とおきます。連続性公理よりどちらも閉集合で、$1\in A^+$、$0\in A^-$ です。完備性より $A^+\cup A^-=[0,1]$ です。第4章の効用関数の存在定理のステップ2と同じく、$s=\sup A^-$ をとれば $s\in A^-$（閉

集合）で、$s < 1$ なら $(s, 1] \subseteq A^+$ から $s \in A^+$（閉集合）なので、$s \in A^+ \cap A^-$、つまり $M(s) \sim L$ です（$s = 1$ なら $1 \in A^+$）。ステップ1より、そのような $s$ はただ一つです。これを $U(L)$ とおきます。

**ステップ3**　$U$ は $\succsim$ を表現する

推移性から $L \succsim L' \iff M(U(L)) \succsim M(U(L'))$ で、ステップ1から右辺は $U(L) \geq U(L')$ と同値です。

**ステップ4**　$U$ は線形

$L \sim M(U(L))$ と独立性公理（$\sim$ の場合）から、$\beta L + (1-\beta)L' \sim \beta M(U(L)) + (1-\beta)L'$ です。同じく $L' \sim M(U(L'))$ から、右辺は $\beta M(U(L)) + (1-\beta)M(U(L'))$ と無差別です。この最後のくじは、計算すると $M\big(\beta U(L) + (1-\beta)U(L')\big)$ に等しいので、$U$ の一意性から

$$U\big(\beta L + (1-\beta)L'\big) = \beta U(L) + (1-\beta)U(L')$$

です。

**ステップ5**　期待効用の形

$L = \sum_n L_n \delta_n$ はくじ $\delta_n$ の凸結合です。ステップ4を、第5章の「凸集合は凸結合で閉じている」の証明と同じ帰納法で繰り返すと、$U(L) = \sum_n L_n U(\delta_n)$ です。$u_n = U(\delta_n)$ とおけば、$U$ は期待効用の形です。　□

**数式の読み方：定理の読み方と補足**

- 期待効用 $\sum_n L_n u_n$ は、くじの確率 $L$ について**線形**です。これに対して、確実な世界の効用関数は単調な変換をしても同じ選好を表しました。期待効用の $u$ は、正の1次変換 $au + b$（$a > 0$）でしか変えられません（本書では証明しません）。「$u$ の曲がり方」が意味をもつのはこのためで、それが次の節の危険回避を表します。
- 結果が有限個なら、最良・最悪のくじは、確実な結果のくじ $\delta_n$ の中から選べることが、独立性公理から示せます（本書では証明しません）。
- 実験では、独立性公理に反する選択（アレのパラドックス）が観察されることがあり、それを説明するための非期待効用理論も研究されています。

**補足：経済学での使いどころ**

期待効用定理は、不確実性下の選択を「期待効用の最大化」として扱う根拠です。ゲーム理論の混合戦略の期待利得、保険・ポートフォリオ選択、オークション、契約理論、マクロ経済学の確率的な最適化（$\mathrm{E}\sum \beta^t u(c_t)$）は、すべてこの形を前提にしています。期待効用がくじについて線形であることは、混合戦略の最適反応が凸集合になる（第11章）理由でもあります。

## 9.4 危険回避

ここからは結果を金額 $x \in \mathbb{R}$ とし、$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は増加関数とします。確率変数 $X$（金額のくじ）の期待効用は $\mathrm{E}[u(X)]$ です。

**定義 9.5（危険回避・確実性等価・リスク・プレミアム）**

すべての確率変数 $X$ について $\mathrm{E}[u(X)] \le u(\mathrm{E}[X])$ が成り立つとき、意思決定者は危険回避的であるという。$u(c_X) = \mathrm{E}[u(X)]$ を満たす金額 $c_X$ を $X$ の確実性等価、$\rho_X = \mathrm{E}[X] - c_X$ をリスク・プレミアムという。

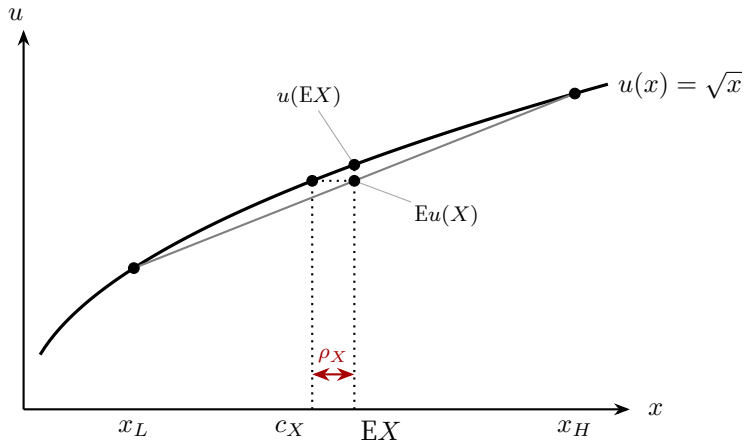
**命題 9.6（危険回避と凹性）**

$u$ が凹関数ならば、意思決定者は危険回避的で、リスク・プレミアムは 0 以上である。

**証明**　ジェンセンの不等式（定理 5.10）で、点を $X(s)$、重みを $\pi_s$ とすれば $\mathrm{E}[u(X)] \le u(\mathrm{E}[X])$ です。$u$ は増加関数で $u(c_X) = \mathrm{E}[u(X)] \le u(\mathrm{E}[X])$ なので $c_X \le \mathrm{E}[X]$、つまり $\rho_X \ge 0$ です。 □

逆に、すべての2点のくじで危険回避的なら $u$ は凹関数です（2点のくじについての不等式は凹性の定義そのものです）。

**図 9.1**　危険回避とリスク・プレミアム




$X$ は確率 $\frac{1}{2}$ ずつで $x_L = 2$、$x_H = 10$。$\mathrm{E}X = 6$、$\mathrm{E}u(X) \approx 2.29$、確実性等価 $c_X \approx 5.24$、リスク・プレミアム $\rho_X \approx 0.76$。

**図の読み方**

1. 黒の曲線が凹な効用関数、灰色の線分は2つの結果を結ぶ弦です。弦の中点の高さが期待効用 $\mathrm{E}u(X)$、曲線上の点が平均の効用 $u(\mathrm{E}X)$ で、凹なので前者が低くなります（ジェンセンの不等式）。

2. 期待効用と同じ効用を確実に与える金額が確実性等価 $c_X$ です。平均 $\mathrm{E}X$ との差（赤の矢印）が、リスクを避けるために手放してもよい金額、リスク・プレミアムです。

3. 曲線の曲がり方が強いほど弦との隙間が大きくなり、リスク・プレミアムが大きくなります。それを測るのが次のアロー＝プラットの尺度です。

**定義 9.7（アロー＝プラットの危険回避度）**

$u$ が $C^2$ 級で $u' > 0$ のとき、$r_A(x) = -u''(x)/u'(x)$ を絶対的危険回避度、$r_R(x) = x\, r_A(x)$ を相対的危険回避度という。

**数式の読み方：小さなリスクのリスク・プレミアム**

$X = x + \varepsilon$（$\mathrm{E}\varepsilon = 0$、$\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$ は小さい）とします。テイラーの定理で $u(x+\varepsilon) \approx u(x) + u'(x)\varepsilon + \frac{1}{2}u''(x)\varepsilon^2$、$u(x-\rho) \approx u(x) - u'(x)\rho$ と近似すると、確実性等価の定義 $u(x-\rho) = \mathrm{E}u(x+\varepsilon)$ から

$$\rho \;\approx\; \tfrac{1}{2}\, r_A(x)\, \sigma^2$$

が得られます。リスク・プレミアムは「危険回避度 × リスクの大きさ（分散）÷2」です。$u$ を正の1次変換しても $r_A$ は変わらないので、これは選好だけで決まる量です。

**計算例：よく使う効用関数**

- CARA型 $u(x) = -e^{-ax}$：$r_A = a$（一定）。リスク資産への投資額が富によらない。正規分布と組み合わせると $\mathrm{E}u = -\exp(-a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2)$ となり、平均・分散で選択を比べられる。
- CRRA型 $u(x) = x^{1-\gamma}/(1-\gamma)$（$\gamma = 1$ なら $\ln x$）：$r_R = \gamma$（一定）。リスク資産への投資の割合が富によらない。マクロ経済学・資産価格で標準的に使われ、異時点間の代替の弾力性は $1/\gamma$。

**発展：確率優越**

金額のくじ $X, Y$ について、すべての増加関数 $u$ で $\mathrm{E}u(X) \geq \mathrm{E}u(Y)$ となることを、$X$ が $Y$ を1次確率優越するといい、累積分布関数が $F_X \leq F_Y$ を満たすことと同値です。すべての増加かつ凹な $u$ で成り立つことを2次確率優越といい、平均が等しい場合には「$Y$ は $X$ に平均ゼロの雑音を加えたもの（平均を保存する拡散）」であることと同値です（本書では証明しません）。リスクの「大きさ」を分散ではなく効用の言葉で比べる方法で、ポートフォリオ選択や契約理論で使われます。

## 9.5 ベイズの定理と信念の更新

**定理 9.8（ベイズの定理）**

$\Omega$ の事象 $B_1, \dots, B_K$ が互いに交わらず、合併が $\Omega$ で、$P(B_k) > 0$ とする。$P(A) > 0$ ならば

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)\, P(B_k)}{\sum_{j=1}^{K} P(A \mid B_j)\, P(B_j)}.$$

**証明**　条件付き確率の定義から $P(B_k \mid A)P(A) = P(A \cap B_k) = P(A \mid B_k)P(B_k)$ です。$A$ は互いに交わらない $A \cap B_j$ の合併なので、$P(A) = \sum_j P(A \cap B_j) = \sum_j P(A \mid B_j)P(B_j)$ です。この2つを合わせると結論です。 □

**数式の読み方：経済学での読み方**

$B_k$ を「相手のタイプ」や「経済の状態」、$A$ を「観察したシグナル」とします。$P(B_k)$ が観察前の信念（**事前確率**）、$P(A \mid B_k)$ が各状態でそのシグナルが出る確率（**尤度**）、$P(B_k \mid A)$ が観察後の信念（**事後確率**）です。「そのシグナルを出しやすい状態の確率が、比例的に上がる」というのがベイズの定理の内容です。

連続的な値をとる量の学習では、正規分布の場合の公式がよく使われます。

**命題 9.9（正規分布のもとでの信念の更新）**

未知の量 $\theta$ について、事前の信念が正規分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ で、シグナル $s = \theta + \varepsilon$（$\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ は $\theta$ と独立）を観察するとする。精度を $\tau_0 = 1/\sigma_0^2$、$\tau_\varepsilon = 1/\sigma_\varepsilon^2$ と書くと、事後の信念は正規分布で、

$$\mathrm{E}[\theta \mid s] = \frac{\tau_0 \mu_0 + \tau_\varepsilon s}{\tau_0 + \tau_\varepsilon}, \qquad \frac{1}{\mathrm{Var}(\theta \mid s)} = \tau_0 + \tau_\varepsilon.$$

**証明（計算の要点）**　密度関数についてのベイズの定理から、事後の密度は（$\theta$ によらない定数を除いて）

$$\exp\!\Big(-\frac{\tau_0}{2}(\theta - \mu_0)^2 - \frac{\tau_\varepsilon}{2}(s - \theta)^2\Big)$$

に比例します。指数の中を $\theta$ について平方完成すると $-\frac{\tau_0+\tau_\varepsilon}{2}\big(\theta - \frac{\tau_0\mu_0+\tau_\varepsilon s}{\tau_0+\tau_\varepsilon}\big)^2 +$ ($\theta$ によらない項) となり、これは平均 $\frac{\tau_0\mu_0+\tau_\varepsilon s}{\tau_0+\tau_\varepsilon}$、精度 $\tau_0 + \tau_\varepsilon$ の正規分布の密度の形です。密度関数を使うので、この章の有限状態の枠組みの外にある結果です。　□

**補足：経済学での使いどころ**

事後の平均は、事前の平均とシグナルの、**精度で重みをつけた平均**です。シグナルが正確なほど（$\tau_\varepsilon$ が大きいほど）、信念はシグナルに大きく反応します。金融では、投資家が私的情報や価格から企業価値を学習するモデル（合理的期待均衡、市場のマイクロストラクチャー）、マクロ経済学では、信号抽出問題や、時間を通じて繰り返し更新するカルマンフィルタの基礎になります。

## 9.6　状態価格と資産価格の基本定理

来期に $S$ 個の状態のどれかが起こる経済で、$N$ 個の資産が取引されているとします。資産 $j$ は状態 $s$ で $d_{sj}$ の支払いを生み、今期の価格は $q_j$ です。支払いを並べた $S \times N$ 行列を $D = (d_{sj})$、価格のベクトルを $q \in \mathbb{R}^N$ とします。資産の保有量のベクトル（ポートフォリオ）$\theta \in \mathbb{R}^N$ の費用は $q \cdot \theta$、来期の支払いは $D\theta \in \mathbb{R}^S$ です（$\theta_j < 0$ は空売り）。

**定義 9.10（裁定機会・状態価格）**

$D\theta \geq 0$ かつ $q \cdot \theta < 0$ となるポートフォリオ $\theta$ を裁定機会という（今期に正の収入があり、来期にどの状態でも支払いが負にならない）。$q = D^\top \psi$ を満たすベクトル $\psi \in \mathbb{R}^S_+$ を状態価格という。

**数式の読み方：状態価格の読み方**

$\psi_s$ は「状態 $s$ でだけ1円を支払う証券（アロー証券）の今期の価格」です。$q = D^\top \psi$ は、$q_j = \sum_s \psi_s d_{sj}$、つまり「どの資産の価格も、その支払いを状態ごとに状態価格で評価して足し合わせたもの」という価格づけの公式です。

---

**定理 9.11（資産価格の基本定理）**

裁定機会が存在しないことと、状態価格 $\psi \in \mathbb{R}^S_{++}$ が存在することは同値である。

---

**証明**　ファルカスの補題（補題 5.22）を、$A = D^\top$（$N \times S$ 行列）、$b = q$ として当てはめます。補題の1は「$D^\top \psi = q$ となる $\psi \geq 0$ がある」（状態価格が存在する）、補題の2は「$D\theta \geq 0$ かつ $q \cdot \theta < 0$ となる $\theta$ がある」（裁定機会がある）です。補題より、ちょうど一方だけが成り立つので、裁定機会がないことと状態価格が存在することは同値です。　□

**数式の読み方：定理の読み方と補足**

- 「裁定機会がない」という市場の性質（経済学）と、「状態価格による線形の価格づけ」（数学）が同値であることを述べています。分離超平面定理が「価格」を作り出す、という第5章の主題の、金融版です。
- 支払い行列 $D$ のランクが $S$（市場が完備）なら、$D^\top \psi = q$ の解は一つしかないので、状態価格は一意に決まります（第2章）。市場が不完備なら、状態価格は一般に一つに決まりません。
- 裁定機会の定義を強めて「$D\theta \geq 0$、$D\theta \neq 0$、$q \cdot \theta \leq 0$ となる $\theta$ もない」とすると、すべての成分が正の状態価格 $\psi \gg 0$ が存在することと同値になります（ファルカスの補題の変形であるスティムケの補題を使います。本書では証明しません）。

**補足：経済学での使いどころ　確率的割引因子とリスク中立確率**

状態の確率を $\pi_s > 0$ として $m_s = \psi_s / \pi_s$ とおくと、価格づけの公式は

$$q_j = \sum_s \pi_s m_s d_{sj} = \mathrm{E}[m\, d_j]$$

となります。$m$ を**確率的割引因子**（SDF）といい、消費に基づく資産価格モデルでは $m = \beta u'(c_1)/u'(c_0)$（限界効用の比）です。また、安全資産の粗利子率を $R_f$ として $\hat{\pi}_s = R_f \psi_s$ とおくと、$\hat{\pi}$ は確率になり、$q_j = \hat{\mathrm{E}}[d_j]/R_f$ と書けます。これを**リスク中立確率**といい、オプションなどのデリバティブの価格づけの基本になります。マクロ経済学の確率的オイラー方程式 $1 = \mathrm{E}[mR_j]$ も、同じ式の言いかえです。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- 期待効用定理 → 不確実性下の選択、混合戦略の期待利得、保険・ポートフォリオ選択、確率的な動学的最適化。
- ジェンセンの不等式と危険回避度 → リスク・プレミアム、予備的貯蓄、CARA型・CRRA型の効用関数。
- ベイズの定理・正規分布の更新 → 不完備情報ゲームの信念、学習、信号抽出、カルマンフィルタ。
- 資産価格の基本定理 → 無裁定価格づけ、確率的割引因子、リスク中立確率、市場の完備性。

**要点**

- 有限状態では、確率は単体の点、期待値は確率をウェイトにした内積です。
- 連続性公理と独立性公理を満たす選好は、期待効用 $\sum_n L_n u_n$ で表せます。期待効用はくじについて線形です。
- $u$ が凹なら危険回避的で、小さなリスクのリスク・プレミアムは $\frac{1}{2} r_A \sigma^2$ で近似できます。
- ベイズの定理は「事後確率 $\propto$ 尤度 $\times$ 事前確率」で、正規分布では事後の平均が精度で重みをつけた平均になります。
- 裁定機会がないことと状態価格が存在することは同値で、その証明はファルカスの補題そのものです。

**次の章へ**　次の章では、均衡の存在を示すための最後の道具である不動点定理（ブラウワーと角谷）を証明します。

**大学院とのつながり**　期待効用と危険回避は不確実性下のミクロ経済学とファイナンスの、ベイズの定理は不完備情報ゲーム（第12章）と契約理論（第13章）の、資産価格の基本定理は資産価格理論の出発点です。

第10章

# 不動点定理

**ここまでの流れ**　これまでに、コンパクト性（第3章）、連続性と対応・ベルジュの最大値定理（第4章）、凸性と射影定理（第5章）という、存在を示すための部品をそろえました。
**前提知識**　第3章のボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理とコンパクト性。第4章の中間値の定理（定理 4.8）、閉グラフと上半連続性。第5章の射影定理とその連続性。
**この章の問い**　「写像で動かしても動かない点」は、どのような条件のもとで必ず存在するのでしょうか。その根拠となる不動点定理は、どのように証明されるのでしょうか。
**この章で分かること**　不動点の考え方、単体と重心座標、スペルナーの補題（証明つき）、ブラウワーの不動点定理の完全な証明、角谷の不動点定理の証明。これらを使った均衡の存在証明は、次の第11章で行います。

## 10.1　この章の見取り図

証明は次の順に積み上げます。

1. 1次元の不動点定理（中間値の定理）で、考え方をつかむ（10.3節）。ブラウワーの定理を述べ、仮定の意味を確認する（10.4節）。
2. 単体を小さな単体に分割し、頂点に番号（ラベル）をつける組合せ論の補題、スペルナーの補題を証明する（10.5〜10.6節）。
3. スペルナーの補題とコンパクト性・連続性から、単体上のブラウワーの不動点定理を証明する（10.7節）。
4. 第5章の射影を使って、一般のコンパクト凸集合に広げる（10.8節）。
5. ブラウワーの定理から角谷の不動点定理を導く（10.9節）。

全体を通して、「離散的な近似の中で近似的な不動点を見つけ、コンパクト性で極限をとり、連続性（閉グラフ）で本当の不動点であることを確かめる」という一つの戦略が繰り返されます。

## 10.2　不動点とは

均衡とは「誰も行動を変える理由がない状態」でした。これを数学の言葉にすると、「ある写像で動かしても動かない点」になります。

> **定義 10.1（不動点）**
> 写像 $f : K \to K$ について、$f(x^*) = x^*$ を満たす $x^*$ を $f$ の不動点という。対応 $\varphi : K \rightrightarrows K$ については、$x^* \in \varphi(x^*)$ を満たす $x^*$ を不動点という。

**数式の読み方**

- 1変数では、$f$ のグラフと45度線 $y = x$ の交点が不動点です。
- ナッシュ均衡は「各人の戦略が、他の人の戦略への最適反応になっている」状態なので、最適反応対応の不動点です。ワルラス均衡も、価格を調整する写像の不動点として表せます（第11章）。

**補足：経済学での使いどころ　「均衡の存在」を「不動点の存在」に翻訳する手順**

大学院ミクロの存在証明は、どれも次の4ステップで組み立てられています。この手順を頭に入れておくと、一般均衡とゲーム理論の存在証明が同じ形をしていることがよく分かります（第11章）。

1. **集合を選ぶ**：価格単体 $\Delta$（一般均衡）、混合戦略の集合の直積 $\Sigma$（ゲーム理論）など、コンパクトな凸集合を選ぶ。
2. **写像（対応）を作る**：「超過需要がプラスの財の価格を上げる」写像、「相手の戦略への最適反応」の対応など、不動点が均衡になるように作る。
3. **仮定を確かめる**：連続性（ブラウワー）、または値が空でない凸集合で閉グラフ（角谷）であることを確かめる。ここで第3〜5章の道具を使う。
4. **不動点が均衡であることを示す**：不動点の条件を経済学の言葉に戻す。ワルラス法則などの経済学の構造が、ここで効いてくる。

## 10.3　1次元の場合

まず1次元の場合を見ます。これは中間値の定理（定理 4.8）から直ちに示せます。

> **命題 10.2（1次元の不動点定理）**
> $f : [0,1] \to [0,1]$ が連続ならば、$f$ は不動点をもつ。

**証明**

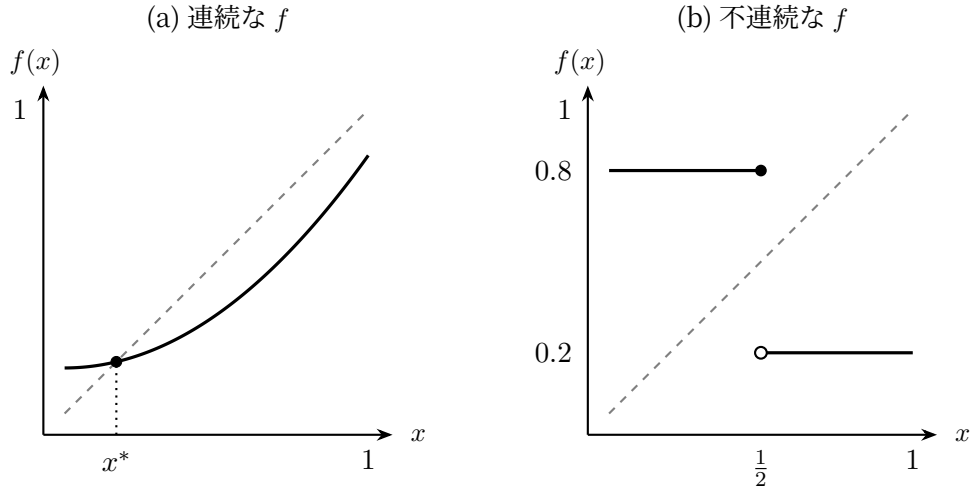
**方針**　$g(x) = f(x) - x$ とおき、$g$ が 0 になる点を中間値の定理で見つけます。

$f$ の値は $[0,1]$ に入るので、

$$g(0) = f(0) - 0 \;\geq\; 0 \qquad (f(0) \geq 0)$$
$$g(1) = f(1) - 1 \;\leq\; 0 \qquad (f(1) \leq 1)$$

です。$g$ は連続なので、中間値の定理より $g(x^*) = 0$、つまり $f(x^*) = x^*$ となる $x^* \in [0,1]$ が存在します。 □

**図 10.1**　1次元の不動点




(a) $f(x) = 0.15 + 0.7x^2$、不動点 $x^* = (1 - \sqrt{0.58})/1.4 \approx 0.170$。(b) $x \leq \frac{1}{2}$ で $f(x) = 0.8$、$x > \frac{1}{2}$ で $f(x) = 0.2$。灰色の破線は45度線。

**図の読み方**

1. (a) では、グラフは左端で45度線より上（$f(0) \geq 0$）、右端で下（$f(1) \leq 1$）にあります。連続なので途中で必ず45度線を横切り、その点 $x^*$ が不動点です。
2. (b) では、グラフは $x = \frac{1}{2}$ で45度線を「飛び越えて」おり、45度線と交わりません。連続性が欠けると不動点は存在しないことがあります。

## 10.4　ブラウワーの不動点定理

1次元の議論は「左端で上、右端で下なら途中で横切る」という、直線の上でしか使えない性質に頼っていました。$n$ 次元では、これに代わる道具が必要です。まず定理を述べ、仮定の意味を確認してから、証明の準備に入ります。

**定理 10.3（ブラウワーの不動点定理）**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ を空でないコンパクトな凸集合とする。$f : K \to K$ が連続ならば、$f$ は不動点をもつ。

**補足：仮定が欠けると**

- コンパクトでない：$\mathbb{R}$ 上の $f(x) = x + 1$ は連続ですが、不動点はありません（有界でない）。
- 凸でない：ドーナツ形の領域を、中心のまわりに少し回転させる写像は連続ですが、どの点も動きます。
- 連続でない：図 10.1(b) のとおりです。

## 10.5 単体と重心座標

ブラウワーの定理は、まず「単体」という最も基本的なコンパクト凸集合について証明します。

**定義 10.4（標準単体）**

$n$ 次元の標準単体を

$$\Delta^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \ (i = 0, \dots, n),\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}$$

と定める。$e^i$（第 $i$ 成分だけ 1）を $\Delta^n$ の頂点という。

**数式の読み方：重心座標の読み方**

- $\Delta^1$ は線分、$\Delta^2$ は三角形、$\Delta^3$ は四面体です。$\Delta^n$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の中にありますが、「$n$ 次元の三角形」です。
- 点 $x \in \Delta^n$ は $x = \sum_i x_i e^i$ と頂点の凸結合で書けるので、成分 $x_i$ は「頂点 $e^i$ にどれだけ近いか」を表す重みです。この成分を重心座標といいます。
- $x_i = 0$ となる点は、頂点 $e^i$ の向かい側の面の上にあります。たとえば三角形 $\Delta^2$ の底辺（$e^0$ と $e^1$ を結ぶ辺）は $x_2 = 0$ の点の集合です。
- 価格単体や混合戦略の集合は、まさにこの標準単体です。

**定義 10.5（単体分割）**

$\Delta^n$ を、互いに面でしか接しない有限個の小さな $n$ 次元単体（部分単体）に分けたものを単体分割という。部分単体の頂点を、分割の頂点という。部分単体の直径の最大値を、分割の細かさという。

**数式の読み方**

- 三角形 $\Delta^2$ なら、各辺を $k$ 等分して平行線を引くと、$k^2$ 個の小さな三角形に分割できます（図 10.2 は $k=5$）。$k$ を大きくすれば分割はいくらでも細かくなります。
- $n$ 次元でも、同じように細かさが 0 に近づく単体分割の列が作れます。

## 10.6　スペルナーの補題

**定義 10.6（スペルナーのラベルづけ）**

単体分割の各頂点 $x$ に $\{0,1,\dots,n\}$ の番号（ラベル）$\ell(x)$ をつける。どの頂点についても $x_{\ell(x)}>0$ であるとき、このラベルづけをスペルナーのラベルづけという。$n+1$ 個の頂点のラベルがすべて異なる部分単体を、完全にラベルづけされた部分単体という。

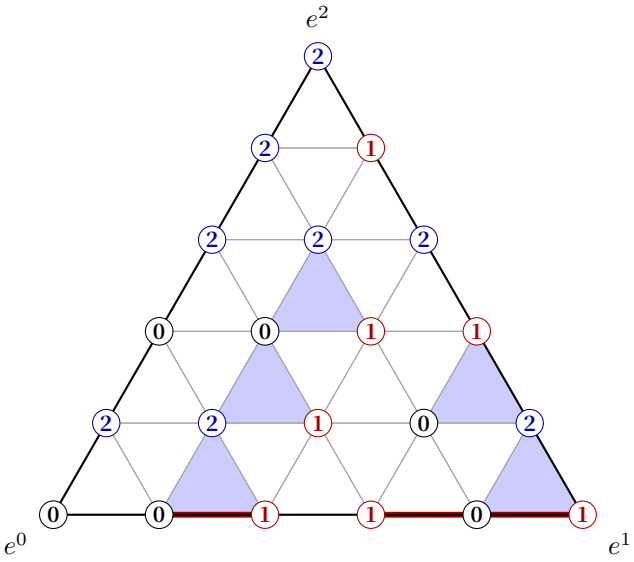
**数式の読み方：スペルナーの条件の意味**

- 条件 $x_{\ell(x)}>0$ は、「頂点 $x$ には、$x$ が重みをもつ頂点の番号しかつけてはいけない」という意味です。
- 特に、大きな単体の頂点 $e^i$ はラベル $i$ をもち、辺 $e^0e^1$ の上の頂点はラベル 0 か 1 しかもてません。一般に、ある面の上の頂点は、その面の頂点の番号しかもてません。内部の頂点は自由です。

**定理 10.7（スペルナーの補題）**

スペルナーのラベルづけのもとで、完全にラベルづけされた部分単体の個数は奇数である。特に、少なくとも1つ存在する。

**図 10.2**　スペルナーのラベルづけ（$n=2$、$k=5$）




各頂点の数字がラベル。辺の上の頂点はその辺の両端の番号のどちらか、内部の頂点は自由に番号をつけた。青い三角形はラベル $\{0,1,2\}$ がそろった部分単体（5個）、赤い太線は底辺上のラベル $\{0,1\}$ の辺（「ドア」、3本）。

**図の読み方**

1. 大きな三角形の頂点 $e^0, e^1, e^2$ には、それぞれラベル $0, 1, 2$ がついています。底辺の頂点は 0 か 1、左の辺は 0 か 2、右の辺は 1 か 2 だけです。

2. 内部の頂点のラベルは自由ですが、それでも青い三角形（3つのラベルがすべてそろったもの）は必ず奇数個できます。この図では5個です。

3. 底辺の上で、ラベルが 0 と 1 の両方をもつ小さな辺（赤い太線）は3本で、これも奇数です。証明は、この「ドア」をたどる議論です。

**証明（$n=1$ と $n=2$ の場合）**

**方針**　$n=1$ は数直線上の数え上げ、$n=2$ は「ドア」の数え上げで示します。一般の $n$ も同じ議論を帰納的に繰り返します。

**ステップ1**　$n=1$（線分）

線分 $e^0e^1$ を小さな線分に分け、頂点に 0 か 1 のラベルをつけます。左端は 0、右端は 1 です。左から右へたどると、ラベルは 0 から始まって 1 で終わるので、ラベルが変わる回数は奇数です（$0 \to 1$ の変化が $1 \to 0$ の変化より1回多い）。ラベルが変わる小さな線分が、完全にラベルづけされた部分単体なので、その個数は奇数です。

**ステップ2**　$n=2$：ドアと部屋

小さな三角形を「部屋」、ラベル $\{0,1\}$ をもつ小さな辺を「ドア」と呼びます。各部屋について、その部屋がもつドアの数を数えます。

- 完全にラベルづけされた部屋（ラベル $\{0,1,2\}$）は、ドアをちょうど1つもちます。
- ラベルが $\{0,1,1\}$ や $\{0,0,1\}$ の部屋は、ドアをちょうど2つもちます。
- それ以外の部屋（0 と 1 の両方を含まない）は、ドアをもちません。

したがって、すべての部屋のドアの数の合計を $D$、完全にラベルづけされた部屋の数を $F$ とすると、$D \equiv F \pmod 2$（$D$ と $F$ の偶奇は同じ）です。

**ステップ3**　ドアを2通りに数える

一方、内部のドアは2つの部屋にまたがるので2回数えられ、境界のドアは1回だけ数えられます。よって $D = 2\times(\text{内部のドアの数}) + (\text{境界のドアの数})$ で、$D$ の偶奇は境界のドアの数の偶奇と同じです。スペルナーの条件から、境界のドアは底辺 $e^0e^1$ の上にしかありません（他の辺には 0 と 1 の両方が現れない）。底辺の上のドアの数は、ステップ1（$n=1$ の場合）から奇数です。

**ステップ4**　結論

$F \equiv D \equiv (\text{底辺のドアの数}) \equiv 1 \pmod 2$ なので、$F$ は奇数です。　□

**補足：一般の $n$ と、構成的な見方**

一般の $n$ では、「ドア」をラベル $\{0,\dots,n-1\}$ をもつ $(n-1)$ 次元の面とし、境界のドアの数が奇数であることを $n-1$ 次元のスペルナーの補題（帰納法の仮定）から導けば、まったく同じ議論になります。また、この証明は「外からドアを通って部屋に入り、もう一つのドアから出る」ことを繰り返すと、必ず完全にラベルづけされた部屋に行き着く、という道順としても読めます。これは不動点を実際に計算するアルゴリズム（スカーフのアルゴリズム）の基礎になりました。

**補足：なぜ「数え上げ」で不動点が見つかるのか**

不動点定理は連続の世界の定理ですが、スペルナーの補題は有限個の頂点に番号をつけるだけの、離散の世界の定理です。証明の戦略は「連続の問題を、細かい離散の問題で近似する」ことにあります。離散の世界では「数え上げ」と「偶奇」という強力な道具が使え、そこで見つけた「近似的な解」を、コンパクト性と連続性で連続の世界の「本当の解」に戻すのです。この「離散化して近似解を見つけ、極限をとる」という発想は、均衡を数値的に計算する方法（計算可能一般均衡など）の考え方にもつながっています。

## 10.7　ブラウワーの不動点定理の証明（単体の場合）

**定理 10.8（ブラウワーの不動点定理：単体の場合）**

$f : \Delta^n \to \Delta^n$ が連続ならば、$f$ は不動点をもつ。

**証明のアイデア**

各点 $x$ に、「$f$ がその成分を増やさない番号」をラベルとしてつけます。このラベルづけはスペルナーの条件を満たすので、細かい分割のどれにも完全にラベルづけされた部分単体があります。そこでは、すべての番号 $i$ について「近くの点で $f_i \le x_i$」が成り立っています。分割を細かくして極限をとると、ある点ですべての $i$ について $f_i(x) \le x_i$ となり、両辺の和がどちらも 1 であることから等号、つまり $f(x) = x$ が得られます。

**証明**

**ステップ1**　ラベルの定め方

各 $x \in \Delta^n$ について、$x_i > 0$ かつ $f_i(x) \le x_i$ を満たす番号 $i$ が少なくとも1つあることを示します。そうでないとすると、$x_i > 0$ のすべての $i$ で $f_i(x) > x_i$ なので

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{i:\, x_i > 0} x_i &< \sum_{i:\, x_i > 0} f_i(x) && \text{（各項で } f_i(x) > x_i\text{）} \\ &\le \sum_{i=0}^{n} f_i(x) = 1 && \text{（}f(x) \in \Delta^n \text{ の成分は非負で和が } 1\text{）} \end{aligned}$$

となり矛盾します。そこで、各点 $x$ のラベル $\ell(x)$ を、このような $i$ の一つ（たとえば最小のもの）と定めます。$x_{\ell(x)} > 0$ なので、これはスペルナーのラベルづけです。

**ステップ2**　近似的な不動点

細かさ $1/k$ 以下の単体分割を考えます。スペルナーの補題から、完全にラベルづけされた部分単体があります。その頂点を $x^{k,0}, \dots, x^{k,n}$（$x^{k,j}$ のラベルが $j$）とすると、ラベルの定め方から

$$f_j(x^{k,j}) \le x^{k,j}_j \qquad (j = 0, \dots, n)$$

です。

**ステップ3**　極限をとる

$\Delta^n$ はコンパクトなので、部分列 $x^{k_m,0} \to x^* \in \Delta^n$ がとれます。同じ部分単体の頂点どうしの距離は $1/k_m$ 以下なので、すべての $j$ で $x^{k_m,j} \to x^*$ です。$f$ の連続性から、ステップ2の不等式の極限をとると

$$f_j(x^*) \le x^*_j \qquad (j = 0, \dots, n)$$

です。

**ステップ4**　不動点であること

両辺の和はどちらも 1 なので、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j x_j^* - \sum_j f_j(x^*) && \text{（どちらの和も 1）} \\ &= \sum_j \bigl(x_j^* - f_j(x^*)\bigr) && \text{（各項は非負）} \end{aligned}$$

です。非負の数の和が 0 なので各項が 0、つまり $f(x^*) = x^*$ です。 □

**数式の読み方：証明で使った道具**

- 組合せ論（スペルナーの補題）：離散的な近似の中で「近似的な不動点」を見つける。
- コンパクト性（第3章）：近似的な不動点の列から収束する部分列を取り出す。
- 連続性（第4章）：不等式を極限まで持ち越す。
- 和が 1 という単体の構造：不等式を等式に変える。

**補足：経済学での使いどころ　ラベル「$f_i(x) \le x_i$」の経済学的な意味**

証明のラベルのつけ方「$f$ がその成分を増やさない番号」を、価格の言葉で読み直してみます。$x$ を価格、$f$ を価格調整の写像とすると、ラベル $i$ は「調整しても価格が上がらない財」、つまり「超過需要がプラスでない財」です。完全にラベルづけされた部分単体は「どの財についても、すぐ近くに超過需要がプラスでない価格がある」状態で、その極限が「どの財も超過需要がプラスでない価格」、つまり均衡価格になります。第11章のワルラス均衡の存在証明は、この直観をそのまま式にしたものです。

## 10.8　一般のコンパクト凸集合への拡張

単体で証明した定理を、一般のコンパクト凸集合に広げます。ここで第5章の射影が活躍します。

**補題 10.9（単体の形は問わない）**

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ が、一般の位置にある $n+1$ 個の点 $v^0, \dots, v^n$ の凸包（$n$ 次元の単体）ならば、$S$ からそれ自身への連続写像は不動点をもつ。

**証明**　写像 $A : \Delta^n \to S$、$A(x) = \sum_i x_i v^i$ は、連続で、1対1かつ上への写像で、逆写像も連続です（重心座標は点の連続関数）。$g : S \to S$ が連続なら、$A^{-1} \circ g \circ A : \Delta^n \to \Delta^n$ は連続なので、単体の場合の定理から不動点 $x^*$ をもちます。$A^{-1}(g(A(x^*))) = x^*$ より $g(A(x^*)) = A(x^*)$ で、$A(x^*)$ が $g$ の不動点です。　□

**証明（ブラウワーの不動点定理：一般の場合）**

**方針**　$K$ を大きな単体 $S$ で囲み、$S$ の点を $K$ に「射影」してから $f$ を作用させます。

**ステップ1**　単体で囲む

$K$ は有界なので、すべての成分が $-M$ 以上で、成分の和が $M$ 以下となる $M$ がとれます。単体 $S = \{x : x_i \geq -M,\ \sum_i x_i \leq M\}$（頂点は $n+1$ 個）は $K$ を含みます。

**ステップ2**　射影と合成する

第5章の射影定理から、射影 $P_K : \mathbb{R}^n \to K$ は連続で、$x \in K$ なら $P_K(x) = x$ です。$g = f \circ P_K : S \to K \subseteq S$ は連続な写像の合成なので連続です。

**ステップ3**　不動点

補題から $g$ は不動点 $x^* = f(P_K(x^*))$ をもちます。右辺は $K$ の点なので $x^* \in K$ で、$P_K(x^*) = x^*$ です。よって $f(x^*) = x^*$ です。　□

**数式の読み方：凸性はどこで使ったか**

- 一般の場合の証明で凸性を使ったのは、射影 $P_K$ が一つに決まり連続であること（第5章の射影定理）だけです。ドーナツ形のように凸でない集合では、中心の近くの点から最も近い点が一つに決まらず、連続な「引き戻し」が作れません。これが、凸でない集合で定理が成り立たない理由です。

## 10.9　角谷の不動点定理

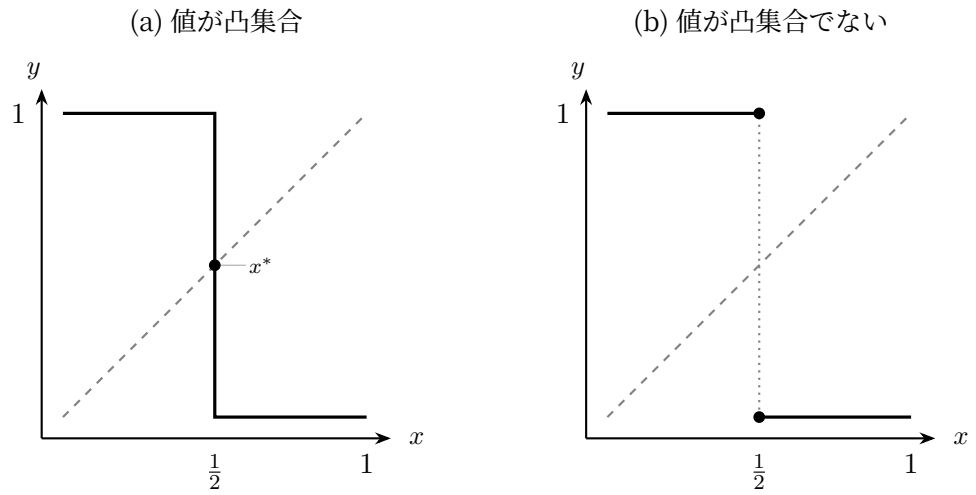
最適反応や需要は、値が集合になる対応でした。対応についての不動点定理が、角谷の不動点定理です。

**定理 10.10（角谷の不動点定理）**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ を空でないコンパクトな凸集合とする。対応 $\varphi : K \rightrightarrows K$ が次の2条件を満たすならば、$\varphi$ は不動点 $x^* \in \varphi(x^*)$ をもつ。

1. 各 $x \in K$ で、$\varphi(x)$ は空でない凸集合である。
2. $\varphi$ のグラフは閉集合である。

**図 10.3**　角谷の不動点定理と値の凸性




(a) $x < \frac{1}{2}$ で $\varphi(x) = \{1\}$、$x = \frac{1}{2}$ で $[0,1]$、$x > \frac{1}{2}$ で $\{0\}$。(b) $x = \frac{1}{2}$ での値だけを $\{0,1\}$ に変えたもの（点線部分は含まない）。

**図の読み方**

1. (a) では、$x = \frac{1}{2}$ での値が線分 $[0,1]$ で、45度線と点 $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ で交わります。これが不動点です。
2. (b) では、$x = \frac{1}{2}$ での値が2点 $\{0,1\}$ だけで凸集合ではありません。グラフは閉じていますが、45度線と交わらないので不動点はありません。
3. 関数の不動点定理で「連続性」が果たしていた「飛び越えずに横切る」役割を、対応では「閉グラフ」と「値の凸性」が一緒に果たしています。

### 証明（単体の場合）

**方針**　細かい単体分割の頂点では対応の値から1点を選び、部分単体の中は一次式でつないで連続写像を作ります。その不動点の極限が、対応の不動点になります。

$K = \Delta^n$ とします。

**ステップ1**　区分的に線形な写像

細かさ $1/k$ 以下の単体分割を考え、分割の各頂点 $v$ について $y_v \in \varphi(v)$ を一つ選びます。点 $x$ が頂点 $v^0, \dots, v^n$ の部分単体に入り、$x = \sum_j \lambda_j v^j$（$\lambda_j \geq 0$、$\sum_j \lambda_j = 1$）と書けるとき、

$$f^k(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, y_{v^j}$$

と定めます。隣り合う部分単体の共通の面の上では、どちらで計算しても同じ値になるので、$f^k$ は $\Delta^n$ 全体で定義された連続写像で、値は $\Delta^n$ の点の凸結合なので $\Delta^n$ に入ります。

**ステップ2**　近似的な不動点

ブラウワーの不動点定理から、$f^k(x^k) = x^k$ となる $x^k$ があります。$x^k$ が入る部分単体の頂点を $v^{k,j}$、重みを $\lambda_j^k$、選んだ点を $y^{k,j} = y_{v^{k,j}} \in \varphi(v^{k,j})$ とすると

$$x^k = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j^k \, y^{k,j}$$

です。

**ステップ3**　極限をとる

$x^k$、$\lambda^k = (\lambda_0^k, \ldots, \lambda_n^k)$、$y^{k,j}$ はすべてコンパクト集合（$\Delta^n$ や単体）に入るので、共通の部分列で $x^k \to x^*$、$\lambda^k \to \lambda^*$、$y^{k,j} \to y^j$ とできます。部分単体の大きさは 0 に近づくので、頂点も $v^{k,j} \to x^*$ です。

**ステップ4**　閉グラフ性と凸性

$(v^{k,j}, y^{k,j})$ は $\varphi$ のグラフの点で、$(x^*, y^j)$ に収束します。グラフは閉集合なので $y^j \in \varphi(x^*)$ です。ステップ2の式の極限をとると $x^* = \sum_j \lambda_j^* y^j$ で、これは $\varphi(x^*)$ の点の凸結合です。$\varphi(x^*)$ は凸集合なので $x^* \in \varphi(x^*)$ です。　□

**証明（一般のコンパクト凸集合の場合）**　$K$ を含む単体 $S$ をとり、$\psi(x) = \varphi(P_K(x))$ とおきます。$\psi : S \rightrightarrows K \subseteq S$ の値は空でない凸集合です。グラフが閉じていることは、$(x^k, y^k) \to (x, y)$、$y^k \in \varphi(P_K(x^k))$ なら、$P_K$ の連続性から $P_K(x^k) \to P_K(x)$ で、$\varphi$ のグラフが閉じているので $y \in \varphi(P_K(x))$ となることから分かります。単体の場合の定理（とブラウワーの場合と同じ単体の形の補題）から $x^* \in \psi(x^*) = \varphi(P_K(x^*)) \subseteq K$ となる $x^*$ があり、$x^* \in K$ なので $P_K(x^*) = x^*$、つまり $x^* \in \varphi(x^*)$ です。　□

**数式の読み方：仮定はどこで使ったか**

- 閉グラフ性：ステップ4で、頂点での値から選んだ点の極限が $\varphi(x^*)$ に入ることに使いました。
- 値の凸性：ステップ4の最後で、極限の凸結合が $\varphi(x^*)$ に入ることに使いました。図 10.3(b) では、$\varphi(\frac{1}{2}) = \{0, 1\}$ の点の凸結合 $\frac{1}{2}$ が値に入らないので、ここが崩れます。
- 値が空でないこと：ステップ1で、各頂点で点を選ぶのに使いました。

**補足：経済学での使いどころ　角谷の定理を使うときのチェックリスト**

大学院ミクロで角谷の不動点定理を使うときは、次の4点を、それぞれ対応する道具で確かめます。

| 確かめること | 使う道具 | ナッシュ均衡の場合 |
|---|---|---|
| $K$ はコンパクト凸 | ハイネ＝ボレル、直積（第3章） | 混合戦略の集合（単体の直積） |
| 値は空でない | ワイエルシュトラス（第4章） | 期待利得は連続 |
| 値は凸集合 | 線形性・準凹性（第5章） | 期待利得は自分の戦略について線形 |
| グラフは閉集合 | ベルジュの定理（第4章） | 期待利得は連続、戦略集合は一定 |

4つのうち、経済学の仮定が最も効いてくるのは「値は凸集合」です。ゲーム理論では混合戦略を考えることで、一般均衡では選好と生産集合の凸性を仮定することで、これを満たしています。凸性がないと均衡が存在しないことがあるのは、このためです。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- ブラウワーの不動点定理 → 価格調整の写像による一般均衡の存在（第11章）。
- 角谷の不動点定理 → ナッシュ均衡の存在、超過需要を対応として扱う一般均衡の存在（第11章）。
- スペルナーの補題と近似の考え方 → 均衡の数値計算（スカーフのアルゴリズム、計算可能一般均衡）。
- 存在証明の4ステップ（集合・写像・仮定・解釈）→ 新しいモデルで均衡の存在を示すときの雛形。

**要点**

- 均衡は、ある写像（対応）の不動点として表せます。
- スペルナーの補題：単体分割のスペルナーのラベルづけでは、完全にラベルづけされた部分単体が奇数個（少なくとも1つ）あります。証明は「ドア」の数え上げです。
- ブラウワーの不動点定理は、スペルナーの補題で近似的な不動点を見つけ、コンパクト性と連続性で極限をとって証明します。一般のコンパクト凸集合には、射影の連続性で広げます。
- 角谷の不動点定理は、対応を区分的に線形な写像で近似し、ブラウワーの定理と閉グラフ性・値の凸性から証明します。

**次の章へ**　次の章では、この章の不動点定理を使って、ワルラス均衡とナッシュ均衡の存在を証明し、さらに厚生経済学の基本定理を証明します。この本の前半の道具がすべて合流する章です。

**大学院とのつながり**　不動点定理は、一般均衡とゲーム理論だけでなく、マクロ経済学の再帰的均衡や異質的家計モデルの定常均衡の存在証明でも使われます。

第11章

# 均衡の存在と厚生経済学の基本定理

**ここまでの流れ**　前の章で、ブラウワーと角谷の不動点定理を証明しました。それ以前の章で、コンパクト性、連続性とベルジュの最大値定理、凸性と分離超平面定理を準備しています。

**前提知識**　第3章の単体とその直積のコンパクト性。第4章のベルジュの最大値定理（定理 4.20）と需要の連続性（系 4.22）。第5章の準凹関数、需要の一意性（命題 5.15）、2つの凸集合の分離超平面定理（定理 5.21）。第10章のブラウワーと角谷の不動点定理。

**この章の問い**　すべての市場を同時に清算する価格や、全員が最適反応をとり合う戦略の組は、なぜ必ず存在するといえるのでしょうか。そして、市場均衡はなぜ効率的で、効率的な配分はなぜ市場で実現できるのでしょうか。

**この章で分かること**　超過需要関数の性質、ワルラス均衡の存在、厚生経済学の第一基本定理と第二基本定理（分離超平面定理による証明）、混合戦略のナッシュ均衡の存在、コンパクト凸な戦略集合での純粋戦略のナッシュ均衡の存在。

## 11.1　この章の見取り図

この章は、前半の道具がすべて合流する章です。均衡の存在（11.3節、11.5節）には、コンパクト性・連続性・凸性・不動点定理を、厚生経済学の基本定理（11.4節）には、局所非飽和性と分離超平面定理を使います。存在定理はどれも、第10章で述べた4ステップ（集合を選ぶ、写像を作る、仮定を確かめる、不動点を均衡と読む）の形をしています。

## 11.2　交換経済と超過需要

消費者 $i = 1, \dots, I$ が $L$ 種類の財を交換する経済を考えます。消費者 $i$ の効用関数を $u_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$、初期保有を $\omega^i \in \mathbb{R}^L_+$、総保有を $\bar{\omega} = \sum_i \omega^i \gg 0$ とします。価格 $p$ のもとで、消費者 $i$ の所得は $p \cdot \omega^i$ で、需要は $x_i(p) = \arg\max\{u_i(x) : p \cdot x \le p \cdot \omega^i\}$ です。

**定義 11.1（超過需要・ワルラス均衡）**

需要が一つに決まるとき、$z(p) = \sum_i \big(x_i(p) - \omega^i\big)$ を超過需要関数という。$z(p^*) = 0$ となる価格 $p^*$ と配分 $(x_i(p^*))_i$ をワルラス均衡という。

**命題 11.2（超過需要関数の性質）**

各 $u_i$ が連続・狭義準凹・強く単調（$x \geq y$、$x \neq y$ なら $u_i(x) > u_i(y)$）で、$\omega^i \gg 0$ とする。このとき $\mathbb{R}^L_{++}$ 上で

1. $z$ は連続である。
2. $z$ は0次同次である：$t > 0$ について $z(tp) = z(p)$。
3. ワルラス法則：$p \cdot z(p) = 0$。
4. $z$ は下に有界である：$z(p) \geq -\bar{\omega}$。
5. 境界条件：$p^k \to p \neq 0$、$p^k \gg 0$ で、ある $\ell$ で $p_\ell = 0$ ならば、$\max_\ell z_\ell(p^k) \to \infty$。

**証明**

**ステップ1**　1〜4

狭義準凹性から需要は一つに決まり（命題 5.15）、所得 $p \cdot \omega^i$ は $p$ の連続関数で $\omega^i \gg 0$ より正なので、系 4.22 から $x_i(p)$ は連続です。よって $z$ は連続です。価格をすべて $t$ 倍しても予算集合 $\{x : (tp) \cdot x \leq (tp) \cdot \omega^i\}$ は変わらないので、$z$ は0次同次です。強く単調なら局所非飽和なので予算を使い切り、$p \cdot x_i(p) = p \cdot \omega^i$ です。$i$ について足すとワルラス法則です。$x_i(p) \geq 0$ から $z(p) \geq -\bar{\omega}$ です。

**ステップ2**　5（主張のみ）

性質5は、「無料に近づく財があると、所得が正の消費者はその財をいくらでも欲しがる」ことを表します。証明は、極限の価格での所得が正の消費者について、需要が有界にとどまると仮定して矛盾を導くもので、本書では省きます。　□

## 11.3　ワルラス均衡の存在

ブラウワーの不動点定理（定理 10.3）を使って、ワルラス均衡が存在することを示します。超過需要関数 $z(p)$ は0次同次なので、価格は比だけが意味をもちます。そこで、価格を合計が1になるように基準化し、価格単体

$$\Delta = \left\{ p \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 1 \right\} \tag{11.1}$$

の上で考えます。$\Delta$ は空でないコンパクトな凸集合です。

**命題 11.3（ワルラス均衡の存在：超過需要が $\Delta$ 上で連続な場合）**

超過需要関数 $z : \Delta \to \mathbb{R}^L$ が連続で、ワルラス法則 $p \cdot z(p) = 0$ を満たすとする。このとき、$z(p^*) \leq 0$ となる $p^* \in \Delta$ が存在する。

**証明のアイデア**

「超過需要がプラスの財の価格を上げる」という価格調整の写像を作ります。その不動点では、どの財の価格もそれ以上上げる理由がない、つまり超過需要がプラスの財がないはずです。

**証明**

**ステップ1**　価格調整の写像を作る

$m_\ell(p) = \max\{z_\ell(p), 0\}$（財 $\ell$ の超過需要のプラスの部分）とおき、

$$T_\ell(p) = \frac{p_\ell + m_\ell(p)}{1 + \sum_{j=1}^{L} m_j(p)} \qquad (\ell = 1, \ldots, L)$$

と定めます。$T_\ell(p) \geq 0$ で、$\sum_\ell T_\ell(p) = 1$ なので $T : \Delta \to \Delta$ です。$z$ と max は連続で、分母は 1 以上なので、$T$ は連続です。

**ステップ2**　ブラウワーの不動点定理を使う

$T$ は空でないコンパクト凸集合 $\Delta$ からそれ自身への連続写像なので、不動点 $p^* = T(p^*)$ があります（定理 10.3）。$S = \sum_j m_j(p^*)$ とおくと、不動点の式の分母を払って整理すると、各 $\ell$ で $p_\ell^* S = m_\ell(p^*)$ です。

**ステップ3**　超過需要がプラスの財がないことを示す

ステップ2の式の両辺に $z_\ell(p^*)$ をかけて、$\ell$ について足し合わせます。

$$S \sum_\ell p_\ell^* z_\ell(p^*) = \sum_\ell z_\ell(p^*)\, m_\ell(p^*) \qquad \text{（両辺に } z_\ell \text{ をかけて和をとる）}$$

$$0 = \sum_\ell m_\ell(p^*)^2 \qquad \text{（左辺はワルラス法則で 0、右辺は } z_\ell m_\ell = m_\ell^2\text{）}$$

よってすべての $\ell$ で $m_\ell(p^*) = 0$、つまり $z(p^*) \leq 0$ です。 □

**補足：結論の読み方**

$z(p^*) \leq 0$ とワルラス法則 $p^* \cdot z(p^*) = 0$ をあわせると、$z_\ell(p^*) < 0$（売れ残り）となる財では $p_\ell^* = 0$ です。したがって、価格が正のすべての財の市場は清算しており、売れ残る財は無料の財です。選好が単調なら、無料の財には需要が無限に生じるので売れ残りは起こらず、すべての市場が清算します。

命題 11.3 は、超過需要が価格単体の境界（ある価格が 0）でも連続であることを仮定しています。しかし、選好が強く単調なら、ある財の価格が 0 に近づくとその財の需要は限りなく大きくなるので（命題 11.2 の5）、この仮定は成り立ちません。標準的な仮定のもとでの存在定理は、次のとおりです。

---

**定理 11.4（ワルラス均衡の存在：標準的な場合）**

超過需要関数 $z:\mathbb{R}^L_{++}\to\mathbb{R}^L$ が命題 11.2 の1〜5を満たすならば、$z(p^*)=0$ となる $p^*\in\mathbb{R}^L_{++}$ が存在する。したがって、命題 11.2 の仮定を満たす交換経済にはワルラス均衡が存在する。

---

本書では、この定理の完全な証明は省きます。証明の方針は次のとおりです。境界から少し離れた価格の集合 $\Delta_\varepsilon=\{p\in\Delta:p_\ell\ge\varepsilon\}$ の上で、命題 11.3 と同じ形の写像（または角谷の不動点定理を使う対応）を作って近似的な均衡価格 $p^\varepsilon$ を求め、$\varepsilon\to 0$ の極限をとります。境界条件（性質5）が、極限の価格が境界に行かないこと、つまり $p^*\gg 0$ を保証し、内部では $z$ が連続なので極限で $z(p^*)=0$ が成り立ちます。

## 11.4　厚生経済学の基本定理

配分 $x=(x_1,\dots,x_I)$ は、$\sum_i x_i\le\bar\omega$ のとき実行可能であるといいます。

> **定義 11.5（パレート効率性）**
> 実行可能な配分 $x$ について、すべての $i$ で $u_i(x'_i)\ge u_i(x_i)$、ある $i$ で $u_i(x'_i)>u_i(x_i)$ となる実行可能な配分 $x'$ が存在しないとき、$x$ はパレート効率的であるという。

---

**定理 11.6（厚生経済学の第一基本定理）**

各消費者の選好が局所非飽和ならば、ワルラス均衡の配分はパレート効率的である。

---

**証明**

**方針**　背理法で、パレート改善する配分は、均衡価格で評価すると経済全体の資源より高くつくことを示します。

$(x^*,p^*)$ をワルラス均衡とし、パレート改善する実行可能な配分 $x'$ があるとします。

- $u_i(x'_i)>u_i(x^*_i)$ となる $i$ では、$x^*_i$ が予算内で最適なので、$x'_i$ は予算外です：$p^*\cdot x'_i>p^*\cdot\omega^i$。
- $u_i(x'_i)\ge u_i(x^*_i)$ となる $i$ では、$p^*\cdot x'_i\ge p^*\cdot\omega^i$ です。もし $p^*\cdot x'_i<p^*\cdot\omega^i$ なら、局所非飽和より $x'_i$ の近くに予算内でより好ましい組があり、$x^*_i$ の最適性に反するからです。

足し合わせると $p^* \cdot \sum_i x'_i > p^* \cdot \bar{\omega}$ です。一方、$x'$ は実行可能（$\sum_i x'_i \leq \bar{\omega}$）で、均衡価格は $p^* \geq 0$ なので、$p^* \cdot \sum_i x'_i \leq p^* \cdot \bar{\omega}$ となり、矛盾します。 □

---

**定理 11.7（厚生経済学の第二基本定理）**

各 $u_i$ が連続・準凹で、弱く単調（$x \geq y$ なら $u_i(x) \geq u_i(y)$）かつ局所非飽和であるとする。$x^*$ をパレート効率的な配分で、$\sum_i x_i^* = \bar{\omega}$、すべての $i$ で $x_i^* \gg 0$ とする。このとき、$p \geq 0$、$p \neq 0$ が存在して、各 $i$ について $x_i^*$ は予算集合 $\{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x \leq p \cdot x_i^*\}$ の上で $u_i$ を最大にする。

---

**数式の読み方：定理の読み方**

結論は、「所得を $p \cdot x_i^*$ になるように再分配すれば（移転 $T_i = p \cdot x_i^* - p \cdot \omega^i$）、効率的な配分 $x^*$ が価格 $p$ のもとでの競争均衡として実現する」ということです。効率性と分配の問題を切り離し、分配は一括の所得移転で、効率性は市場で達成できる、という主張です。

**証明のアイデア**

「全員を $x^*$ より良くする配分に必要な総量」の集合 $V$ は、選好の凸性から凸集合で、$x^*$ の効率性から総資源 $\bar{\omega}$ を含みません。分離超平面定理で $V$ と $\bar{\omega}$ を分ける価格 $p$ をとると、「より良い組は、その価格では高すぎる」ことになり、それが各人の最適性を意味します。最後に、$x_i^* \gg 0$ を使って「より安い組がある」ことを確かめ、「高すぎる」を「予算外」に強めます。

**証明**

**ステップ1**　凸集合 $V$ を作る

$V_i = \{x \in \mathbb{R}_+^L : u_i(x) > u_i(x_i^*)\}$ は、$u_i$ が準凹なので凸集合で、局所非飽和より空でありません。$V = V_1 + \cdots + V_I$ は凸集合の和なので凸集合です（第5章の凸集合の作り方）。

**ステップ2**　$\bar{\omega} \notin V$

$\bar{\omega} \in V$ なら、$\sum_i x_i = \bar{\omega}$、$u_i(x_i) > u_i(x_i^*)$ となる配分があり、$x^*$ のパレート効率性に反します。

**ステップ3**　分離する

定理 5.21 を凸集合 $\{\bar{\omega}\}$ と $V$ に当てはめると、$p \neq 0$ と $c$ があって、すべての $v \in V$ で $p \cdot \bar{\omega} \leq c \leq p \cdot v$ です。

**ステップ4**　より良いか同じ組の評価

すべての $i$ で $u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*)$ なら $p \cdot \sum_i x_i \geq c$ です。実際、局所非飽和より各 $x_i$ のいくらでも近くに $V_i$ の点があり、その和は $V$ の点なので $c$ 以上で、極限をとれば（補題 3.14）

主張が成り立ちます。特に $x_i = x_i^*$ とすると $p \cdot \bar{\omega} \geq c$ で、ステップ3と合わせて $c = p \cdot \bar{\omega}$ です。

**ステップ5**　$p \geq 0$

$x_1 = x_1^* + te_\ell$（$t > 0$）は弱い単調性から $u_1(x_1) \geq u_1(x_1^*)$ なので、ステップ4（他の人は $x_i^*$）より $p \cdot \bar{\omega} + tp_\ell \geq c = p \cdot \bar{\omega}$、つまり $p_\ell \geq 0$ です。

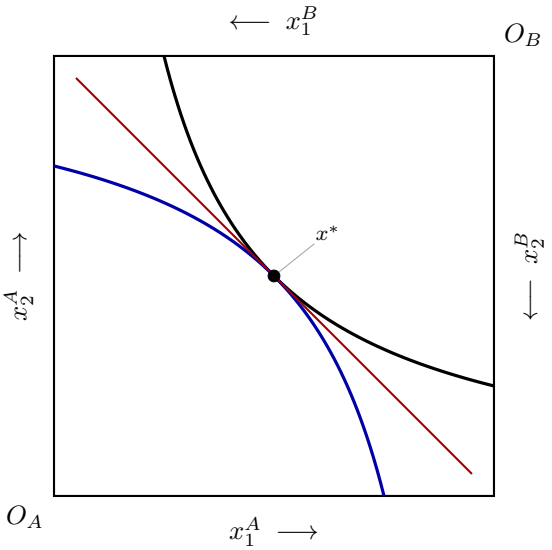
**ステップ6**　各人について：より良い組は高い

$u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*)$ なら、ステップ4を $i$ 以外は $x_j^*$ として使うと $p \cdot x_i + \sum_{j \neq i} p \cdot x_j^* \geq p \cdot \bar{\omega} = \sum_j p \cdot x_j^*$、つまり $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$ です。

**ステップ7**　予算内では $x_i^*$ が最適

$u_i(x_i) > u_i(x_i^*)$ で $p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^*$ となる $x_i$ があったとします。ステップ6より $p \cdot x_i = p \cdot x_i^*$ で、$p \geq 0$、$p \neq 0$、$x_i^* \gg 0$ より、これは正です。連続性から $t < 1$ を 1 に近くとると $u_i(tx_i) > u_i(x_i^*)$ ですが、$p \cdot (tx_i) < p \cdot x_i^*$ となり、ステップ6に反します。よって $x_i^*$ は予算集合の上で $u_i$ を最大にします。　□

**図 11.1**　第二基本定理：効率的な配分を支える価格




総保有 $(4,4)$、$u_A = x_1 x_2$、$u_B$ も同じ形（$B$ の座標は右上の原点から測る）。黒は $A$、青は $B$ の無差別曲線。パレート効率的な配分 $x^* = (2,2)$ で2本の無差別曲線が接し、共通の接線（赤）の法線 $p = (1,1)$ が支える価格になる。

**図の読み方**

1. エッジワース・ボックスの点 $x^*$ では、$A$（黒）と $B$（青）の無差別曲線が接しています。どちらかを良くすると、もう一方が悪くなるので、パレート効率的です。

2. 2本の無差別曲線を分ける赤の直線が分離超平面で、その法線ベクトルが価格 $p$ です。$A$ にとって $x^*$ より良い組（黒の曲線の右上）は赤の線より上、つまり価格 $p$ では $x^*$ より高くつきます。$B$ についても同じです。

3. したがって、各人の所得を $x^*$ がちょうど買える額にそろえれば、$x^*$ が均衡になります。これが第二基本定理の内容です。

**補足：経済学での使いどころ**

第一基本定理は、完備な市場と競争の効率性（見えざる手）の数学的な表現で、その仮定（局所非飽和性、外部性がない、市場が完備）が崩れる場所が、市場の失敗の分析の出発点になります。第二基本定理は、凸性（選好・技術）があれば「効率性と分配を分けて考えられる」ことを示し、最適課税や公共政策の議論の土台です。金融では、完備市場の均衡がパレート効率的であることが、代表的家計モデルを使う根拠の一つになっています。

## 11.5 ナッシュ均衡の存在

角谷の不動点定理（定理 10.10）を使って、ナッシュ均衡の存在を証明します。プレーヤー $i = 1, \dots, N$ がそれぞれ有限個の純粋戦略をもつゲームを考えます。プレーヤー $i$ の混合戦略（純粋戦略の上の確率分布）の集合を $\Sigma_i$ とし、戦略の組を $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_N$、期待利得を $U_i(\sigma)$ と書きます。

**定義 11.8（最適反応対応・ナッシュ均衡）**

$\sigma_{-i}$ を $i$ 以外の戦略の組として、$BR_i(\sigma_{-i}) = \arg\max_{\tau_i \in \Sigma_i} U_i(\tau_i, \sigma_{-i})$ を $i$ の最適反応対応、$BR(\sigma) = BR_1(\sigma_{-1}) \times \cdots \times BR_N(\sigma_{-N})$ とする。$\sigma^* \in BR(\sigma^*)$ を満たす $\sigma^*$ をナッシュ均衡という。

**定理 11.9（ナッシュ均衡の存在）**

有限個のプレーヤーがそれぞれ有限個の純粋戦略をもつゲームには、混合戦略のナッシュ均衡が存在する。

**証明**

**方針**　$K = \Sigma$、$\varphi = BR$ として、角谷の不動点定理の仮定を一つずつ確かめます。

**ステップ1**　$\Sigma$ は空でないコンパクト凸集合

各 $\Sigma_i$ は、確率を並べたベクトルの集合 $\{q \in \mathbb{R}^{k_i}_{+} : \sum q_s = 1\}$（$k_i$ は純粋戦略の数）で、有界な閉集合かつ凸集合です。その直積 $\Sigma$ も同じ性質をもちます（命題 3.30 の3）。

**ステップ2**　$BR(\sigma)$ は空でない

期待利得 $U_i$ は確率の多項式なので連続で、$\Sigma_i$ はコンパクトなので、ワイエルシュトラスの最大値定理から最大化する $\tau_i$ が存在します。

**ステップ3**　$BR(\sigma)$ は凸集合

期待利得は自分の混合戦略 $\tau_i$ について線形です。$\tau_i, \tau_i'$ がともに最大値 $M$ をとるなら、その凸結合でも値は $\lambda M + (1-\lambda)M = M$ となり、やはり最適です。凸集合の直積も凸集合です。

**ステップ4**　$BR$ のグラフは閉集合

$\sigma_{-i}$ をパラメータ、$\Sigma_i$（一定）を制約集合とみてベルジュの最大値定理（定理 4.20）を当てはめると、$BR_i$ は上半連続で値はコンパクトです。命題 4.18 の2より、グラフは閉集合です。直積の対応 $BR$ のグラフも閉集合です。

**ステップ5**　結論

角谷の不動点定理より $\sigma^* \in BR(\sigma^*)$ となる $\sigma^*$ が存在し、これがナッシュ均衡です。　□

**補足：純粋戦略では足りない理由**

純粋戦略だけでは戦略の集合が有限個の点になり、凸集合になりません。じゃんけんのように純粋戦略の均衡がないゲームがあるのはこのためです。混合戦略を考えることで戦略の集合が凸集合になり、角谷の不動点定理が使えるようになります。

混合戦略を考えなくても、戦略の集合が連続的で利得が適切に凹なら、純粋戦略の均衡が存在します。

---

**定理 11.10（純粋戦略のナッシュ均衡の存在）**

プレーヤー $i = 1, \dots, N$ の戦略集合 $S_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ が空でないコンパクト凸集合で、利得 $u_i : S_1 \times \cdots \times S_N \to \mathbb{R}$ が連続で、自分の戦略 $s_i$ について準凹であるとする。このとき、純粋戦略のナッシュ均衡 $s^*$（すべての $i$ で $s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$）が存在する。

---

**証明**　定理 11.9 の証明と同じく、$K = S_1 \times \cdots \times S_N$、$\varphi = BR$ として角谷の不動点定理の仮定を確かめます。$K$ はコンパクト凸集合の直積なのでコンパクト凸集合です。$BR_i(s_{-i})$ は、ワイエルシュトラスの定理から空でなく、最大値を $M$ とすると $\{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq M\}$ で、準凹関数の上方集合なので凸集合です。グラフが閉じていることは、ベルジュの

最大値定理（制約集合 $S_i$ は一定）から従います。角谷の不動点定理より不動点があり、それがナッシュ均衡です。 □

**計算例：クールノー競争**

2つの企業が数量 $q_i \in [0, \bar{q}]$ を選び、価格が $P(q_1 + q_2) = a - q_1 - q_2$、費用が $cq_i$ のとき、利潤 $q_i(a - q_1 - q_2 - c)$ は自分の数量について凹（したがって準凹）で、連続です。定理 11.10 から純粋戦略の均衡が存在し、一階条件から $q_1^* = q_2^* = (a - c)/3$ です（$\bar{q} \geq (a - c)/2$ とする）。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- ワルラス均衡の存在 → 一般均衡理論の整合性、計算可能一般均衡モデルの前提。
- 厚生経済学の第一・第二基本定理 → 市場の効率性と市場の失敗、効率性と分配の分離、代表的家計の正当化。
- 混合戦略のナッシュ均衡の存在 → 有限ゲームの分析の出発点。
- 純粋戦略の均衡の存在 → クールノー競争、公共財の自発的供給、価格競争（差別化された財）など、連続的な戦略をもつゲーム。

**要点**

- 標準的な仮定のもとで、超過需要関数は連続・0次同次で、ワルラス法則と境界条件を満たします。
- 価格調整の写像にブラウワーの不動点定理を当てはめると、ワルラス均衡の存在が示されます。
- 第一基本定理（均衡は効率的）は局所非飽和性だけで、第二基本定理（効率的な配分は均衡で支えられる）は凸性と分離超平面定理で示されます。
- ナッシュ均衡の存在は、最適反応対応に角谷の不動点定理を当てはめて示します。値の凸性は、混合戦略（期待効用の線形性）か、利得の準凹性から得られます。

**次の章へ**　ここまでのゲームは、全員が同時に一度だけ行動するものでした。次の章では、時間の流れがあるゲーム（動学ゲーム）と、相手について知らないことがあるゲーム（不完備情報ゲーム）を扱い、さらに比較静学を微分なしで行う単調比較静学を学びます。

**大学院とのつながり**　生産のある経済、不完備市場、無限期間の経済での均衡の存在も、この章と同じ「集合・写像・仮定・解釈」の4ステップで証明されます。

第12章

# 動学ゲームと不完備情報ゲームの数学

> **ここまでの流れ**　前の章で、同時に一度だけ行動するゲームについて、ナッシュ均衡の存在を証明しました。
> **前提知識**　第1章の数学的帰納法。第9章の期待効用とベイズの定理（定理 9.8）。第11章のナッシュ均衡の存在（定理 11.9）。等比級数の和。
> **この章の問い**　時間の流れがあるゲームでは、どのような均衡が「もっともらしい」のでしょうか。無限に続くゲームで均衡を確かめるには、どうすればよいでしょうか。相手のことを知らないとき、均衡はどう定義されるのでしょうか。また、微分を使わずに「パラメータが上がると最適な行動も上がる」と言えるのはどんなときでしょうか。
> **この章で分かること**　後ろ向き帰納法と部分ゲーム完全均衡の存在、一回逸脱の原理（証明）、繰り返しゲームと割引（協調が維持される条件、フォーク定理の主張）、ベイジアン・ゲームとベイジアン・ナッシュ均衡の存在、完全ベイジアン均衡の考え方、増加差分とトピキスの定理（証明）、戦略的補完性。

## 12.1　この章の見取り図

この章は、大学院のゲーム理論と、その金融・マクロへの応用で繰り返し使う、3つの道具を扱います。

1. **一回逸脱の原理**（12.3節）：動学ゲームの均衡を、「どの時点でも、1回だけ行動を変えて得をすることはない」ことを確かめるだけで判定できる、という原理です。繰り返しゲーム（12.4節）や関係的契約の分析の基本道具です。
2. **ベイジアン・ゲーム**（12.5節）：相手のタイプを知らない状況を、「タイプごとに別々のプレーヤー」とみなして、前の章の存在定理に帰着させます。
3. **単調比較静学**（12.6節）：最適な行動がパラメータとともに増えることを、微分や凹性なしに、利得の「増加差分」だけから示します。

## 12.2　展開形ゲームと後ろ向き帰納法

**展開形ゲーム**は、誰がいつ何を選べるか、そのとき何を知っているかを、木の形で表したゲームです。各プレーヤーがそれまでの行動をすべて観察して行動するゲームを**完全情報ゲーム**といいます。ゲームの途中のある点から始まる、それ自身がゲームになっている部

分を**部分ゲーム**といいます。戦略は「起こりうるすべての点で、何を選ぶか」を決める計画です。

> **定義 12.1（部分ゲーム完全均衡）**
> 戦略の組が、すべての部分ゲームでナッシュ均衡を与えているとき（実際には到達しない部分ゲームも含めて）、部分ゲーム完全均衡という。

**命題 12.2（有限な完全情報ゲームの均衡）**
手番の数が有限の完全情報ゲームには、純粋戦略の部分ゲーム完全均衡が存在する。

**証明**

**方針**　ゲームの木の深さ（最も長い手番の列の長さ）についての数学的帰納法で示します。

深さ1のゲームは、1人が1回選ぶだけなので、利得を最大にする行動を選べば均衡です（行動は有限個なので最大値があります）。深さ $k$ 以下のゲームで成り立つとし、深さ $k+1$ のゲームを考えます。最初の手番の各行動の後に続く部分ゲームは深さ $k$ 以下なので、帰納法の仮定より、それぞれに部分ゲーム完全均衡があります。その均衡での利得を各行動の結果とみなし、最初のプレーヤーがそれを最大にする行動を選ぶ戦略と組み合わせると、全体の部分ゲーム完全均衡になります。 □

**数式の読み方：なぜ部分ゲーム完全均衡か**
参入阻止ゲームで、既存企業が「参入されたら価格戦争をする」と脅すと、参入しないことがナッシュ均衡になりえます。しかし、実際に参入されたら価格戦争は損なので、この脅しは信用できません。部分ゲーム完全均衡は、到達しない場面での行動にも合理性を求めることで、こうした**信用できない脅し**を排除します。

## 12.3　一回逸脱の原理

各期に全員が同時に行動し、それまでの行動がすべて観察されるゲーム（観察可能な行動をもつ多段階ゲーム）を考えます。それまでの行動の記録を**履歴** $h$ といいます。プレーヤー $i$ の利得は、各期の利得 $g_i^t$ の割引和 $\sum_t \delta^t g_i^t$（$0<\delta<1$）で、各期の利得は $|g_i^t| \le M$ を満たすとします（期間は有限でも無限でもよい）。

> **定義 12.3（一回逸脱）**
> 戦略の組 $s$ について、プレーヤー $i$ のある履歴 $h$ での**一回逸脱**とは、履歴 $h$ での行動だけを変え、それ以外の履歴ではすべて $s_i$ に従う戦略をいう。それによって、$h$ から始まる部分ゲームでの $i$ の利得が上がるとき、その一回逸脱は得であるという。

**定理 12.4（一回逸脱の原理）**

戦略の組 $s$ が部分ゲーム完全均衡であることと、どのプレーヤーも、どの履歴でも、得な一回逸脱をもたないことは同値である。

**証明のアイデア**

部分ゲーム完全均衡なら、一回逸脱に限らずどんな逸脱も得にならないので、一方向は明らかです。山場は逆向きで、「多くの時点で行動を変える複雑な逸脱」を「1回だけの逸脱」に分解することです。有限回の逸脱なら、最後の時点の変更から順に元に戻していけば、得が減らないことが示せます。無限回の逸脱は、割引によって遠い将来の変更が利得にほとんど影響しないことを使い、有限回の逸脱で近似します。

**証明**

**ステップ1**　部分ゲーム完全均衡なら得な一回逸脱はない

一回逸脱も部分ゲームでの戦略の変更の一つなので、得になればナッシュ均衡であることに反します。

**ステップ2**　有限回だけ異なる逸脱は得にならない

得な一回逸脱がないとし、ある履歴 $h$ から始まる部分ゲームで、$s_i$ と有限個の履歴でだけ異なる戦略 $\hat{s}_i$ を考えます。その異なる履歴の数についての帰納法で、$\hat{s}_i$ が $s_i$ より得にならないことを示します。異なる履歴のうち最も後の時点のもの $h'$ をとると、$h'$ 以降で $\hat{s}_i$ は $h'$ での行動以外は $s_i$ に従うので、$h'$ での $\hat{s}_i$ は一回逸脱です。仮定よりそれは得ではないので、$h'$ での行動を $s_i$ のものに戻しても、$h'$ から始まる部分ゲームの利得は下がりません。$h'$ より前の履歴での利得は $h'$ 以降の利得を通じてしか変わらないので、$h$ での利得も下がりません。こうして異なる履歴の数を1つ減らせるので、帰納法により $\hat{s}_i$ の利得は $s_i$ の利得以下です。

**ステップ3**　一般の逸脱は得にならない

ある部分ゲームで、ある戦略 $\hat{s}_i$ が $s_i$ より $\varepsilon > 0$ だけ得だとします。$T$ を、$\delta^T \cdot 2M/(1-\delta) < \varepsilon/2$ となるように大きくとり、$T$ 期より前は $\hat{s}_i$、$T$ 期以降は $s_i$ に従う戦略 $\tilde{s}_i$ を作ります。$\hat{s}_i$ と $\tilde{s}_i$ の利得の差は、$T$ 期以降の利得の差だけで、その絶対値は $\sum_{t \geq T} \delta^t \cdot 2M = \delta^T \cdot 2M/(1-\delta) < \varepsilon/2$ です。したがって $\tilde{s}_i$ は $s_i$ より $\varepsilon/2$ 以上得です。ところが $\tilde{s}_i$ は $T$ 期より前の有限個の履歴でしか $s_i$ と異ならないので、ステップ2に反します。　□

**補足：経済学での使いどころ**

無限に続くゲームの戦略は無限に複雑になりえますが、一回逸脱の原理のおかげで、「各履歴で、今期の行動だけを変えて、その後は戦略に従う」場合の利得だけを比べれば足ります。これは動的計画法の「今期の選択＋来期以降の最適な価値」と同じ構造で、ステップ3の割引による近似は、ベルマン方程式の理論で使う議論と同じです。

## 12.4 繰り返しゲーム

同じゲーム（**段階ゲーム**）を無限に繰り返し、各期の利得の割引和を、$(1-\delta)$ をかけて「1期あたりの平均」に直した $(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t g_i^t$ を利得とします。

**計算例：囚人のジレンマと協調の維持**

2人が毎期「協調」か「裏切り」を選び、段階ゲームの利得が次のとおりだとします（$T>R>P>0$）。

| | 協調 | 裏切り |
|---|---|---|
| 協調 | $R, R$ | $0, T$ |
| 裏切り | $T, 0$ | $P, P$ |

**トリガー戦略**「これまで全員が協調していれば協調し、一度でも裏切りがあれば永久に裏切る」の組が部分ゲーム完全均衡になる条件を、一回逸脱の原理で求めます。

- 誰かが裏切った後の履歴：以後ずっと $(P,P)$ で、1回だけ協調に変えても今期の利得が $P$ から $0$ に下がるだけなので、得な一回逸脱はありません。
- 全員が協調してきた履歴：協調し続けると平均利得は $R$。今期だけ裏切ると、今期 $T$、以後ずっと $P$ なので $(1-\delta)T+\delta P$ です。

よって条件は $R \geq (1-\delta)T+\delta P$、つまり

$$\delta \;\geq\; \frac{T-R}{T-P}$$

です。将来を十分に重視するなら、協調が均衡として維持されます。

**補足：フォーク定理**

段階ゲームで実現可能な利得の組のうち、全員の利得が段階ゲームのナッシュ均衡の利得を上回るものは、$\delta$ が 1 に十分近ければ、どれも繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡の平均利得として実現できます（実現可能で、各人のミニマックス利得を上回る利得の組については、適当な条件のもとで同じことが成り立ちます。本書では証明しません）。繰り返しゲームでは「均衡が多すぎる」ことが典型的で、どの均衡に注目するかが応用上の問題になります。カルテルの維持、関係的契約、国家債務の返済（返済しないと市場から締め出される）、評判のモデルは、この考え方に基づいています。

## 12.5 ベイジアン・ゲーム

プレーヤー $i$ は、自分の**タイプ** $\theta_i \in \Theta_i$（費用、評価額、情報など）を知っていますが、他人のタイプは知りません。タイプの組 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ は、全員が知っている確率（共通事前分布）$\pi$ に従って選ばれるとします。$\Theta_i$ と行動の集合 $A_i$ は有限集合とします。

**定義 12.5（ベイジアン・ナッシュ均衡）**

プレーヤー $i$ の戦略は、タイプから行動（混合行動でもよい）への写像 $\sigma_i : \Theta_i \to \Delta(A_i)$ である。戦略の組 $\sigma^*$ が、すべての $i$ と、確率が正のすべてのタイプ $\theta_i$ について、

$$\sigma_i^*(\theta_i) \in \arg\max_{\alpha_i \in \Delta(A_i)} \mathrm{E}\big[u_i(\alpha_i, \sigma_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta) \,\big|\, \theta_i\big]$$

を満たすとき、ベイジアン・ナッシュ均衡という。期待値は、ベイズの定理による条件付き確率 $\pi(\theta_{-i} \mid \theta_i)$ でとる。

**命題 12.6（ベイジアン・ナッシュ均衡の存在）**

タイプと行動の集合が有限なベイジアン・ゲームには、ベイジアン・ナッシュ均衡が存在する。

**証明**　各プレーヤー $i$ の各タイプ $\theta_i$（確率が正のもの）を、別々の「プレーヤー $(i, \theta_i)$」とみなします。プレーヤー $(i, \theta_i)$ の戦略は $\Delta(A_i)$ の点で、利得は $\mathrm{E}[u_i \mid \theta_i]$ です。これは有限個のプレーヤーがそれぞれ有限個の純粋戦略をもつゲームなので、定理 11.9 よりナッシュ均衡があります。このゲームのナッシュ均衡の条件は、ベイジアン・ナッシュ均衡の条件とまったく同じです。 □

**数式の読み方：動学的な不完備情報ゲーム**

シグナリング（学歴による能力のシグナル、配当や負債による企業の質のシグナル）のように、情報をもつ者が先に行動し、それを見た者が信念を更新して行動するゲームでは、**完全ベイジアン均衡**を使います。条件は2つです。

1. （逐次合理性）各手番で、そのときの信念のもとで最適に行動する。
2. （信念の整合性）均衡で確率が正の行動を観察したときの信念は、ベイズの定理で計算する。

確率 0 の行動（均衡経路外の行動）を観察したときの信念はベイズの定理では決まらず、そこに自由度が残ることが、シグナリング・ゲームで均衡が多数生じる原因です。直観的基準などの「均衡の精緻化」は、この自由度を経済学的な理由で絞り込む方法です。

## 12.6　単調比較静学

第6章の比較静学は、一階条件を陰関数定理で微分する方法でした。そこでは、微分可能性と二階条件（凹性）が必要でした。ここでは、それらを使わずに「最適な行動がパラメータとともに増える」ことを示す方法を学びます。

**定義 12.7（増加差分）**

$X, T \subseteq \mathbb{R}$ とする。$f : X \times T \to \mathbb{R}$ が増加差分をもつとは、$x' > x$、$t' > t$ ならば

$$f(x', t') - f(x, t') \;\geq\; f(x', t) - f(x, t)$$

が成り立つことをいう。

**数式の読み方：増加差分の読み方**

- 「$x$ を上げることの得は、$t$ が高いほど大きい」という条件です。$x$ と $t$ が補完的である、と言ってもよいでしょう。
- $f$ が $C^2$ 級なら、$f_{xt} \geq 0$ が十分条件です。$f(x', t) - f(x, t) = \int_x^{x'} f_x(s, t)\, ds$ で、$f_{xt} \geq 0$ なら $f_x$ が $t$ について増加するからです。

**定理 12.8（トピキスの定理（1次元の場合））**

$f$ が増加差分をもち、各 $t$ で最大化点の集合 $X^*(t) = \arg\max_{x \in X} f(x, t)$ が空でないとする。$t < t'$、$x \in X^*(t)$、$x' \in X^*(t')$ で $x > x'$ ならば、$x \in X^*(t')$ かつ $x' \in X^*(t)$ である。特に、$X^*(t)$ の最大元と最小元が存在するなら、それらは $t$ について増加する。

**証明のアイデア**

「高い $t$ では低い $x'$ を、低い $t$ では高い $x$ を選ぶ」という逆転が起きたとします。増加差分は「$x$ を上げる得は $t$ が高いほど大きい」なので、低い $t$ で $x$ に上げる得があるなら、高い $t$ ではなおさら得があるはずです。最適性の不等式と増加差分の不等式をはさむと、すべて等号になり、逆転した2つの選択を入れかえても最適なままであることが分かります。

**証明**　$x' \in X^*(t')$ なので $f(x',t') \geq f(x,t')$、$x \in X^*(t)$ なので $f(x,t) - f(x',t) \geq 0$ です。増加差分（$x > x'$、$t' > t$）より

$$f(x,t') - f(x',t') \geq f(x,t) - f(x',t) \ \geq \ 0 \qquad \text{（増加差分、}x\text{ の最適性）}$$

なので $f(x,t') \geq f(x',t')$ で、$x \in X^*(t')$ です。すると $f(x,t') - f(x',t') = 0$ なので、上の不等式から $f(x,t) - f(x',t) \leq 0$、つまり $f(x',t) \geq f(x,t)$ で、$x' \in X^*(t)$ です。後半：最大元について、$\bar{x}(t) > \bar{x}(t')$ なら前半から $\bar{x}(t) \in X^*(t')$ で、$\bar{x}(t')$ が最大元であることに反します。最小元も同様です。　□

**計算例：独占企業の価格**

限界費用 $c$ が上がると独占企業の最適な価格は上がるか、を考えます。利潤 $f(p,c) = (p-c)D(p)$ について、$p' > p$、$c' > c$ なら

$$\big[f(p',c') - f(p,c')\big] - \big[f(p',c) - f(p,c)\big] = (c'-c)\big(D(p) - D(p')\big) \ \geq \ 0$$

（需要は価格について減少）なので、増加差分をもちます。トピキスの定理から、需要関数の形（凹性や微分可能性）によらず、最適価格は限界費用について増加します。

**補足：経済学での使いどころ　戦略的補完性**

相手の行動が増えると自分の最適な行動も増える（自分の利得が「自分の行動」と「相手の行動」について増加差分をもつ）ゲームを、**戦略的補完性**をもつゲームといいます。トピキスの定理から最適反応は増加関数になり、この性質だけから、純粋戦略の均衡の存在と、最大の均衡・最小の均衡の存在が示せます（タルスキの不動点定理。本書では証明しません）。銀行取り付け（他の預金者が引き出すほど自分も引き出したくなる）、投資の協調の失敗、価格競争などが代表例で、複数均衡と「協調の失敗」の分析の基礎になっています。より一般に、増加差分の代わりに「単一交差条件」（$x$ を上げる得の符号が、$t$ とともに負から正にしか変わらない）でも、同じ結論が成り立ちます（ミルグロム＝シャノンの定理。本書では証明しません）。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- 後ろ向き帰納法・部分ゲーム完全均衡 → 参入阻止、交渉、信用できない脅しの排除。
- 一回逸脱の原理 → 繰り返しゲーム、関係的契約、評判、国家債務。
- ベイジアン・ゲーム → オークション、不完備情報のもとでの競争、グローバル・ゲーム。
- 完全ベイジアン均衡 → シグナリング（学歴、配当、資本構成）。
- 単調比較静学 → 微分なしの比較静学、戦略的補完性、銀行取り付けと協調の失敗。

**要点**

- 有限な完全情報ゲームには、後ろ向き帰納法で純粋戦略の部分ゲーム完全均衡が作れます。
- 割引と有界な利得があれば、部分ゲーム完全均衡かどうかは、一回逸脱だけを確かめれば判定できます。
- 繰り返し囚人のジレンマでは、$\delta \geq (T-R)/(T-P)$ ならトリガー戦略で協調が維持されます。
- ベイジアン・ゲームは、タイプごとに別のプレーヤーとみなせば、通常のゲームの存在定理で均衡の存在が示せます。
- 利得が増加差分をもてば、最適な行動はパラメータについて増加します（トピキスの定理）。

**次の章へ**　次の章では、情報をもつ側ともたない側の間の契約を、ここまでの道具（包絡線定理、単調性、期待効用、KKT条件）で分析します。

**大学院とのつながり**　一回逸脱の原理と割引による近似は、マクロ経済学の動的計画法とまったく同じ構造です。グローバル・ゲームや銀行取り付けのモデルは、不完備情報と戦略的補完性を組み合わせたものです。

第13章

# 契約理論の数学

**ここまでの流れ**　前の章で、不完備情報ゲームと単調比較静学を学びました。第7章ではKKT条件と包絡線定理を、第9章では期待効用を学んでいます。
**前提知識**　第7章のKKT条件の十分性（定理 7.3）と包絡線定理。第9章の期待効用と危険回避。第12章のベイジアン・ゲームと増加差分。1変数の積分（積分の順序の交換を1か所で使います）。
**この章の問い**　相手のタイプ（費用や評価額）を知らないとき、あるいは相手の努力を観察できないとき、どのような契約を結ぶのが最適でしょうか。そのとき、情報をもつ側はどれだけの利益（情報レント）を得るのでしょうか。
**この章で分かること**　誘因両立性と参加制約、顕示原理（証明）、単調性と包絡線の公式による誘因両立性の特徴づけ（証明）、情報レント、スクリーニング問題の解法（仮想評価と点ごとの最大化）、モラルハザードの最適契約と単調尤度比条件。

## 13.1　この章の見取り図

契約理論の問題は、2つに大きく分けられます。

- **逆選択（スクリーニング）**：契約の前に、エージェントが自分のタイプを知っている。例：買い手の評価額を知らない独占企業の価格表、借り手のリスクを知らない銀行の融資条件、保険会社と保険加入者。
- **モラルハザード**：契約の後で、エージェントの行動が観察できない。例：経営者の努力と報酬、借り手の事業選択と負債契約。

前者の中心的な道具は「包絡線定理の一般形」と「単調性」で、そこから情報レントの公式と、仮想評価による解法が一貫して導かれます（13.2〜13.4節）。後者の中心的な道具は、凸最適化のKKT条件です（13.5節）。

## 13.2　メカニズムと顕示原理

プリンシパル（契約を設計する側）とエージェント（タイプ $\theta \in \Theta$ を私的に知る側）を考えます。結果は数量 $q$ と支払い $t$ の組で、タイプ $\theta$ のエージェントの効用は $u(q, t, \theta)$ です。

**定義 13.1（メカニズム・直接メカニズム・誘因両立性）**

1. メカニズムとは、エージェントが送るメッセージの集合 $M$ と、メッセージから結果を決める規則 $g : M \to \{(q,t)\}$ の組である。タイプ $\theta$ のエージェントは、$u(g(m),\theta)$ を最大にする $m$ を選ぶ。
2. $M = \Theta$ のメカニズム（「タイプを申告させる」もの）を直接メカニズムといい、$(q(\cdot),t(\cdot))$ と書く。
3. 直接メカニズムが誘因両立的（IC）であるとは、すべての $\theta,\hat{\theta}$ で $u(q(\theta),t(\theta),\theta) \geq u(q(\hat{\theta}),t(\hat{\theta}),\theta)$、つまり正直に申告することが最適であることをいう。
4. 参加制約（IR）を満たすとは、すべての $\theta$ で $u(q(\theta),t(\theta),\theta) \geq \underline{u}$（契約しない場合の効用）であることをいう。

**定理 13.2（顕示原理）**

任意のメカニズム $(M,g)$ と、各タイプのエージェントの最適なメッセージ $m^*(\theta)$ について、直接メカニズム $(q(\theta),t(\theta)) = g(m^*(\theta))$ は誘因両立的で、すべてのタイプに同じ結果をもたらす。

**証明**　タイプ $\theta$ が $\hat{\theta}$ と申告すると、結果は $g(m^*(\hat{\theta}))$ です。これは、もとのメカニズムでメッセージ $m^*(\hat{\theta})$ を送ったときの結果なので、$m^*(\theta)$ の最適性から $u(g(m^*(\theta)),\theta) \geq u(g(m^*(\hat{\theta})),\theta)$、つまり正直な申告が最適です。結果が同じであることは定義そのものです。 □

**補足：経済学での使いどころ**

顕示原理のおかげで、「どんな仕組み（価格表、オークション、融資条件のメニュー）が最適か」という問題は、「誘因両立性と参加制約のもとで、直接メカニズムの中から最適なものを選ぶ」という最適化問題に置きかわります。可能な仕組みは無数にありますが、その結果はすべて IC な直接メカニズムで再現できるからです。

## 13.3　誘因両立性の特徴づけと情報レント

以下、タイプは区間 $\Theta = [\underline{\theta},\bar{\theta}]$ の値をとり、効用は準線形 $u = \theta q - t$（$\theta$ は数量への限界評価、$t$ は支払い）とします。正直に申告したときの効用を $U(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta)$ と書きます。

**定理 13.3（誘因両立性の特徴づけ）**

直接メカニズム $(q, t)$ が誘因両立的であることと、次の2つが成り立つことは同値である。

1. （単調性）$q(\theta)$ は $\theta$ について増加する。
2. （包絡線の公式）すべての $\theta$ で $U(\theta) = U(\underline{\theta}) + \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s)\,ds$。

**証明のアイデア**

誘因両立性の2本の不等式（$\theta$ が $\theta'$ のふりをしない、$\theta'$ が $\theta$ のふりをしない）を並べると、$U$ の差分商が $q(\theta')$ と $q(\theta)$ にはさまれます。ここから $q$ の単調性が、そして差分商の極限として「$U'(\theta) = q(\theta)$」が出てきます。これは、$U(\theta) = \max_{\hat{\theta}}\{\theta q(\hat{\theta}) - t(\hat{\theta})\}$ に包絡線定理を当てはめた結果（最適な申告が動く効果は無視してよく、$\theta$ の直接の効果 $q$ だけが残る）にほかなりません。

**証明**

**ステップ1**　IC から差分商の不等式

IC は、$U(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta') = U(\theta') + (\theta - \theta')q(\theta')$ と書けます。$\theta$ と $\theta'$ の役割を入れかえた不等式と合わせると、$\theta > \theta'$ について

$$(\theta - \theta')\,q(\theta') \;\leq\; U(\theta) - U(\theta') \;\leq\; (\theta - \theta')\,q(\theta)$$

です。

**ステップ2**　IC ならば単調性

ステップ1の両端を比べて $\theta - \theta' > 0$ で割ると、$q(\theta') \leq q(\theta)$ です。

**ステップ3**　IC ならば包絡線の公式

$\underline{\theta} = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = \theta$ と区間を分け、ステップ1を各小区間に使って足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\,q(a_{k-1}) \;\leq\; U(\theta) - U(\underline{\theta}) \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\,q(a_k)$$

です。両端は増加関数 $q$ の下からのリーマン和と上からのリーマン和です。増加関数はリーマン積分可能（分割を細かくすると両端の和が同じ値 $\int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s)\,ds$ に近づく）ことが知られているので（本書では証明しません）、真ん中の値はその積分に等しくなります。

**ステップ4**　単調性と包絡線の公式ならば IC

$\theta > \theta'$ のとき、公式から

$$U(\theta) - U(\theta') - (\theta - \theta')q(\theta') = \int_{\theta'}^{\theta} \big(q(s) - q(\theta')\big)\, ds \;\geq\; 0 \qquad (s \geq \theta' \text{ で } q(s) \geq q(\theta'))$$

です。これは $\theta$ が $\theta'$ のふりをしないという IC です。$\theta < \theta'$ のときも、$\int_{\theta}^{\theta'} \big(q(\theta') - q(s)\big)\, ds \geq 0$ から同様です。 □

**数式の読み方：情報レント**

- 包絡線の公式から、タイプ $\theta$ の効用は、最も低いタイプの効用に $\int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s)\, ds$ を足したものです。高いタイプは、低いタイプのふりをすれば同じ契約を得られるので、それ以上の効用を保証しなければなりません。この上乗せ分が**情報レント**です。
- 情報レントは、低いタイプに割り当てる数量 $q(s)$ が大きいほど大きくなります。そのため、プリンシパルは低いタイプの数量を（効率的な水準より）減らして、高いタイプのレントを抑えようとします。これが次の節の「歪み」の源です。
- 支払いは $t(\theta) = \theta q(\theta) - U(\theta)$ で、数量のルール $q(\cdot)$ と $U(\underline{\theta})$ だけから決まります。**IC な契約は、増加する数量のルールと最低タイプの効用で完全に表せる**のです。

**補足：包絡線定理の一般形**

ここでは、$U(\theta) = \max_{\hat{\theta}} u(q(\hat{\theta}), t(\hat{\theta}), \theta)$ の「選択の集合（申告できるタイプ）」に何の構造（凸性・微分可能性）も仮定せずに、包絡線の公式を導きました。一般に、$V(\theta) = \sup_{x \in X} f(x, \theta)$ で、$f$ が $\theta$ について（$x$ によらず一様に）微分可能なら、$V$ は（ほとんどすべての点で）微分可能で $V'(\theta) = f_\theta(x^*(\theta), \theta)$ となり、$V(\theta) = V(\underline{\theta}) + \int f_\theta(x^*(s), s)\, ds$ が成り立ちます（ミルグロム＝シーガルの包絡線定理。本書では証明しません）。オークション理論の収入同値定理も、この公式から導かれます。

## 13.4　スクリーニング問題の解法

独占企業（プリンシパル）が、評価額 $\theta$ を知らない買い手に、数量と料金のメニューを提示する問題を考えます。$\theta$ は区間 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ 上の分布関数 $F$、正の密度 $f$ に従い、生産費用は $c(q)$（$c$ は狭義凸、$c(0) = 0$）、買い手が契約しないときの効用は 0 とします。企業の問題

は

$$\max_{q(\cdot),t(\cdot)} \ \mathrm{E}\big[t(\theta)-c(q(\theta))\big] \quad \text{s.t.} \quad \text{IC}, \quad U(\theta)\geq 0 \ (\text{すべての } \theta)$$

です。

---

**定理 13.4（仮想評価による解法）**

$\psi(\theta)=\theta-\dfrac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$（**仮想評価**）が $\theta$ について増加するとする。各 $\theta$ で $\psi(\theta)q-c(q)$ を $q\geq 0$ について最大にする $q^*(\theta)$ をとり、$U(\underline{\theta})=0$、支払いを包絡線の公式で定めた契約は、企業の問題の解である。

---

**証明のアイデア**

定理 13.3 を使って、支払い $t$ を数量 $q$ で書き直すと、企業の利潤は「仮想評価 $\psi(\theta)$ で評価した余剰」の期待値になります。これは各 $\theta$ ごとに別々に最大化できる（点ごとの最大化）ので、まず IC の単調性を無視して解き、得られた $q^*$ が単調であることを最後に確かめます。仮想評価が増加なら $q^*$ も増加になります。

**証明**

**ステップ1**　支払いを消去する

IC な契約では $t(\theta)=\theta q(\theta)-U(\theta)$ なので、利潤の期待値は $\mathrm{E}[\theta q-c(q)]-\mathrm{E}[U(\theta)]$ です。包絡線の公式と積分の順序の交換から

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[U(\theta)] &= U(\underline{\theta})+\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}\Big(\int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s)\,ds\Big)f(\theta)\,d\theta && \text{（包絡線の公式）}\\
&= U(\underline{\theta})+\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(s)\big(1-F(s)\big)\,ds && \text{（}s\leq\theta\text{ の範囲で積分の順序を交換）}\\
&= U(\underline{\theta})+\mathrm{E}\Big[q(\theta)\,\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\Big] && \text{（}f\text{ をかけて割る）}
\end{aligned}$$

です。よって利潤は $\mathrm{E}\big[\psi(\theta)q(\theta)-c(q(\theta))\big]-U(\underline{\theta})$ です。

**ステップ2**　点ごとの最大化

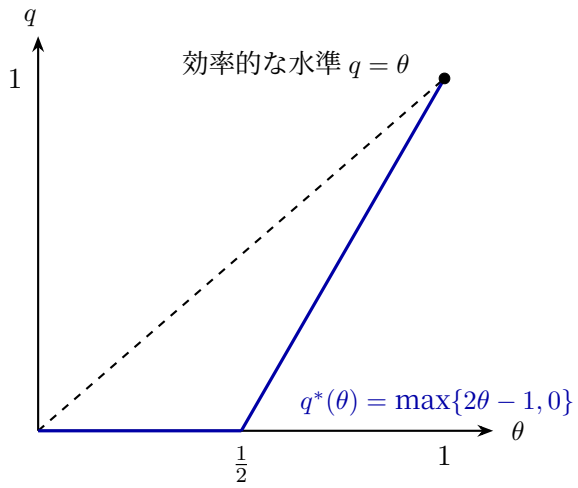
参加制約は、$U$ が増加（包絡線の公式で $q\geq 0$）なので $U(\underline{\theta})\geq 0$ と同値で、利潤を最大にするには $U(\underline{\theta})=0$ とします。残る問題は、増加する $q(\cdot)$ の中で $\mathrm{E}[\psi q-c(q)]$ を最大にすることです。単調性の制約を外すと、各 $\theta$ で $\psi(\theta)q-c(q)$ を最大にすればよく、その解が $q^*(\theta)$ です。

**ステップ3**　単調性の確認

関数 $g(q,\theta)=\psi(\theta)q-c(q)$ は、$q'>q$ で $g(q',\theta)-g(q,\theta)=\psi(\theta)(q'-q)-(c(q')-c(q))$ が $\theta$ について増加するので、増加差分をもちます。$g(\cdot,\theta)$ は狭義凹なので最大化点はただ一

つで、トピキスの定理（定理 12.8）より、$q^*(\theta)$ は $\theta$ について増加です。したがって $q^*$ は単調性の制約も満たし、定理 13.3 より IC です。制約を外した問題の解が制約を満たすので、もとの問題の解です。 □

**図 13.1**　スクリーニングの最適な数量：効率的な水準との比較




$\theta$ は $[0,1]$ 上の一様分布（$\psi(\theta) = 2\theta - 1$）、$c(q) = q^2/2$。効率的な水準は $c'(q) = \theta$、最適契約は $c'(q) = \psi(\theta)$ から求めた。

**図の読み方**

1. 黒の破線は、情報が完全なときの効率的な数量 $q = \theta$（限界評価＝限界費用）です。青の実線が、情報が不完全なときの最適な数量 $q^*(\theta)$ です。

2. 低いタイプほど数量が効率的な水準より大きく削られ、$\theta < \frac{1}{2}$ のタイプには何も売りません（市場からの排除）。低いタイプへの数量を減らすと、高いタイプの情報レントを減らせるからです。

3. 最も高いタイプ $\theta = 1$ では $\psi(1) = 1$ なので、数量は効率的です（**頂上での歪みなし**）。

**補足：経済学での使いどころ**

同じ構造（仮想評価による点ごとの最大化、低いタイプでの歪み、頂上での歪みなし）は、非線形価格づけ・数量割引、規制（費用を知らない規制当局）、最適オークション（マイヤーソン：最も高い仮想評価の買い手に売る）、保険のメニュー、銀行による信用割当や担保の要求、最適課税（ミルリーズ型）に共通して現れます。「仮想評価が増加」という仮定は、分布の**ハザード率** $f/(1-F)$ が減少しなければ（非減少なら）満たされ、正規分布・一様分布・指数分布などがこれを満たします。

## 13.5　モラルハザード

次に、エージェントの行動（努力）が観察できない場合を考えます。結果 $x_1 < \cdots < x_S$ のどれが起こるかは努力 $e \in \{e_L, e_H\}$ に依存し、確率を $p_s(e) > 0$ とします。エージェントは危険回避的で、効用は $u(w) - c(e)$（$u$ は狭義増加・狭義凹で微分可能、$c(e_H) > c(e_L)$）、契約しないときの効用は $\underline{u}$ です。プリンシパルはリスク中立的で、結果に応じた賃金 $w_s$ を設計し、高い努力 $e_H$ を最小の費用で引き出したいとします。

$$\min_{w_1,\dots,w_S} \sum_s p_s(e_H)\, w_s \quad \text{s.t.} \quad \sum_s p_s(e_H) u(w_s) - c(e_H) \ge \underline{u} \tag{IR}$$

$$\sum_s p_s(e_H) u(w_s) - c(e_H) \ge \sum_s p_s(e_L) u(w_s) - c(e_L) \tag{IC}$$

---

**命題 13.5（最適な賃金の条件）**

効用の水準 $v_s = u(w_s)$ を変数にとると、この問題は凸計画問題になる。KKT条件を満たす $(v_s)$ が最適で、その条件は、乗数 $\lambda, \mu \ge 0$ について

$$\frac{1}{u'(w_s)} = \lambda + \mu\Bigl(1 - \frac{p_s(e_L)}{p_s(e_H)}\Bigr) \qquad (s = 1, \dots, S)$$

である。

---

**証明**　$h = u^{-1}$ とおくと、$w_s = h(v_s)$ で、$u$ が狭義増加・狭義凹なので $h$ は狭義増加・凸です。目的関数 $\sum_s p_s(e_H) h(v_s)$ は凸関数で、2つの制約は $v$ の1次式です。したがって、最小化問題について第7章の十分性の定理（定理 7.3 を $-$（目的関数）の最大化に当てはめる）より、KKT条件を満たす点は最適です（制約は1次式なので制約想定も満たされます）。ラグランジュ関数を $v_s$ で微分すると

$$p_s(e_H) h'(v_s) = \lambda p_s(e_H) + \mu\bigl(p_s(e_H) - p_s(e_L)\bigr) \qquad \text{（一階条件）}$$

で、$p_s(e_H)$ で割り、$h'(v_s) = 1/u'(w_s)$（逆関数の微分）を使えば結論です。　□

**数式の読み方：単調尤度比条件と賃金の形**

- $p_s(e_L)/p_s(e_H)$ は**尤度比**で、「結果 $s$ が、低い努力から生じた可能性の相対的な大きさ」です。統計学的には、結果 $s$ を見て努力を推測するときの証拠の強さを表します。
- IC が効く（$\mu > 0$）とき、尤度比が小さい結果（高い努力を強く示唆する結果）ほど右辺が大きく、$1/u'(w_s)$ が大きい、つまり（$u'$ が減少なので）賃金が高くなります。
- 尤度比が $s$ について減少する（**単調尤度比条件**：良い結果ほど高い努力を示唆する）なら、賃金は結果について増加します。この条件がないと、「良い結果なのに賃金が下がる」契約が最適になることがあります。
- 努力が観察できれば $w_s$ は一定（完全な保険）ですが、観察できないと誘因のために賃金にリスクを負わせる必要があります。リスク分担と誘因のトレードオフが、モラルハザードの本質です。

**発展：一階条件アプローチ**

努力が連続的な値をとる場合、IC（エージェントが $e$ を最適に選ぶこと）を、エージェントの一階条件で置きかえて解く方法を一階条件アプローチといいます。この置きかえが正当化されるのは、エージェントの問題が凹になる場合で、単調尤度比条件と、分布関数の努力についての凸性（ロジャーソンの条件）が十分条件として知られています（本書では証明しません）。

**補足：経済学での使いどころ**

モラルハザードの最適契約は、経営者報酬（業績連動の報酬）、負債契約（結果が悪いときに一定額しか払えない借り手には、負債が最適になることがある）、銀行の自己資本規制（ホルムストロム＝ティロールの「経営者の持ち分」の考え方）、保険の自己負担の設計の基礎です。金融仲介や企業金融の理論の多くは、この節の問題に、有限責任や担保の制約を加えたものです。

**補足：経済学での使いどころ（この章のまとめ）**

- 顕示原理 → 最適な仕組みの設計を、IC・IR制約付きの最適化問題に帰着させる。
- 誘因両立性の特徴づけ（単調性・包絡線の公式）→ 情報レント、収入同値定理。
- 仮想評価と点ごとの最大化 → 非線形価格づけ、最適オークション、規制、最適課税、信用割当。
- モラルハザードと単調尤度比条件 → 経営者報酬、負債契約、保険の自己負担、金融仲介。

**要点**

- 顕示原理により、どんな仕組みの結果も、誘因両立的な直接メカニズムで再現できます。
- 準線形の効用では、誘因両立性は「数量が増加」と「$U(\theta) = U(\underline{\theta}) + \int q$」と同値です。後者が情報レントを表します。
- スクリーニングの最適契約は、仮想評価 $\theta - (1-F)/f$ で評価した余剰を点ごとに最大化して得られ、低いタイプで数量が歪み、頂上では歪みません。
- モラルハザードでは、効用の水準を変数にとると凸計画になり、最適な賃金は尤度比で決まります。単調尤度比条件のもとで賃金は結果について増加します。

**この本のまとめ**　この本で学んだ道具は、存在を示す道具（コンパクト性・連続性・不動点定理）、性質を示す道具（凸性・分離超平面定理・双対性・単調比較静学）、計算の道具（微分・KKT条件・包絡線定理）、不確実性と情報の道具（期待効用・ベイズの定理・無裁定）に分けられます。存在定理は「離散的に近似し、コンパクト性で極限をとり、連続性と凸性で確かめる」という戦略で、契約理論の解法は「包絡線定理で支払いを消去し、単調性を確かめる」という戦略で組み立てられていることを振り返ってください。

**大学院ミクロへ、そしてマクロ版へ**　次は、これらの道具を使って、選好と効用、消費者理論、生産者理論、一般均衡、ゲーム理論、契約理論を学びます。時間を通じた最適化、確率過程、動学的な均衡は、2冊目の「大学院マクロのための経済数学」で扱います。